128 ~~J IX 60~~

(Gesch.: Schlemers in Goett. d. G. 841)

Phys.
o. 128.

Lehrbuch

der

analytischen Optik

von

J. C. E. Schmidt
außerordentlichem Professor der Mathematik zu Göttingen

nach des Verfassers Tode herausgegeben

von

Dr. C. W. B. Goldschmidt
Privatdocenten auf der Universität Göttingen.

BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

Mit 4 Kupfertafeln.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1834.

Vorrede.

Der Verfasser dieses Werks starb im Jahre 1832 in Tübingen, kurze Zeit nachdem er als Professor der Mathematik dorthin berufen war. In seinem Nachlasse fand sich das fast völlig zum Druck ausgearbeitete Manuscript eines Theils der analytischen Optik, und der Unterzeichnete glaubte durch die Beförderung desselben zum Druck dem mathematischen Publicum einen nicht ganz unangenehmen Dienst zu erweisen. Die vom Verfasser ausgearbeiteten Theile der optischen Wissenschaften beschränken sich auf die Optik, im engern Sinne des Worts, auf Katoptrik und Dioptrik, und diese Theile sind es, welche das gegenwärtige Lehrbuch umfasst; die Theorie der doppelten Strahlenbrechung, die weitere Ausführung der Lehre von der Beugung des Lichts, von welcher der Verfasser nur die Grundzüge gegeben hat, die Anwandlungen, die Polarisation und die Interferenz des Lichts sind noch zurück. Indessen bilden die hier abgehandelten Theile ein in sich abgeschlossenes Ganzes und enthalten namentlich für die Anwendung der Optik grade das Wichtigste. Sollte die hier gewählte Behandlungsart Beifall finden, so würde der

Unterzeichnete versuchen, in einem zweiten Bande das Rückständige auf dieselbe Art behandelt herauszugeben und zu gleicher Zeit einige Abschnitte des gegenwärtigen Bandes weiter auszuführen. —

Der Herausgeber hielt es für seine Pflicht, bei dem Abdrucke des Werks im Wesentlichen nichts zu ändern, nur in wenigen Fällen, wo es ihm unumgänglich nöthig schien, hat er sich eine Umarbeitung der von Schmidt gewählten Darstellung erlaubt. Nur der kleine Abschnitt über die scheinbare Bahn der Körper, rührt ganz vom Herausgeber her, ebenso die wenigen unter den Text gesetzten Anmerkungen. —

Göttingen, im August 1834.

C. W. B. Goldschmidt.

Inhaltsverzeichniss.

Vom Licht im Allgemeinen. . . Pag. 1.

§. 1. Erklärung des Lichts, selbstleuchtende und dunkle Körper. §. 2. 3. Ueber die Natur des Lichts. §. 4. Durchsichtige und undurchsichtige Körper. §. 5–12. Gradlinige Fortpflanzung des Lichts. Abweichung von der graden Linie beim Durchgange durch durchsichtige Körper. Die Lichtstrahlen stören sich beim Durchkreuzen nicht. §. 13–21. Beobachtungen in der Camera obscura und daraus gezogene Grundsätze der Optik. §. 22-38. Gleichungen der Bilder leuchtender Punkte oder Flächen, wenn die Strahlen durch Oeffnungen von gegebener Gestalt gehen, und auf einer gegebenen Ebene aufgefangen werden. §. 39. Ueber die Aehnlichkeit zwischen Object und Bild. §. 40–43. Ueber das Sehen. §. 44. Scheinbare Entfernung. §. 45. Aufrechterscheinen der gesehenen Objecte. §. 46. 47. Scheinbarer Durchmesser einer Kugel. §. 48–52. Grenzen der Sichtbarkeit eines Objects. §. 53–56. Bestimmung des Gesichtswinkels, unter dem eine gegebene grade Linie erscheint. §. 57. Scheinbare Entfernung, welche das Auge auf der Erde übersieht. §. 58. 59. Depression des Horizonts. §. 60. Wirkliche Entfernung, welche das Auge auf der Erde übersieht. §. 61. Verschiedenheit des Gesichtswinkels, bei dem wir Objecte noch wahrnehmen. §. 62–65. Wir sehen die Objecte nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt. §. 66. 67. Die Entfernung der Objecte läſst sich durch bloſses Sehen derselben nicht erkennen. §. 68–74. Erklärung des sogenannten Wasserziehens der Sonne. §. 75. Falsche Urtheile die von Kleinerwerden des Gesichtswinkels entfernterer Objecte herrühren. §. 76–84. Scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes. §. 85. Erklärung des Phänomens, daſs Sonne und Mond am Horizonte gröſser erscheinen als bei bedeutenderer Höhe.

Von der Bewegung des Lichts und den daher rührenden Erscheinungen. . . Pag. 67.

§. 86. Bewegung des Lichts und Aberration. §. 87 – 90. Phänomene, welche die Bewegung des Lichts bei der Verfinsterung der Jupiterstrabanten hervorbringt. §. 91–115. Gesetze der Aberration des Lichts, Aberration der Sterne in Länge und Breite. §. 116. Aberrationsconstante. Geschwindigkeit des Lichts. §. 117. 118. Untersuchung der Curve in welcher sich ein Stern vermöge der Aberration zu bewegen scheint. §. 119 – 126. Formeln für die Aberration, wenn der Beobachter auſser der Bewegung um die Sonne noch eine andere Bewegung hat. §. 127. 128. Tägliche Aberration. §. 129 – 131. Aberration, wenn das beobachtete Object eine eigene Bewegung hat. §. 132. 133. Aberration bei terrestrischen Objecten. §. 134. Für das Emanationssystem ist die Aberrationsconstante bei dem Durchgange des Lichts durch verschiedene Mittel dieselbe, nicht so beim Vibrationssysteme.

Von der scheinbaren Bahn der Körper. Pag. 111.

§. 135. 136. Scheinbare Bahn und scheinbare Geschwindigkeit. §. 137 – 142. Bestimmung derselben.

Von der Parallaxe. . . . Pag. 115.

§. 143. Gröſse der Parallaxe. §. 144 – 146. Parallaxe bei terrestrischen Objecten. §. 147 – 149. Parallaxe der Himmelskörper.

Vom Schatten der Körper. . . Pag. 122.

§. 150. 151. Schlagschatten, Erleuchtungsgrenze, Kernschatten, Halbschatten. §. 152 – 156. Bestimmung der Erleuchtungsgrenze, wenn der leuchtende und der erleuchtete Körper Kugeln sind. §. 157–159. Schatten eines durch eine Kugel erleuchteten Parallelogramms. §. 160 – 162. Von der Curve, welche der Endpunkt des Schattens eine- beleuchteten Stabes auf eine Ebene wirft. §. 163 – 165. Allgemeine Formeln für die Oberfläche des hinter einem dunklen Körper gebildeten Schattenkegels, und für die Erleuchtungsgrenze. §. 166. 167. Anwendung dieser Formeln auf die Erleuchtung eines elliptischen Sphäroids.

Von der Erleuchtung. . . . Pag. 143.

§. 168 – 173. Grundsätze für die Stärke der Erleuchtung. §. 174. Mittlere Dichtigkeit des Lichts auf einer erleuchteten Fläche. §. 182. 183. Lichtmenge und mittlere

Dichtigkeit des Lichts auf einer erleuchteten Kugel. §. 184–186. Lichtmenge eines Kreises. §. 187. Lichtmenge einer Ellipse. §. 188. 189. Helligkeit einer erleuchteten Fläche. §. 190–200. Lichtmenge bei der Erleuchtung durch eine Fläche. §. 201. Lichtmenge, welche ein gegebener Punkt der Erdoberfläche innerhalb eines Tages durch die Sonne erhält. §. 202. Die Lichtmenge, welche ein Element des leuchtenden Körpers auf einen dunklen wirft, ist derjenigen gleich, welche auf die Projection desselben auf eine um das dunkle Element beschriebene Kugelfläche fällt. §. 203–205. Beleuchtung durch einen Theil einer Kugel. §. 206. 207. Erleuchtung durch einen erleuchteten Körper. §. 208–212. Erleuchtung der Erde durch den Mond. §. 213–216. Scheinbarer Glanz der Körper. §. 217–219. Schwächung des Lichts in durchsichtigen Mitteln. §. 220–223. Schwächung des Lichts durch Reflexion an der Oberfläche des brechenden Mittels. §. 224–230. Lichtschwächung bei nicht gleichförmig dichten Mitteln, Schwächung des Lichts in der Atmosphäre. §. 231. Berücksichtigung des Umstandes, daſs, auſser der Schwächung im durchsichtigen Mittel, das Licht auch wegen gröſserer Entfernung des leuchtenden Körpers schwächer wird.

Catoptrik. Pag. 216.

§. 232–235. Gesetze der Zurückwerfung des Lichts. §. 236–238. Ableitung dieser Gesetze aus dem Principe der kleinsten Wirkung. §. 239–243. Hypothesen zur Erklärung der Zurückwerfung des Lichts. §. 244. 245. Reflection von einer Ebene. §. 246–248. Bestimmung der Flächen, welche auſser der Ebene die Eigenschaft haben, das von einem Punkte ausgegangene Licht nach einem Punkte zurückzuwerfen. §. 249. 250. Catacaustica. §. 251–255. Aufgaben in Bezug auf die Reflection des Lichts von ebenen Spiegeln. §. 256. Glasspiegel. §. 257. Schwächung des Lichts bei der Reflection. §. 258–261. Vervielfältigte Reflection durch zwei ebene Spiegel. §. 262. 263. Sphärischer Hohlspiegel. §. 264. 265. Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt des Spiegels. §. 266–270. Kleinster Sammlungskreis. §. 271. 272. Brennpunkt und Brennweite des Hohlspiegels. §. 273. Kleinster Sammlungskreis, wenn der leuchtende Punkt im Brennpunkte liegt. §. 274. Formeln für den erhabenen Kugelspiegel. §. 275–277. Ort des Bildes, wenn der leuchtende Punkt nicht in der Axe des Spiegels liegt. §. 278–286. Stärke der durch einen Kugel-

spiegel hervorgebrachten Erleuchtung, wenn das selbstleuchtende Object ein Punkt ist. §. 287 - 294. Ueber Kater's Beobachtung der Schwächung des reflectirten Lichts nach seinem Durchgange durch den Brennpunkt. §. 295 - 302. Stärke der durch einen Kugelspiegel hervorgebrachten Beleuchtnng, wenn das selbstleuchtends Object eine Fläche ist. §. 303. Brennspiegel. §. 304 - 307. Scheinbare Helligkeit des Bildes. §. 308 - 320. Kegelförmige und cylindrische Spiegel, anamorphotische Zeichnungen.

Dioptrik. **Pag. 309.**

§. 321 - 326. Gesetze der Brechung des Lichts. §. 327 - 334. Ableitung dieser Gesetze nach dem Emanationssysteme. §. 335. 336. Ableitung derselben nach dem Vibrationssysteme. §. 337. 338. Ableitung aus dem Principe der kleinsten Wirkung. §. 339. Bestimmung des Ortes des Bildes eines lenchtenden Punkts der in einem brechenden Mittel von ebener Oberfläche liegt. §. 340. Diacaustica. §. 341. 342. Brechung des Lichts, wenn die Grenzflächen des durchsichtigen Mittels parallele Ebenen sind. §. 343. Reflection von belegten Glasspiegeln mit Berücksichtigung der Brechung. §. 344 - 348. Brechung, wenn der Lichtstrahl das durchsichtige Mittel an einer krummen Fläche trifft. §. 349. 350. Bestimmung derjenigen brechenden Curve, welche alle gebrochenen Strahlen in Einem Punkte vereinigt. §. 351. Brechungscoëfficient beim Uebergange aus einem brechenden Mittel in ein anderes. §. 352. Einfluſs der Temperatur auf die Brechungskraft der Mittel. §. 353. Brechung eines Strahls der durch mehrere durch parallele Ebenen begrenzte Mittel geht. §. 354 - 364. Brechuug des Lichts in Prismen. §. 365 - 367. Bestimmung des Brechungsverhältnisses der Flüssigkeiten durch Prismen. §. 368 - 371. Reflection von belegten sphärischen Glasspiegeln.

Brechung des Lichts in Glaslinsen. Pag. 366.

§. 372. 373. Verschiedene Arten von Glaslinsen. §. 874 - 389. Brechung des von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehenden Lichts in einer biconvexen Linse. §. 390 - 392. Brennweite der übrigen Glaslinsen. §. 393 - 402. Brechung der Lichtstrahlen die nicht von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehen. §. 403 - 409. Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls, der durch mehrere Glaslinsen geht. §. 410 - 416. Ueber das Sehen durch Glaslinsen, Vergröſserung, Brillen. §. 417. 418. Entfernung des letz-

ten Glases, wenn das Auge durch eine Verbindung von mehreren Glaslinsen deutlich sehen soll. §. 419 – 423. Helligkeit der Bilder. §. 424. Die bisherigen allgemeinen Formeln sind nur als Näherungsformeln zu betrachten.

Von der Farbenzerstreuung. . . Pag. 418.

§. 425 – 427. Farbenzerstreuung in einem Prisma. §. 428 – 433. Erklärung der Farbenzerstreuung nach dem Emanations- und Vibrationssysteme. §. 434 – 441. Achromatisches Prisma. §. 442. Zerstreuungsverhältnifs. §. 443 – 457. Theorie des Regenbogens.

Von den achromatischen Glaslinsen. Pag. 444.

§. 458 – 460. Abweichung der Strahlen wegen der Farbenzerstreuung bei einer Linse. §. 461. 462. Abweichung bei mehreren Linsen. §. 463 – 470. Aufhebung der Abweichung wegen der Farbenzerstreuung, achromatische Glaslinse. §. 471. 472. Maafs der Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung.

Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt. Pag. 465.

§. 473 – 483. Abweichung wegen der Kugelgestalt bei einer Linse. §. 484 – 487. Abweichung beim Durchgange durch mehrere Glaslinsen. §. 488 – 508. Aufhebung dieser Abweichung. Vollständige Berechnung eines achromatischen, aplanatischen Objectivs. §. 509 – 515. Bestimmung des zweckmäfsigsten Punkts für den die Abweichung wegen der Kugelgestalt aufgehoben werden mufs.

Von den Fernröhren. . . . Pag. 522.

§. 516 – 518. Fernrohr aus zwei Glaslinsen. §. 519 – 522. Galiläisches Fernrohr; Vergröfserung, Gesichtsfeld, Undeutlichkeit der durch dasselbe hervorgebrachten Bilder. §. 523 – 530. Kepplersches Fernrohr, Gesichtsfeld, Vergröfserung, Helligkeit der Bilder. Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung. §. 531 – 538. Collectivglas. §. 539 – 544. Farbenzerstreuung die durch das Ocular hervorgebracht wird. §. 545 – 547. Anwendung mehrerer Oculare. §. 548 – 549. Terrestrisches Fernrohr.

Von den Spiegeltelescopen. . . Pag. 556.

§. 550. Zweck und Einrichtung der Spiegelteleskope. §. 551. Bestimmung der Entfernung des Punktes, in wel-

chem die von einem Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen die Axe schneiden, von der Mitte desselben. §. 552–555. Reflection von einem Hohlspiegel auf einen andern. §. 556. 557. Verschiedene Arten der Spiegeltelescope.

Von den Mikroskopen. . . Pag. 563.

§. 558–561. Zweck der Mikroskope, Loupen, Vergröſserung derselben. §. 562–565. Abweichung wegen der Kugelgestalt. §. 566. 567. Helligkeit der durch eine Loupe gesehenen Objecte. §. 568–570. Achromatische Loupe. §. 571–573. Zusammengesetztes Mikroskop.

Von der Bewegung des Lichts in der Atmosphäre. Pag. 577.

§. 574–586. Bahn eines Lichtstrahls der durch ein durchsichtiges Mittel geht, welches aus unendlich dünnen Schichten von ungleicher Dichtigkeit, die durch parallele Ebenen getrennt sind, geht. Terrestrische Strahlenbrechung. §. 587–590. Strahlenbrechung, wenn das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft ein anderes als das in den vorigen Paragraphen angenommene ist. §. 591–594. Doppelte, durch terrestrische Refraction hervorgerufene Bilder, Luftspiegelung. §. 595–606. Astronomische Strahlenbrechung. §. 607–611. Schwächung des Lichts beim Durchgange durch die Atmosphäre.

Von den Höfen und Nebensonnen. Pag. 611.

§. 612. Verschiedene Arten von Höfen. §. 613–620. Theorie der Höfe gröſserer Art. §. 621. 622. Inflexion des Lichts. §. 623. 624. Theorie der Höfe kleinerer Art. §. 625–627. Verticale Nebensonnen. §. 628–630. Horizontale Nebensonnen.

Vom Licht im Allgemeinen.

§. 1.

Die uns umgebenden Gegenstände bringen zu manchen Zeiten eine Empfindung in unserm Auge hervor, durch welche wir von ihrem Daseyn in Kenntnifs gesetzt werden, während zu andern Zeiten, obgleich das Auge gegen die äufsern Gegenstände dieselbe Lage besitzt, dieser Eindruck mangelt. Im erstern Fall sagen wir, die Gegenstände seyen sichtbar, im letztern unsichtbar, und diese beiden Zustände werden durch die Ausdrücke Helligkeit und Finsternifs unterschieden. Aufser dem Auge und den äufsern Gegenständen mufs daher noch ein Drittes vorhanden seyn, welches die Verbindung zwischen dem Auge und den gesehenen Gegenständen hervorbringt, indem das Daseyn desselben die Helligkeit, die Abwesenheit hingegen die Finsternifs bedingt, und dieses Dritte ist es, was wir Licht nennen.

Die Körper, welche Eindrücke in unserm Auge hervorbringen können, theilt man in dieser Rücksicht in selbstleuchtende und dunkle; die ersten sind an sich sichtbar und können als die Quellen des Lichts betrachtet werden, wie z. B. die Sonne, die Fixsterne, die Flamme angezündeter Körper; die letztern hingegen erfordern zu ihrer Sichtbarkeit die Gegenwart eines selbstleuchtenden Körpers, der eine genugsame Helligkeit hervorzubringen im Stande ist. Dafs sich manche dunkle Körper in selbstleuchtende verwandeln können,

ist eine bekannte Thatsache; vegetabilische und animalische Substanzen fangen an, zu leuchten, sobald sie in Fäulniſs gerathen; eben so zeigen mehrere Körper, wenn sie gerieben, gedrückt oder geschlagen werden, Lichterscheinungen; andere Körper, die sogenannten Lichtsauger, leuchten im Dunkeln, wenn sie vorher dem Sonnenlicht ausgesetzt waren.

§. 2.

Man hat sich von jeher mit der Auflösung der Frage beschäftigt, auf welche Weise das Licht die Verbindung zwischen dem Auge und dem gesehenen Gegenstand hervorbringe, und was es seiner Natur nach sey, allein trotz aller Bemühungen und Beobachtungen über die Eigenschaften des Lichts, ist die Auflösung dieser Frage noch sehr im Dunkeln. Wir werden hier blos ganz kurz die Hauptmeinungen über die Natur des Lichts anführen, welches um so eher angeht, da alle Untersuchungen über das Licht, die im vorliegenden Werk angestellt werden, sich ohne irgend eine Hypothese, weder über die Art der Verbindung zwischen dem Auge und dem gesehenen Gegenstand, noch über die Natur des Lichts, ausführen lassen.

§. 3.

Bei den Alten glaubten Mehrere, das Sehen geschähe durch eine Art von Ausfluſs aus dem Auge nach dem gesehenen Gegenstande hin; in diesem Fall wäre also die Sichtbarkeit der Körper blos von dem Zustande unsers Auges abhängig, und man könnte sich dann recht gut die Möglichkeit denken, daſs wir auch im Finstern sehen könnten, und daſs uns im Gegentheil zuweilen der hellste Sonnenschein unsichtbar wäre, wenn sich das Auge gerade nicht in dem Zustande befände, in welchem ein Ausfluſs aus demselben nach den Gegenständen hin vorhanden wäre; Descartes war der Meinung, es sey eine feine Materie im ganzen Weltraum verbreitet, die von dem leuchtenden Körper gestoſsen wird, und auf

diese Weise dem Auge einen Eindruck mittheilt. Da sich Descartes hierbei die Fortpflanzung des Lichts als augenblicklich dachte, so dafs, wenn das entfernteste Theilchen einen Stofs erhielt, derselbe sich sogleich bei allen übrigen äufserte, so mufste diese Hypothese fallen, sobald die Erfahrung lehrte, dafs das Licht zu seiner Fortpflanzung eine dem zu durchlaufenden Raum proportionale Zeit anwendet. Huygens nahm ebenfalls eine im ganzen Weltraum verbreitete Materie von grofser Feinheit an, die sich aber von der des Descartes darin unterschied, dafs sie die Eigenschaft der Elasticität besitzen sollte. Er nannte dieselbe Aether, und legte aufserdem diesem Aether eine Eigenschaft bei, vermöge welcher die leuchtenden Körper denselben in eine zitternde Bewegung zu versetzen im Stande sind, welche Schwingungen der Aethertheilchen sich dann bis in das Auge fortpflanzen, und in demselben die Empfindung des Sehens hervorbringen. Diese Hypothese wurde auch von Euler angenommen, und weiter bearbeitet, und ist unter dem Namen der Vibrationstheorie oder der Undulationstheorie bekannt. Durch dieselbe erklären sich im Allgemeinen die Erscheinungen des Lichts auf eine ähnliche Weise, wie die Erscheinungen des Schalles. Bei der Entstehung des Schalles wird ebenfalls eine elastische Materie erfordert, die zu seiner Fortpflanzung dient (gewöhnlich die Luft), und die in derselben hervorgebrachte zitternde Bewegung nach und nach in unser Ohr bringt, woselbst sie auf den Gehörnerven wirkt.

Aus den Angaben, welche Newton in seinen optischen Schriften darstellte, sieht man, dafs er die Idee des sogenannten Emanationssystems hatte. Bei dieser Hypothese wird das Licht als eine aus dem leuchtenden Körper nach allen Seiten gradlinig fortgehende Materie angenommen, die in unserm Auge durch einen Stofs die Empfindung des Sehens hervorbringt. Zwischen diesen beiden letzten Hypothesen sind

die Meinungen der Physiker jetzt getheilt, und wir übergehen die aufser diesen beiden noch von Andern aufgestellten Meinungen über die Natur des Lichts, als zu unserm Zweck nicht gehörig, so wie nicht minder die verschiedenen Einwürfe, welche die Anhänger des Undulationssystems und die des Emanationssystems einander gegenseitig gemacht haben.

§. 4.

Man theilt die dunkeln Körper in zwei Klassen, die sich durch die Beziehungen bestimmen, welche sie zum Licht haben, in durchsichtige und undurchsichtige. Durchsichtig heifst ein Körper, wenn er das von einem Gegenstande zum Auge fliefsende Licht durch seine Dazwischenkunft nicht aufhält, sondern es wenigstens zum Theil durchläfst, wie z. B. Glas, Wasser, Luft u. s. w.; undurchsichtig wird ein Körper dann genannt, wenn er dem Auge durch sein Dazwischentreten den Anblick eines andern Gegenstandes entzieht. Wenn ein Körper alles Licht durchliefse, so würde man ihm eine vollkommene Durchsichtigkeit beilegen müssen; solche vollkommen durchsichtige Körper giebt es aber in der Natur nicht, so weit wir dieselben bis jetzt kennen, wenigstens würden wir uns von ihrem Daseyn blofs durch das Gefühl überzeugen können, da das Auge, indem der Körper eben wegen seiner vollkommenen Durchsichtigkeit alles Licht durchgehen läfst, keinen Eindruck von demselben erhalten könnte, und zum Sehen eines Gegenstandes durchaus erforderlich ist, dafs von ihm Licht zurückgeworfen werde. Es scheint zwar Anfangs, als ob die Luft vollkommen durchsichtig wäre, allein wenn man einen weit entfernten irdischen Gegenstand betrachtet, der in der Nähe sehr hellglänzend ist, so bemerkt man sogleich, dafs er in der Entfernung bei weitem nicht mit dem Glanz erscheint, als in der Nähe, welches blofs daher kommt, dafs das Licht auf seinem Wege durch die Atmosphäre nicht völlig

durchgelassen wird. Dasselbe bemerkt man auch an den Himmelskörpern, wenn sich dieselben nahe am Horizont befinden, denn in dieser Stellung müssen die von ihnen ausströmenden Lichtstrahlen einen viel gröſsern Weg in der Atmosphäre zurücklegen, als wenn diese Körper in einer bedeutenden Höhe über dem Horizont stehen. Obgleich nun freilich diese Verminderung der Lichtstärke, bei einem sehr kurzen Weg in der Luft, unmerklich ist, so muſs man doch aus einer Verminderung in groſsen Luftmassen auf eine proportionale Verminderung auch in kleinen Luftmassen schlieſsen, also ist die Luft kein vollkommen durchsichtiger Körper. Viele Körper, die bei gewöhnlicher Dicke undurchsichtig sind, können durchsichtig werden, wenn man sie zu dünnen Blättchen macht, oder auch mit andern Materien in Berührung setzt, wie z. B. sehr dünne Goldblättchen, oder in Oel getauchtes Papier; nur bei denjenigen Metallen, die eine weiſse Farbe haben, hat es noch nicht gelingen wollen, so dünn auch die aus ihnen geschlagenen Blättchen waren, sie zum Durchlassen des Lichts zu bringen.

§. 5.

Die erste Untersuchung, welche wir zu machen haben, besteht darin, daſs wir bestimmen, nach welcher Richtung das Licht vom leuchtenden Gegenstande aus auf das Auge wirkt. Es ist eine bekannte Erfahrung, daſs, wenn ein undurchsichtiger Körper zwischen dem Auge und dem Gegenstand sich so befindet, daſs die grade Linie, welche das Auge mit dem zu sehenden Gegenstande verbindet, durch den dazwischenliegenden Körper geht, dieser Gegenstand verdeckt und dem Auge unsichtbar wird. Das Licht kann also vom Object nicht in das Auge gelangen, indem es von dem undurchsichtigen Körper auf seinem Wege aufgefangen wird, und da der Erfahrung zufolge das Auge mit den beiden andern Körpern in grader Linie liegen muſs, wenn

dieses Verdecken Statt findet, so schliefsen wir hieraus, dafs das Licht seine Einwirkung auf das Auge in der Richtung der graden Linie ausübt, welche den gesehenen Punkt mit dem Auge verbindet. Die grade Linie selbst, welche diese Richtung darstellt, heifst ein Lichtstrahl.

§. 6.

Die erwähnte Eigenschaft des Lichts, nach gradliniger Richtung zu wirken, findet Statt, der Körper mag selbstleuchtend oder dunkel und von einem andern erleuchtet seyn, nur mufs man dabei voraussetzen, dafs das Licht auf seinem Wege durch keinen durchsichtigen Körper hindurchgehe, denn in diesem Fall weicht es von der graden Linie ab, und beschreibt entweder grade gebrochene, oder continuirlich krumme Linien, je nachdem die Dichtigkeit des im Wege stehenden Körpers gleichförmig, oder nach dem Gesetze der Stetigkeit ungleichförmig ist.

§. 7.

Es ist übrigens ganz gleichgültig, ob man bei dem aus der Erfahrung gefundenen Satze der gradlinigen Fortpflanzung des Lichts ein wirkliches Ausströmen desselben, aus dem leuchtenden oder erleuchteten Körper, dem Emanationssystem zufolge annimmt, oder nach dem Vibrationssystem voraussetzt, der Aether werde durch den leuchtenden Körper in eine zitternde Bewegung versetzt, und dadurch dem Auge die Empfindung des Sehens mitgetheilt; aus beiden Hypothesen wird immer das Gesetz einer gradlinigen Fortpflanzung des Lichts gefunden werden, denn bei dem Emanationssystem werden die Lichttheilchen einzeln von dem leuchtenden Punkt fortgestofsen, müssen also in der einmal erhaltenen Richtung immer fortgehen, so lange sie nicht durch andere Hindernisse aufgehalten werden, indem ihnen theils durchsichtige, theils undurchsichtige Körper in den Weg treten. Bei der Annahme des Undulations-

systems breiten sich die Wellen oder Schwingungen des Aethers, die durch die Einwirkung des leuchtenden Körpers in demselben hervorgebracht werden, so aus, daſs dieselben auf den Radien einer Kugel, deren Mittelpunkt der leuchtende Körper ist, fortlaufen, und auf diese Weise natürlich auch in grader Linie wirken müssen.

§. 8.

Die Erfahrung zeigt ferner, daſs ein leuchtender Punkt, in so fern er nicht durch einen andern Körper verdeckt wird, von jedem beliebigen Standpunkt des Auges aus sichtbar ist, und hieraus folgt unmittelbar, daſs das Licht von einem Punkt aus nach allen Seiten hin ströme, und man kann einen solchen leuchtenden Punkt als den Mittelpunkt einer Kugel von unbegrenzter Ausdehnung ansehen, deren Radien durch die von selbigem ausgehenden Lichtstrahlen gebildet werden.

§. 9.

Alle Beobachtungen, welche man zur Auffindung und Bestätigung des Satzes der gradlinigen Fortpflanzung des Lichts angestellt hat, konnten an keinem andern Orte als an der Oberfläche der Erde geschehen; da nun die ganze Oberfläche der Erde mit einer dünnen elastischen und durchsichtigen Flüssigkeit, der Atmosphäre, bedeckt ist, so muſste sich das Auge bei allen Beobachtungen innerhalb dieses durchsichtigen Mittels befinden. Wählt man nun ein irdisches Object, das sich gleichfalls in der Atmosphäre befindet, zur Bestätigung obiger Erfahrung, so liegt der ganze Weg, den das Licht vom strahlenden Punkt zum Auge durchläuft, innerhalb eines durchsichtigen Mittels, und obiger Satz, der die Fortpflanzung des Lichts in grader Linie ausspricht, müſste eigentlich auf den Fall beschränkt werden, wenn das Licht sich in der Atmosphäre bewegt. Man würde also eigentlich nicht zu der Behauptung berechtigt seyn, daſs die Fortpflanzung des Lichts

auch im leeren Raum nach grader Linie geschähe, wie doch bei den Beobachtungen der Himmelskörper, deren Licht, ehe es zur Erdatmosphäre gelangt, den leeren Raum durchläuft, vorausgesetzt wird. Man muſs aber wohl bemerken, daſs das Licht während seiner Fortpflanzung von einem irdischen Object zum Auge insgemein Luft von gleichförmiger Dichtigkeit durchläuft, und überhaupt, wie in der Dioptrik gezeigt werden wird, findet die Erscheinung Statt, daſs ein Lichttheilchen, so lange es sich in einem und demselben durchsichtigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, seine gradlinige Bewegung beibehält, und erst dann von dieser Richtung abgelenkt wird, wenn es in ein Mittel von anderer Dichtigkeit tritt. Da nun, so lange das Lichttheilchen sich im leeren Raume bewegt, keine Ursache vorhanden ist, aus welcher es seine einmal erhaltene gradlinige Bewegung verlassen sollte, so wird es dieselbe beibehalten müssen, und dies wird auch durch die Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Resultate der Verfinsterung und der Bedeckung der Himmelskörper bestätigt.

§. 10.

Die Feinheit der Lichttheilchen, aus denen die Lichtstrahlen bestehen, ergiebt sich aus der Beobachtung, daſs unendlich viel Lichtstrahlen einander durchschneiden können, ohne daſs dadurch ein Hinderniſs in ihrer anfänglichen Bewegung hervorgebracht wird. Bringt man z. B. in einem Stück Papier vermittelst eines Nadelstichs eine feine Oeffnung an, so kann man durch dieselbe, wenn das Papier dem Auge nur nahe genug gebracht wird, eine ganze Gegend übersehen, ohne daſs die Gegenstände verwirrt erscheinen. Diese Deutlichkeit könnte nicht bestehen, wenn die Lichttheilchen nicht so fein wären, daſs sie trotz ihrer Menge, da von allen Punkten der gesehenen Gegenstände Licht ausflieſsen

mufs, einander bei ihrem Durchgang durch die kleine Oeffnung nicht hinderlich fallen, sondern immer ihre anfängliche gradlinige Richtung bis in das Auge fortsetzen.

§. 11.

Da im Vorigen die Erfahrung aufgestellt ist, dafs das Licht sich von einem leuchtenden Punkt nach allen Seiten hin ausbreite, so wird es möglich seyn, einen Theil dieser Lichtstrahlen in beliebiger Entfernung vom leuchtenden Punkte durch eine Ebene oder auch krumme Fläche aufzufangen, und die Strahlen, welche auf die Grenze dieser auffangenden Fläche fallen, bilden eine pyramidalische oder kegelförmige Oberfläche, je nachdem die Grenzen der besagten Fläche eine gebrochene Linie oder eine krumme Linie bilden. Man mufs bemerken, dafs der Ausdruck Kegeloberfläche hier in einem viel weiter ausgedehnten Sinne genommen werden mufs, als es gewöhnlich in der Stereometrie geschieht. Eine Kegeloberfläche mufs man nämlich im Allgemeinen dadurch entstanden ansehn, dafs eine grade Linie, welche in einem ihrer Punkte festgehalten wird, sich im Raume bewegt, und man kann, um diese Bewegung einem gewissen Gesetze zu unterwerfen, eine willkürliche Curve im Raume sich vorstellen, durch welche die grade Linie, während sie in einem ihrer Punkte als fest gedacht wird, hindurchgeht. Der gewöhnliche Apollonische Kegel würde dann dadurch entstehen, dafs die grade Linie sich auf der Peripherie eines Kreises bewegt, während der feste Punkt eine solche Lage hat, dafs die Linie, welche ihn mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet, senkrecht auf der Ebene des Kreises steht.

§. 12.

Alle Lichtstrahlen, welche innerhalb der im vorigen §. angegebenen Grenze fallen, bilden eine Strahlenpyramide oder einen Strahlenkegel, deren Basis durch die auffangende Fläche, und deren Spitze vom

strahlenden Punkt gebildet wird. Ist dieser Punkt von der auffangenden Fläche so weit entfernt, daſs die Divergenz der Strahlen innerhalb der Grenzen der besagten Strahlenpyramide oder des Strahlenkegels sehr gering ist, so nimmt man gewöhnlich an, die Strahlen seyen einander parallel, und man erhält ein Strahlenprisma oder einen Strahlencylinder. Die Annahme des Parallelismus der von einem sehr weit entfernten Punkt ausgehenden Lichtstrahlen findet vorzüglich dann Statt, wenn man Untersuchungen über die Wirkungen der Fernröhre und der Telescope anstellt, da hierdurch die Formeln sehr vereinfacht werden, und diese Annahme bei diesen Werkzeugen immer ohne merklichen Fehler zulässig ist, indem sie nur zur Betrachtung solcher Körper angewendet werden, deren Entfernung so groſs ist, daſs die Dimensionen der auffangenden Flächen, welches hier die Spiegel und Glaslinsen sind, gegen dieselbe als unendlich klein angesehen werden können.

§. 13.

Verschlieſst man in einem Zimmer alle Oeffnungen, durch welche Licht in dasselbe fallen kann, und läſst blos an der Seite des Zimmers, wo sich auſserhalb Gegenstände befinden, die, des besseren Erfolges wegen, stark von der Sonne erleuchtet werden, eine ganz kleine Oeffnung, so wird durch diese von jedem Punkt der auſserhalb befindlichen Objecte Licht in das Zimmer fallen. Bringt man nun nahe an diese Oeffnung eine weiſse Fläche, etwa einen Bogen Papier, so zeigen sich auf derselben Bilder von allen Gegenständen, deren Oberflächen durch die Oeffnung Licht auf die weiſsen Flächen werfen können.

Diese Bilder zeigen genau dieselben Farben, welche die Gegenstände selbst haben, nur befinden sie sich, gegen die Objecte genommen, in einer verkehrten Stellung. Sie erscheinen desto deutlicher, je näher die

weiſse Tafel der Oeffnung gehalten wird, aber zugleich um so kleiner. Entfernt man die weiſse Tafel von der Oeffnung, so nimmt die Gröſse der Bilder zwar zu, aber ihre scharfe Begrenzung nimmt ab. Je gröſser die Oeffnung ist, durch welche man die Lichtstrahlen in das verdunkelte Zimmer fallen läſst, desto verwaschener zeigen sich die Bilder, bis endlich, wenn die Oeffnung sehr groſs wird, sich blos ein weiſslichtes Bild ohne Abwechselung von Farben zeigt. So bildet sich in Zimmern an derjenigen Wand, die den Fenstern gegenübersteht, immer eine gröſsere Helligkeit, welche nichts anderes ist, als ein verworrenes Bild der Gegenstände, die auſserhalb des Zimmers ihr Licht durch die Fenster werfen.

§. 14.

Die im vorigen §. auseinandergesetzten Beobachtungen lassen sich leicht folgendermaſsen erklären, wenn man annimmt, daſs jeder Lichtstrahl das Bild des Punktes, von welchem er ausgeht, mit sich führt; dann wird einleuchtend, daſs, sobald man diesen Lichtstrahl auf eine weiſse Tafel fallen läſst, auf derselben dem Auge ein Bild oder eine Farbe, die der Lichtstrahl selbst hat, erscheinen muſs. Die Tafel, welche man zu diesem Versuche wählt, muſs deswegen weiſs seyn, damit die eigene Farbe der Tafel sich nicht mit der des auffallenden Lichtstrahls vermische.

§. 15.

Es sey *ABCD* (Fig. 1.) irgend eins der Objecte, dessen Form wir hier, der Deutlichkeit wegen, als ein Parallelogramm annehmen, *MN* die Wand, in welcher sich die Oeffnung *G* befindet, die wir als einen Punkt betrachten. Da ein jeder Punkt der Fläche *ABCD* Strahlen nach allen Richtungen ausschickt, so wird einer derselben eine solche Richtung besitzen, daſs er durch die Oeffnung *G* geht; es werden daher von allen Punkten der Fläche *ABCD* Strahlen durch die Oeff-

nung in das verdunkelte Zimmer fallen, und alle diese Lichtstrahlen werden in dem pyramidalischen Raum *ABCDG* eingeschlossen seyn.

Verlängert man die Seitenlinien *AG, BG, CG, DG* dieser Pyramide willkürlich nach α, β, γ, δ, so bildet sich hinter der Wand eine zweite Strahlenpyramide, die mit der erstern ganz identisch ist. Gesetzt nun, man bringt die besagte weiſse Tafel durch die Strahlenpyramide in eine solche Stellung, daſs sie dieselbe in der Ebene *abcd* durchschneidet, so wird dieser Durchschnitt das Bild des Gegenstandes *ABCD* seyn, und ihm völlig ähnlich werden, wenn die Tafel in *abcd* mit dem Gegenstande *ABCD* parallel gehalten wird.

§. 16.

Entfernt man die Tafel weiter von der Oeffnung *G*, so daſs ein neuer Durchschnitt der Strahlenpyramide entsteht, den wir durch $a'b'c'd'$ bezeichnen, so wird sich ein neues Bild zeigen, das, wie sich aus der Geometrie ergiebt, gröſser seyn muſs, als das erste *abcd*. Da nun aber in beiden Fällen einerlei Lichtmenge auf das Bild verwendet wird, so ist einleuchtend, daſs bei dem gröſsern Bilde das Licht sich mehr zertheilt, und eine schwächere Färbung entstehen muſs, als bei dem kleinen, wo das Licht sich mehr concentrirt erhält. Auf diese Art würde im Allgemeinen erklärt seyn, warum bei zunehmender Entfernung der Tafel von der Oeffnung die Helligkeit des Bildes abnimmt.

§. 17.

Man kann sehr leicht das Verhältniſs finden, in welchem die Helligkeit des Bildes zu der Entfernung desselben von der Oeffnung steht. Es seyen H und H' die Helligkeiten der Bilder *abcd*, $a'b'c'd'$, deren Flächenräume wir durch F und F' bezeichnen wollen. Da beide Bilder gleiche Lichtmenge erhalten, so müssen die Helligkeiten derselben sich umgekehrt wie ihre Flä-

chenräume verhalten, folglich hat man

$$H : H' = F' : F.$$

Da ferner die Figuren des Bildes als Parallelogramme angenommen sind, so wird

$$F = cb \,.\, cd, \quad F' = c'b' \,.\, c'd';$$

also auch, wenn man diese Werthe von F und F' in voriger Proportion substituirt,

$$H' : H = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'.$$

Nun ist aber, wie man aus den in der Figur vorhandenen ähnlichen Dreiecken leicht sieht,

$$Gc : Gc' = cb : c'b'$$
$$Gc : Gc' = cd : c'd'$$

$$Gc^2 : Gc'^2 = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'$$
$$H' : H = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'$$

$$Gc^2 : Gc'^2 = H' : H.$$

Man fälle von der Spitze G der Pyramide ein Perpendikel Gm auf die erste Lage der Tafel, so wird dasselbe auch die zweite Lage in m' senkrecht treffen. Setzt man

$$Gm = e, \quad Gm' = e',$$

so wird

$$Gc : Gc' = e : e';$$

folglich hat man auch

$$ee : e'e' = H' : H,$$

und aus dieser Proportion sieht man, daſs die Helligkeiten dieser Bilder sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Oeffnung verhalten.

§. 18.

Es bleibt noch zu erklären übrig, warum bei gröſsern Oeffnungen die Bilder sich so undeutlich zeigen, und zuletzt völlig verschwinden. Zu diesem Zweck sey MN (Fig. 2.) die Mauer, HG die Oeffnung, welche wir jetzt nicht mehr als einen bloſsen Punkt betrachten dürfen, sondern welcher wir eine endliche Ausdehnung beilegen müssen. L und L' seyen zwei beliebige, einander nahe liegende Punkte eines Gegenstandes, der gegen die

Oeffnung eine solche Lage hat, daſs er Licht in das verdunkelte Zimmer werfen kann. *AB* sey die hinter der Oeffnung aufgestellte weiſse Tafel, der wir eine mit der Mauer *MN* parallele Lage geben. Bei der frühern Erklärung nahmen wir an, daſs von jedem Punkte des Gegenstandes nur ein einziger Lichtstrahl durch die Oeffnung geht, welche Annahme aber eine bloſse Näherung und nur in so fern zulässig ist, als die Oeffnung als unendlich klein betrachtet wird. In der Wirklichkeit wird immer ein Strahlenkegel oder eine Strahlenpyramide durch die Oeffnung gehen, da das Licht von jedem Punkt nach allen Seiten ausströmt.

§. 19.

Es sey daher *aLb* der Strahlenkegel, welchen der Punkt *L* und *a′L′b′* der Strahlenkegel, welchen der Punkt *L′* auf die Tafel wirft. Man sieht, daſs in dem Raume *ab′* die Strahlen von beiden Punkten sich vermischen. So lange die Punkte *L* und *L′* Licht von einerlei Farbe ausströmen, wird durch diese Vermischung keine Farbenänderung des Bildes entstehen; allein sobald beide Punkte verschiedene Farben zeigen, muſs die Vereinigung zweier verschiedenen Arten von Lichtstrahlen eine dritte Farbe hervorbringen, die aus beiden zusammengesetzt ist. Dies findet nun vorzüglich an den Grenzen der verschiedenen Objecte Statt, und deswegen müssen sich die Grenzen ihrer Bilder mit verwaschenen unbestimmten Farben zeigen. Wird nun die Oeffnung *HG* so groſs, daſs die von ganz verschiedenen Objecten herkommenden Strahlenkegel auf einander fallen können, so ist es natürlich, daſs ein Gemisch von allen Arten von Farben entsteht, welches wie in der Dioptrik gezeigt werden wird, immer eine weiſslichte Farbe hervorbringt.

§. 20.

Aus dieser Darstellung sieht man, daſs, genau genommen, das Bild, welches hinter einer Oeffnung in

einem verdunkelten Zimmer entsteht, nie ganz rein seyn kann, da jeder Punkt des Gegenstandes, vermöge des Strahlenkegels, welchen er durch die Oeffnung schickt, sich als eine ausgedehnte Figur auf der weifsen Tafel darstellt. Man kann aber diesen Uebelstand dadurch vermeiden, dafs man in der Oeffnung ein Linsenglas aufstellt, welches die Eigenschaft hat, alle von einem Punkt herkommende Strahlen wieder in einen Punkt zu vereinigen.

§. 21.

Die in den vorigen §§. dargestellten Beobachtungen, und die aus denselben abgeleiteten Sätze, nämlich:

1. Dafs das Licht sich in grader Linie fortpflanzt, so lange es sich im leeren Raume oder in einem durchsichtigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt.
2. Dafs das Licht von einem Punkt nach allen Seiten hin ausströmt.
3. Dafs unendlich viel Lichtstrahlen ohne Störung ihrer Bewegung sich durchkreuzen können.
4. Dafs jeder Lichtstrahl ein Bild desjenigen Punktes giebt, von welchem er herkommt,

machen die Grundlage der Optik im engern Sinne aus, in welcher man blos die Erscheinungen des Lichts untersucht, die ohne eine Zurückwerfung oder Brechung der Lichtstrahlen Statt finden. Da diese Sätze vermittelst ganz einfacher Betrachtungen ohne Hinzuziehung irgend einer Hypothese entwickelt wurden, so kann ihre Wahrheit nicht bezweifelt werden.

Man dürfte zwar durch den oftmaligen Gebrauch des Ausdrucks: Ausströmen des Lichts auf den Gedanken kommen, als ob die Idee des Emanationssystems sich bei diesen Erklärungen einmischte, allein dieser Ausdruck ist blofs eine Abkürzung, und soll nichts weiter bedeuten, als eine Verbindung des gesehenen Punktes mit dem Auge vermittelst

des **Lichts**, es mag nun diese Verbindung durch wirkliches Ausströmen des Lichts, oder durch eine zitternde Bewegung des Aethers, oder auf irgend eine andere Art geschehen.

§. 22.

Bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Punkts der Oberfläche eines leuchtenden Körpers durch ξ, η, ζ, welche auf beliebige drei im Raume sich rechtwinklig durchschneidende Coordinatenaxen bezogen sind, die Coordinaten irgend eines Punktes in der Peripherie der auffangenden Fläche, oder der in einer unbegrenzten Oberfläche angebrachten Oeffnung durch α, β, γ auf dieselben Axen bezogen, endlich die Coordinaten jedes beliebigen Punktes der graden Linie, die durch diese beiden gegebenen Punkte geht, durch x, y, z, so sind bekanntlich die Gleichungen dieser graden Linie

$$y - \eta = \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}(x - \xi);$$

$$z - \zeta = \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}(x - \xi);$$

welche zugleich die Gleichungen desjenigen Lichtstrahls darstellen, der durch die besagten beiden Punkte geht.

§. 23.

Die Grenzen einer auffangenden Fläche oder einer Oeffnung bilden im Allgemeinen eine Linie doppelter Krümmung, und wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, wird die Natur einer solchen Curve immer durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten derselben dargestellt. Man hat also, da wir die Coordinaten der auf der Grenze der Oeffnung gelegenen Punkte durch α, β, γ bezeichnet haben, im vorliegenden Fall zwei Gleichungen zwischen α, β, γ, die wir durch

$$\gamma = f\alpha, \; \beta = \varphi\alpha,$$

darstellen wollen, wo f und φ, zwei willkürliche Functionszeichen angeben, deren Natur in jedem besondern

Fall durch die Beschaffenheit der die Oeffnung begrenzenden Curve gegeben ist.

§. 24.

Eliminiren wir aus den vier Gleichungen

$$1)\ y - \eta = \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}(x - \xi),$$

$$2)\ z - \zeta = \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}(x - \xi),$$

$$3)\ \gamma = f\alpha, \quad 4)\ \beta = \varphi\alpha$$

die drei Gröſsen α, β, γ, so erhalten wir eine Gleichung zwischen den veränderlichen Coordinaten x, y, z und den bestimmten ξ, η, ζ; und diese Gleichung wird nothwendigerweise die einer Oberfläche seyn, da sie nur Eine Relation zwischen den Coordinaten x, y, z darbietet.

Aus der analytischen Bildung der Gleichung dieser Oberfläche sieht man, daſs auf derselben alle grade Linien liegen müssen, die durch den festen Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, und durch jeden beliebigen Punkt in der Grenze der Oeffnung gezogen werden können. Sie ist also die Gleichung einer Kegeloberfläche, und im optischen Sinne die Gleichung der Oberfläche des Strahlenkegels, der von dem leuchtenden Punkt durch die gegebene Oeffnung strömt.

§. 25.

Um die allgemeine Gleichung dieser Kegelfläche darzustellen, hat man aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha} = \frac{y - \eta}{x - \xi},$$

$$\frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha} = \frac{z - \zeta}{x - \xi}.$$

Nun sind aber β und γ Functionen von α; ξ, η, ζ hingegen constante Gröſsen; die Brüche

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}, \quad \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}$$

werden daher ebenfalls als Functionen von α zu betrachten seyn, d. h. der eine Bruch ist eine Function des andern. Es wird daher

$$\frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha} = \psi\left(\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}\right),$$

wo ψ irgend ein Functionszeichen bedeutet. Setzt man hierin statt

$$\frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}, \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}$$

ihre angegebenen Werthe

$$\frac{z - \zeta}{x - \xi}, \frac{y - \eta}{x - \xi},$$

so erhält man die verlangte Gleichung der Kegeloberfläche

$$\frac{z - \zeta}{x - \xi} = \psi\left(\frac{y - \eta}{x - \xi}\right).$$

§. 26.

Nimmt man der Kürze wegen

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = u,$$

so läſst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{z - \zeta}{x - \xi} = \psi u,$$

und wenn man differentiirt, und das Differential von ψu durch $\psi' u \,.\, du$ bezeichnet,

$$\frac{dz\,(x - \xi) - dx\,(z - \zeta)}{(x - \xi)^2} = \psi' u \,.\, du.$$

Da nun aber $u = \frac{y - \eta}{x - \xi}$ war, so erhält man auch

$$du = \frac{dy\,(x - \xi) - dx\,(y - \eta)}{(x - \xi)^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von du in die vorige Gleichung

$$\psi' u \,.\, du = \frac{dz\,(x - \xi) - dx\,(z - \zeta)}{(x - \xi)^2}$$

und läſst den gemeinschaftlichen Divisor $(x - \xi)^2$ weg, so erhält man

$$dz\,(x - \xi) - dx\,(z - \zeta)$$
$$= \psi' u \,.\, [dy\,(x - \xi) - dx\,(y - \eta)].$$

Hieraus ergeben sich die beiden partiellen Differentialcoefficienten von z,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{z - \zeta}{x - \xi} - \frac{y - \eta}{x - \xi} \,.\, \psi' u$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \psi' u.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die arbiträre Function $\psi' u$, so kommt, indem man zugleich die ganze Gleichung mit $x - \xi$ multiplicirt,

$$(x - \xi)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - \eta)\left(\frac{dz}{dy}\right) = z - \zeta,$$

welches die Differentialgleichung der in Rede stehenden Kegeloberfläche ist.

§. 27.

Man kann bei der Aufsuchung der allgemeinen Gleichung der Kegeloberfläche auch auf umgekehrte Art verfahren, indem man von der Differentialgleichung derselben ausgeht, und durch Integration zur endlichen Gleichung gelangt. Bezeichnet man nämlich die allgemeinen Coordinaten der Berührungsebene einer krummen Oberfläche durch X, Y, Z, die Coordinaten des Berührungspunktes durch x, y, z, so ist die Gleichung der Berührungsebene

$$(x - X)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y - Y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = z - Z.$$

Diese Gleichung gilt allgemein, welche Beschaffenheit auch die krumme Oberfläche haben mag, an welche die Berührungsebene gelegt werden soll.

In so fern nun aber die Ebene eine Kegeloberfläche berühren soll, muſs man eine besondere Eigenschaft der Berührung in Betracht ziehen, die der Kegeloberfläche eigenthümlich ist. Man sieht nämlich leicht, daſs,

wenn man an irgend einen Punkt einer Kegeloberfläche die Berührungsebene legt, diese die Oberfläche in der ganzen Seitenlinie berühren wird; sie geht also ebenfalls durch den Scheitel des Kegels. Bezeichnen wir also, wie früher, die drei Coordinaten des Scheitels des Kegels durch ξ, η, ζ, so wird die obige Gleichung für die Berührungsebene im Allgemeinen auch dann noch Statt finden müssen, wenn man statt der Coordinaten X, Y, Z die constanten Gröfsen ξ, η, ζ setzt; es wird daher die Differentialgleichung der Kegeloberfläche

$$(x-\xi)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y-\eta)\left(\frac{dz}{dy}\right)=z-\zeta,$$

ganz dieselbe wie vorher.

§. 28.

Um diese Gleichung zu integriren, bemerke man, dafs, wenn z eine Function von x und y bezeichnet, das vollkommene Differential von dz immer durch die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy=dz$$

ausgedrückt wird. Verbindet man diese mit der zu integrirenden

$$(x-\xi)\left(\frac{dz}{dx}\right)+(y-\eta)\left(\frac{dz}{dy}\right)=z-\zeta,$$

indem man den einen der partiellen Differentialcoefficienten, z. B. $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, eliminirt, so erhält man

$$[dy\,(x-\xi)-(y-\eta)\,dx].\left(\frac{dz}{dy}\right)$$
$$=dz\,(x-\xi)-dx\,(z-\zeta).$$

Da der übrig bleibende partielle Differentialcoefficient $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ ganz willkürlich ist, so wird, um diese Gleichung im Allgemeinen bestehen zu lassen, der Nenner sowohl, als auch der Zähler des Bruchs

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{dz\,(x-\xi) - dx\,(z-\zeta)}{dy\,(x-\xi) - dx\,(y-\eta)}$$

Null gesetzt werden müssen, so daſs die Differentialgleichungen

$$dz\,(x-\xi) = dx\,(z-\zeta),$$
$$dy\,(x-\xi) = dx\,(y-\eta)$$

Statt finden. Ihre Integrale sind

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi} = c, \quad \frac{y-\eta}{x-\xi} = c',$$

wo c und c' zwei Constanten ausdrücken. Sieht man nun die Constante c' als Function von c an, so daſs etwa $c' = \psi c$, so erhält man durch Elimination von c die Gleichung

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi} = \psi\left(\frac{y-\eta}{x-\xi}\right),$$

welche das Integral der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ist.

§. 29.

Um die auf die Gleichung der Strahlenkegel zu gründenden Rechnungen nicht zu verwickelt zu machen, wollen wir annehmen, die Oeffnung befinde sich in einer Ebene, die mit der der Coordinaten x und y selbst zusammenfällt, und auſserdem kann man noch voraussetzen, daſs der Anfangspunkt der Coordinaten sehr nahe an der Grenze der Oeffnung liegt. Dann ist die Curve, durch welche die Seitenlinien des Kegels hindurchgehen, in einer Ebene befindlich, und die §. 24. allgemein angenommenen Gleichungen

$$\gamma = f\alpha, \quad \beta = \varphi\alpha$$

verwandeln sich in diese

$$\gamma = o, \quad \beta = \varphi\alpha.$$

Die Gleichungen (1) und (2) desselben Paragraphen geben dann

$$y - \eta = \left(\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}\right)(x - \xi)$$
$$z - \zeta = \left(\frac{\zeta}{\xi - \alpha}\right)(x - \xi).$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}$$

$$\beta = \frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta}$$

folglich auch, da $\beta = \varphi\alpha$,

$$\frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta} = \varphi\left(\frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}\right),$$

welches die Gleichung des Strahlenkegels ist, der durch eine ebene Oeffnung fällt, deren Begrenzung durch die krumme Linie $\beta = \varphi\alpha$ angegeben wird.

§. 30.

Wir zählen hierbei die positiven Werthe von z von der Oeffnung aus nach dem leuchtenden Körper hin. Legt man nun eine Ebene parallel mit derjenigen Ebene, auf welcher die Oeffnung sich befindet, in der Entfernung k hinter die Oeffnung, so ist die Gleichung dieser Ebene

$$z + k = o,$$

und wenn man den hieraus sich ergebenden Werth von z in die Gleichung des Strahlenkegels

$$\frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta} = \varphi\left(\frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}\right)$$

substituirt, so kommt

$$\frac{k\eta + y\zeta}{k + \zeta} = \varphi\left(\frac{k\xi + x\zeta}{k + \zeta}\right)$$

für die Gleichung derjenigen krummen Linie, welche durch den Durchschnitt dieses Strahlenkegels mit der auffangenden Ebene entsteht. Die Fläche, welche von dieser Curve eingeschlossen wird, enthält nach den früher gegebenen Erklärungen das Bild des Punktes, von dem der Strahlenkegel ausgeht.

§. 31.

Gesetzt nun, die leuchtende Oberfläche sey eine Ebene, die durch eine ihrer Natur nach gegebene

krumme Linie begrenzt wird, und diese leuchtende Ebene sey außerdem mit der Ebene der x und y parallel, so sind die Coordinaten ξ, η, ζ der leuchtenden Punkte gewissen Bedingungen unterworfen, indem eines Theils $\zeta = l$ wird, wo l eine constante Größe, nämlich die Entfernung der leuchtenden Ebene von der mit einer Oeffnung versehenen, bedeutet, und andern Theils an den Grenzen der leuchtenden Fläche eine Relation zwischen ξ und η Statt findet, die wir durch

$$\eta = f\xi$$

bezeichnen wollen, wo f ein willkürliches Functionszeichen ist, und diese Gleichung die Natur der die leuchtende Fläche begrenzenden Curve ausdrückt.

Setzt man also in der Gleichung

$$\frac{k\eta + y\zeta}{k + \zeta} = \varphi\left(\frac{k\xi + x\zeta}{k + \zeta}\right)$$

l statt ζ, und $f\xi$ statt η, so wird

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

die Gleichung des Bildes eines Punktes, der an den Rändern der leuchtenden Fläche liegt.

§. 32.

Substituirt man in dieser Gleichung statt ξ, $\xi + d\xi$, so erhält man die Gleichung eines Bildes, das von einem Punkt entsteht, der dem ersten unendlich nahe liegt. Man erhält dann vermittelst der gewöhnlichen Bezeichnungsart, für die Differentiation einer Function die Gleichung dieses zweiten Bildes

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} + \frac{kf'\xi . d\xi}{k + l}$$
$$= \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right) + \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right) . \frac{kd\xi}{k + l}$$

oder da die ersten Glieder vor und hinter dem Gleichheitszeichen sich von selbst aufheben, und bei den übrigen Gliedern der Factor $\frac{kd\xi}{k + l}$ weggelassen werden

kann, so erhält man auch

$$f'\xi = \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right).$$

§. 33.

Aus dieser Gleichung und der ursprünglichen

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

lassen sich die Gröſsen x und y als Functionen von ξ bestimmen, sobald die Formen der Functionen f und φ gegeben werden, und man erhielte auf diese Art die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Begrenzungen zweier Bilder, die von zwei unendlich nahe liegenden Punkten der Begrenzung der leuchtenden Fläche herkommen.

Würde man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

$$f'\xi = \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

die Gröſse ξ eliminiren, so würde man eine Gleichung zwischen den veränderlichen x und y und den constanten Gröſsen k und l erhalten, welche die Natur derjenigen Curve giebt, auf welcher alle Durchschnittspunkte der Bilder aller auf einander folgenden Punkte der Begrenzung der leuchtenden Fläche liegen. Diese Curve ist aber in optischer Rücksicht nichts anderes, als das Bild der ganzen leuchtenden Fläche.

§. 34.

Da in den zu behandelnden Gleichungen sowohl die Function φ, als auch die Function f vorkommt, von denen die erste die Natur der Oeffnung, die zweite die Beschaffenheit der Begrenzung der leuchtenden Fläche angiebt, so sieht man, daſs die Gestalt des Bildes von beiden zugleich abhängen wird, und es kommt jetzt darauf an, zu zeigen, wie die genaue Aehnlichkeit des

Bildes mit dem Object selbst durch die Beschaffenheit der Oeffnung, durch welche die Strahlenkegel hindurchgehen, modificirt wird. Hierzu müssen wir zuerst den Fall betrachten, wo die Beschaffenheit der Oeffnung eine vollständige Aehnlichkeit des Bildes und des Objects erlaubt, welches natürlich dann Statt findet, wenn die Oeffnung sich in einen Punkt zusammenzieht.

§. 35.

Ein Punkt kann als ein Kreis angesehen werden, dessen Halbmesser Null ist; legen wir daher diesen Punkt in den Anfang der Coordinaten, so giebt die Gleichung $\beta = \varphi\alpha$ (§. 29.) in vorliegendem Fall

$$\beta\beta + \alpha\alpha = o$$

oder auch $\beta = \alpha\sqrt{-1}$. Hierdurch ist die Form der Function φ bestimmt, und die allgemeine Gleichung

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

geht in diese über

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \frac{k\xi + xl}{k + l}\sqrt{-1}.$$

Da die Gröfsen y, x, ξ, k, l insgesammt reell sind, so kann diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht jeder Theil, der reelle sowohl als der imaginäre, für sich Null ist; man hat also die beiden Gleichungen

$$kf\xi + yl = o$$

$$k\xi + xl = o$$

Hieraus ergiebt sich

$$f\xi = -\frac{yl}{k},\ \xi = -\frac{xl}{k}$$

folglich durch Elimination von ξ

$$-\frac{yl}{k} = f\left(-\frac{xl}{k}\right),$$

welches die Gleichung des Bildes ist, das durch die leuchtende Ebene, deren Gleichung $\eta = f\xi$ ist, entsteht, und man sieht sogleich, dafs beide Figuren einander entgegengesetzt ähnlich sind, indem das Ver-

hältnifs der Linien des Bildes zu denen des Objects das von $k : l$ ist *).

§. 36.

Wir wollen nun als besondern Fall annehmen, der leuchtende Körper sey eine grade Linie, die mit der Axe der x parallel geht, und die Begrenzung der Oeffnung ein Kreis vom Halbmesser a. Dann ist die Gleichung der Oeffnung

$$\alpha\alpha + \beta\beta = aa,$$

die Gleichung des leuchtenden Körpers

$$y = o,$$

und da wir früher für diese Gleichungen im Allgemeinen die Functionen

$$\beta = \varphi\alpha, \quad \eta = f\xi$$

angenommen hatten, so kommt

$$\varphi\alpha = \sqrt{aa - \alpha\alpha}, \quad f\xi = o.$$

Substituirt man die Werthe dieser Functionen in den Ausdruck (§. 33.)

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right),$$

so erhält man sogleich

$$\frac{yl}{k + l} = \sqrt{aa - \left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)^2}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach ξ, so kommt

$$\frac{k\xi + xl}{\sqrt{aa - \left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)^2}} = o.$$

Hieraus findet sich $k\xi + xl = o$, und wenn man aus dieser Gleichung und der ersten ξ eliminirt, so bleibt

$$\frac{yl}{k + l} = \pm a$$

*) Die Annahme $\alpha\alpha + \beta\beta = o$ ist etwas willkürlich, man kann viele andere Gleichungen angeben, denen von reellen Werthen ebenfalls nur $\alpha = o$, $\beta = o$ entsprechen; eine andere Ableitung unseres Satzes s. §. 39. G.

oder auch

$$y = \pm \frac{a(k+l)}{l}.$$

Die Grenzen des Bildes werden also durch zwei grade Linien dargestellt, die auf beiden Seiten der Axe der x in der Entfernung $\frac{a(k+l)}{l}$ mit dieser Axe parallel liegen. Das Bild selbst ist daher ein Parallelogramm von der Breite $\frac{2a(k+l)}{l}$, in so fern wir die leuchtende Linie ins Unendliche fortgesetzt annehmen; ist dieselbe aber begrenzt, so findet zwar ebenfalls an den beiden Seiten parallel mit der Axe der x eine grade Linie als Begrenzung des Bildes Statt, allein an den Enden wird die Breite des Bildes von zwei Kreisbogen eingeschlossen werden.

§. 37.

Ferner wollen wir annehmen, der Gegenstand sey ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Mittelpunkt in der Axe der z liegt, und die Oeffnung sey ebenfalls ein Kreis vom Halbmesser a, rücksichtlich dessen Mittelpunktes dieselbe Bedingung Statt findet, wie für den Gegenstand, so hat man die Gl i hu g der Oeffnung

$$\alpha\alpha + \beta\beta = aa,$$

und die Gleichung des Objects

$$\xi\xi + \eta\eta = rr.$$

Hierdurch bestimmen sich die Formen der Functionen $\beta = \varphi\alpha$, $\eta = f\xi$. Es wird nämlich

$$\varphi\alpha = \sqrt{aa - \alpha\alpha};$$

$$f\xi = \sqrt{rr - \xi\xi}.$$

Substituirt man diese Werthe der Functionen in dem allgemeinen Ausdruck (§. 33.)

$$\frac{kf\xi + yl}{k+l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k+l}\right),$$

so erhält man

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l}=\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach ξ, so kommt

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr-\xi\xi}}=\frac{k\xi+xl}{\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}}\cdot\frac{1}{k+l},$$

und man sieht sogleich, daſs dieser letztern Gleichung durch die Annahme

$$\frac{\xi}{r}=\frac{k\xi+xl}{a(k+l)}$$

Genüge geleistet wird. Durch Substitution des hieraus sich ergebenden Werthes von $\frac{k\xi+xl}{k+l}$ in die erste Gleichung erhält man

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l}=\frac{a}{r}\sqrt{rr-\xi\xi}$$

$$\frac{l}{k+l}.y=\left(\frac{a}{r}-\frac{k}{k+l}\right)\sqrt{rr-\xi\xi}.$$

Hieraus folgt

$$\xi=\pm\sqrt{rr-\left(\frac{rl}{a(k+l)-rk}\right)^2yy}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\xi}{r}=\frac{k\xi+xl}{a(k+l)}$$

ergiebt sich aber auch

$$\xi=\frac{rlx}{a(k+l)-rk},$$

folglich, wenn man aus dieser und der vorigen Gleichung ξ eliminirt, so kommt, indem man der Kürze wegen den Coefficienten

$$\frac{rl}{a(k+l)-rk}=\mu$$

setzt, die Gleichung

$$\mu x=\pm\sqrt{rr-\mu\mu yy},$$

welche die des Bildes ist, und man sieht aus dersel-

ben, dafs das Bild ein Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{\mu}$ oder $\frac{a(k+l)-rk}{l}$ ist.

Man kann aber noch eine zweite Auflösung finden, die ebenfalls auf einen Kreis führt; denn quadrirt man die Gleichung

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr-\xi\xi}} = \frac{k\xi+lx}{\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}} \cdot \frac{1}{k+l}$$

und läfst die sich aufhebenden Glieder weg, so bleibt

$$\xi^2\left(\frac{1}{rr} - \frac{kk}{aa(k+l)^2}\right) = \frac{x^2l^2+2lkx\xi}{aa(k+l)^2}$$

und aus dieser Gleichung erhält man zwei Werthe, von denen der eine der vorhin für ξ angegebene ist. Der andere wird

$$\xi = -\frac{xlr}{a(k+l)+kr}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{k\xi+xl}{k+l} = \frac{axl}{a(k+l)+kr}.$$

Setzt man nun

$$\frac{rl}{a(k+l)+kr} = \mu',$$

so geht die Gleichung

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l} = \sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}$$

in diese andere über, wenn man statt ξ, $\frac{k\xi+xl}{k+l}$ ihre Werthe setzt

$$\frac{k\sqrt{rr-\mu'\mu'xx}+yl}{k+l} = \frac{a}{r}\sqrt{rr-\mu'\mu'xx}$$

und man sieht leicht, dafs diese Gleichung ebenfalls wieder auf einen Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{\mu'}$ oder

$\frac{a(k+l)+kr}{l}$ führt, der also gröfser ist, als der vorhin gefundene *).

§. 38.

Ist das Object, wie im vorigen Beispiel, ein Kreis, die Oeffnung hingegen eine grade Linie, die parallel mit der Axe der x in der Entfernung h gezogen ist, so hat man

$$\varphi\alpha = h,\ f\xi = \sqrt{rr - \xi\xi},$$

wo, wie vorher, r den Halbmesser des Objects bedeutet. Substituirt man diese beiden Functionen in die Gleichung

$$\frac{kf\xi + yl}{k+l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k+l}\right),$$

so kommt

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi} + yl}{k+l} = h.$$

Dies giebt differentiirt

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr-\xi\xi}} = o.$$

Es bleibt also die Gleichung des Bildes, da der letztern Gleichung durch den Werth $\xi = o$ Genüge geleistet wird

$$\frac{\pm kr + yl}{k+l} = h.$$

Der leuchtende Theil des Bildes wird also von zwei graden Linien eingeschlossen, deren Abstände von der Axe der x durch die Ausdrücke

*) Der Kreis, dessen Halbmesser $\frac{a(k+l)-rk}{l}$ ist, enthält diejenigen Punkte, welche von allen Punkten der leuchtenden Fläche Licht erhalten; der Kreis, dessen Halbmesser $\frac{a(k+l)+rk}{l}$ ist, begrenzt den Theil der Tafel, auf welchen überhaupt Strahlen fallen, der Ring zwischen beiden Kreisen enthält also den Halbschatten. G.

$$\frac{h(k+l)+kr}{l}$$
$$\frac{h(k+l)-kr}{l}$$

angegeben werden.

§. 39.

Die beiden Gleichungen, welche (§. 22.) die grade Linie angeben, die ein Lichtstrahl einnimmt, der von einem Punkt des Objects, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, durch einen Punkt der Oeffnung, dessen Coordinaten durch α, β, γ ausgedrückt werden, hindurchgeht, lassen sich auch so schreiben:

$$y-\beta=\frac{\eta-\beta}{\xi-\alpha}(x-\alpha),$$
$$z-\gamma=\frac{\zeta-\gamma}{\xi-\alpha}(x-\alpha),$$

und man erhält aus denselben

$$\xi=\alpha+\frac{\zeta-\gamma}{z-\gamma}(x-\alpha),$$
$$\eta=\beta+\frac{\zeta-\gamma}{z-\gamma}(y-\beta).$$

Nehmen wir nun an, daſs die Oeffnung in der Ebene der xy liegt, und die Punkte ihres Umfangs nahe an dem Anfangspunkte der Coordinaten, so hat man $\gamma=o$. Liegt ferner der Gegenstand, der die Lichtstrahlen ausschickt, in einer Ebene parallel mit der Ebene der xy, und bezeichnet man ihre Entfernung von der letztern Ebene durch l, so wird $\zeta=l$. Ist endlich die auffangende Fläche eine Ebene, deren Abstand hinter der Oeffnung durch k bezeichnet wird, so hat man $z=-k$, und durch diese Substitutionen erhalten vorige zwei Gleichungen diese Gestalt:

$$\xi=\alpha-\frac{l}{k}(x-\alpha),$$
$$\eta=\beta-\frac{l}{k}(y-\beta).$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$-\frac{lx}{k} = X, \; -\frac{ly}{k} = Y,$$

$$\frac{l+k}{k} = \mu,$$

so erhält man

$$\xi = X + \mu . \alpha;$$
$$\eta = Y + \mu . \beta.$$

Ist die Gleichung des Umfangs der leuchtenden Fläche $\eta = f\xi$, so ergiebt sich hieraus

$$Y + \mu\beta = f(X + \mu\alpha),$$

oder wenn man die hinter dem Gleichheitszeichen stehende Function vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes entwickelt,

$$Y + \mu\beta = fX + \mu\alpha . f'X + \frac{\mu^2\alpha^2}{1.2} f''X + \dots$$

Aus dieser Entwickelung sieht man, dafs, wenn β und α Null sind, das Bild die Gleichung $Y = fX$ giebt, also ist dasselbe dann dem Objecte völlig ähnlich, und dies findet dann Statt, wenn die Oeffnung ein blofser Punkt ist. Ist aber die Oeffnung eine ausgedehnte Fläche, so findet im Allgemeinen keine Aehnlichkeit Statt; die Unähnlichkeit wird aber desto geringer, je kleiner die Dimensionen α, β der Oeffnung sind. Was den hierbei noch in Betracht kommenden Coefficienten μ betrifft, der, wie man leicht sieht, das Verhältnifs der Entfernung des Objects vom Bilde, zu der des Bildes von der Oeffnung angiebt, so wird derselbe desto kleiner, je gröfser die Entfernung des Bildes von der Oeffnung ausfällt. Man wird also rücksichtlich der Aehnlichkeit des Bildes und des Objects gewinnen, je kleiner man die Oeffnung macht und je gröfser man die Entfernung der auffangenden Ebene von der Oeffnung nimmt.

§. 40.

Wenn das Licht von einem strahlenden Punkte ins Auge fällt, so entsteht in diesem ebenfalls ein Bild

des Punktes; allein mit diesem Bilde verhält es sich anders, als mit demjenigen, welches sich zeigt, wenn man das Licht dieses Punktes durch eine Oeffnung in ein verdunkeltes Zimmer fallen läfst, und mit einer weifsen Tafel auffängt. Die Empfindung des Sehens entsteht auf der im Auge hinten liegenden Netzhaut, zu welcher das Licht aber nicht anders gelangen kann, als wenn es vorher die durchsichtigen Materien, mit denen das Auge angefüllt ist, durchlaufen hat.

Man bemerkt auf der äufsern Seite des Auges eine kleine kreisförmige schwarze Fläche, die der Stern oder die Pupille des Auges genannt wird, und an dieser Stelle allein kann das Licht ins Auge gelangen, da dasselbe aufserdem nur von undurchsichtigen Häuten umschlossen ist. Es wird daher von jedem leuchtenden Punkt ein Strahlenkegel in das Auge gelangen, dessen Grundfläche durch die Gröfse der Pupille bestimmt wird, welche man in diesem Fall als die schon früher erwähnte Oeffnung betrachten kann.

§. 41.

Die in diesem Strahlenkegel enthaltenen einzelnen Lichtstrahlen gehen aber innerhalb des Auges nicht in ihrer ersten Richtung fort, sondern werden mehreremal an den Grenzen der im Auge enthaltenen verschiedenen durchsichtigen Materien gebrochen, und zwar sind diese Materien so geordnet, dafs bei einem gut gebauten Auge die von einem nicht zu nahen Punkt herkommenden Strahlen von ihrem ursprünglichen Wege innerhalb des Auges so abgelenkt werden, dafs sie sich auf der Netzhaut wieder in einem Punkt vereinigen. Bei weitsichtigen Personen wird diese Vereinigung im Allgemeinen erst hinter der Netzhaut, bei kurzsichtigen schon vor der Netzhaut geschehen, so dafs also bei beiden Arten von Augen das Bild eines Punktes kein Punkt, sondern eine kleine Fläche wird. Das Weitere über die genaue Berechnung der Brechung

der Strahlen im Auge kann erst in der Lehre von den gebrochenen Lichtstrahlen oder der Dioptrik auseinander gesetzt werden.

§. 42.

Es sey *MN* die vordere Fläche des Auges (Fig. 3.), *DE* die Pupille, *C* die Mitte derselben, *A'B'* die Netzhaut, *A* irgend ein leuchtender Punkt, welcher den Strahlenkegel *EAD* auf die Pupille wirft. Nehmen wir hier der Kürze wegen an, daſs das ganze Auge mit einerlei Flüssigkeit angefüllt sey, da übrigens die verschiedenen im Auge enthaltenen brechenden Materien eine unter sich nur wenig abweichende Brechungskraft besitzen, so wird der Strahlenkegel *EA'D* innerhalb des Auges alle diejenigen Strahlen enthalten, welche vom Punkt *A* ins Auge kommen, und seine auf der Netzhaut liegende Spitze *A'* wird das Bild des Punktes *A* angeben.

§. 43.

Errichtet man in der Mitte *C* der Pupille ein Perpendikel *CF*, welches man auch rückwärts in das Auge verlängert annehmen kann, so heiſst dies die Gesichtsaxe, und man weiſs aus Erfahrung, daſs der Punkt eines Gegenstandes dem Auge desto deutlicher erscheint, je kleiner der Winkel ist, welchen die Axe des Strahlenkegels, der von demselben auf die Pupille geworfen wird, mit der Gesichtsaxe macht.

Gewöhnlich nimmt man an, daſs alle diejenigen Gegenstände noch mit ziemlicher Deutlichkeit übersehen werden können, bei denen die Axen der Strahlenkegel einen Winkel mit der Gesichtsaxe machen, der kleiner als 45° ist, und alle Objecte, die man zu gleicher Zeit mit hinlänglicher Deutlichkeit sehen kann, sind in einen rechtwinkligen Kegel eingeschlossen, dessen Axe mit der Gesichtsaxe zusammenfällt, und dessen Spitze in der Mitte der Pupille liegt.

Die Axe eines jeden Strahlenkegels, d. h. der Strahl, welcher durch die Mitte der Pupille geht, heiſst die nach dem gesehenen Punkt gehende Gesichtslinie, oder auch der Gesichtsstrahl, und statt des ganzen auf die Pupille fallenden Strahlenkegels, ist es bei den optischen Untersuchungen meistentheils hinlänglich, nur diesen einzelnen, gleichsam mittlern Strahl zu betrachten, da in demselben immer das Bild desjenigen Punkts sich befindet, von welchem dieser Strahl ausgeht.

§. 44.

Erhält das Auge zu gleicher Zeit von zwei strahlenden Punkten A und B Strahlenkegel, so bilden die Axen derselben einen gewissen Winkel mit einander, den man die scheinbare Entfernung beider Punkte von einander nennt. Dieser Winkel ABC hat eben dieselbe Gröſse, als der sich auf die Bilder dieser Punkte beziehende Winkel $A'CB'$.

Uebrigens sieht man aus der Figur, daſs diese Bilder, gegen die Objecte genommen, auf der Netzhaut des Auges eine verkehrte Lage haben, eben so wie dies der Fall bei Betrachtung der in einem verfinsterten Zimmer entstandenen Bilder war.

§. 45.

Woher es komme, daſs die Vorstellungen rücksichtlich der Lage der Gegenstände, die wir durch das Gesicht bekommen, trotz der verkehrten Lage des Bildes, mit denjenigen, die uns das Gefühl giebt, übereinstimmen, ist auf verschiedene Weise zu erklären versucht worden. Kepler z. B. erklärte es auf folgende Art: Wir geben jedem Punkt die Lage, die ihm der Richtung des Lichts gemäſs, welches von ihm in unser Auge strömt, zukommt; nun gehören die Strahlen, welche die Bilder auf dem untern Theil der Netzhaut geben, denjenigen Punkten zu, die auſserhalb des Auges über der Gesichtsaxe liegen, folglich scheint der Punkt,

dessen Bild oben auf der Netzhaut entsteht, oben zu liegen.

So passend diese Erklärung zu seyn scheint, wenn man nur einen einzigen Strahl, nämlich den Gesichtsstrahl, des gesehenen Punktes betrachtet, so ist doch dagegen einzuwenden, daſs bei einem ins Auge fallenden Strahlenkegel diese Ansicht nicht durchgeführt werden kann. Das Bild A' des Punktes A entsteht durch die Vereinigung aller im Kegel $DA'E$ enthaltenen Strahlen, von denen jeder eine andere Richtung hat; also konnte das Auge den Punkt A statt in der Richtung $A'A$ eben so gut in der Richtung $A'a'$ und $A'a''$, und überhaupt in jeder andern dazwischen liegenden Richtung annehmen, da kein Lichtstrahl vor dem andern hierin einen Vorzug besitzt. Denn daſs die Seele hierbei gleichsam die Idee einer mittlern Richtung haben sollte, ist nicht wohl anzunehmen. Ueberhaupt scheint die Seele von den Richtungen der Lichtstrahlen bei Entstehung des Bildes gar keinen Begriff aufzufassen, sondern bloſs die Gröſse und Lage der Bilder selbst zu empfinden, und es ist gewiſs, daſs die Uebereinstimmung der Begriffe, die wir durch das Gefühl und das Auge erhalten, erst durch die Uebung und immerwährende Verbindung beider Arten von Empfindungen hervorgebracht worden ist.

§. 46.

Denkt man sich vom Auge aus an einer Kugel zwei Berührungslinien gezogen, so daſs die Ebene, welche durch beide Linien gelegt wird, zugleich durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so heiſst der Winkel, den beide Linien mit einander machen, der scheinbare Durchmesser der Kugel. Diese Ebene schneidet die Kugel in einem gröſsten Kreise AEB (Fig. 4.), dessen Mittelpunkt C ist.

Befindet sich in O das Auge, und sind AO, BO die besagten Berührungslinien, so wird der Winkel AOB der scheinbare Durchmesser der Kugel werden.

§. 47.

Zieht man OC, so halbirt diese den Winkel AOB, und AOC oder COB wird der scheinbare Halbmesser genannt. Setzt man die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel vom Auge $OC = e$, den wirklichen Halbmesser derselben $AC = r$, den scheinbaren Halbmesser $AOC = \omega$, so wird in dem bei A rechtwinkligen Dreieck AOC

$$AC = CO \, . \sin AOC,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$r = e \, . \sin \omega.$$

Sind daher zwei der Gröfsen r, e, ω bekannt, so wird man vermittelst dieser Gleichung die dritte finden.

§. 48.

In dem Viereck $ACBO$, welches bei A und B rechte Winkel hat, wird

$$ACB + AOB = 2R$$

und da ACB den Bogen angiebt, welchen das Auge übersehen kann, so folgt hieraus, dafs man nie auf einmal die Halbkugel sieht, sondern immer nur ein Segment derselben, welches von der Halbkugel um den scheinbaren Durchmesser der Kugel verschieden ist.

Dieser scheinbare Durchmesser kann aber in zwei Fällen verschwinden; denn da hierfür erforderlich ist, dafs $\omega = o$ sey, so wird auch $\sin \omega = o$, d. h. $\frac{r}{e} = o$, folglich entweder $r = o$, oder $e = \infty$. Ersterer Fall findet Statt, wenn die Kugel sich in einen Punkt verwandelt, der zweite, wenn die Entfernung des Auges vom Mittelpunkt der Kugel unendlich grofs ist.

§. 49.

Ein Gegenstand mag noch so weit entfernt, und so klein seyn, als er will, so entspricht demselben doch immer ein gewisser Gesichtswinkel, der sich aus der gegebenen Lage desselben gegen das Auge immer berechnen läfst.

Allein der Gegenstand bleibt für das Auge nicht bei jedem Gesichtswinkel wirklich sichtbar, denn wenn derselbe bis auf eine gewisse Gröfse abgenommen hat, so wird das auf der Netzhaut entstehende Bild des Objectes zu klein, als dafs der Eindruck merklich seyn könnte. Diese Grenze der Sichtbarkeit mufs aber natürlicherweise für verschiedene Augen selbst verschieden ausfallen, da hierbei viel auf die Empfindlichkeit der Nerven, und auf die mehr oder minder deutliche Darstellung des Bildes auf der Netzhaut ankommen mufs.

§. 50.

Man hat gefunden, dafs bei gutem Auge und heller Erleuchtung eines irdischen Gegenstandes, die Grenze der Sichtbarkeit desselben dann Statt findet, wenn der Gesichtswinkel 40 Secunden beträgt.

Es ergiebt sich aus dieser Beobachtung leicht, dafs dieser Gesichtswinkel dann Statt finden mufs, sobald die Entfernung des Gegenstandes seinen auf der Gesichtsaxe senkrecht stehenden Durchmesser ungefähr 5000 mal übertrifft. In diesem Fall wird das Bild des Gegenstandes auf der Netzhaut so klein werden, dafs der Eindruck verschwindet, und um so mehr mufs dies bei Gegenständen geschehen, die unter noch kleinern Gesichtswinkeln erscheinen.

§. 51.

Um in Zahlen zu berechnen, wie grofs das im Auge entstehende Bild eines solchen Gegenstandes ist, sey O (Fig. 5.) der Mittelpunkt der Pupille, FG die Gesichtsaxe, AB eine auf FG senkrecht stehende Linie, die den Durchmesser des Objects darstellen soll, und in F halbirt ist. Die Entfernung dieses Gegenstandes sey so grofs, dafs der Winkel, den die beiden nach den Endpunkten der Linie gezogenen Gesichtslinien AO, OB einschliefsen, 40 Secunden beträgt.

Nun ist früher erwähnt worden, dafs die Bilder der Punkte eines Objects immer in der Verlängerung der

Gesichtslinien, d. h. der Axe der von ihnen ausgehenden und auf die Pupille fallenden Strahlenkegel liegen. Treffen daher die verlängerten Strahlen AO, BO die Netzhaut in A' und B', so wird die Linie $A'B'$ das Bild der Linie AB angeben.

Die beiden Dreiecke AOB, $A'OB'$ sind einander ähnlich, also wird $B'A'$ so oft in OG enthalten seyn, als AB in OF enthalten ist; d. h. es wird $A'B' = \frac{OG}{5000}$. Nun beträgt die Entfernung der Netzhaut von dem Mittelpunkte der Pupille oder die Gröfse der Linie OG ungefähr 10 Linien, folglich wird die Gröfse des Bildes $= \frac{1}{500}$ Linie, und einen mit diesem Durchmesser beschriebenen Kreis kann man als einen physischen Punkt der Netzhaut ansehen, wenn man Bilder von irdischen Gegenständen, die nicht selbst leuchtend sind, in Betrachtung zieht

§. 52.

Bei selbstleuchtenden Körpern, wie die Fixsterne sind, oder bei stark erleuchteten Körpern, die auf einem schwarzen Grunde erscheinen, wie die Planeten, ist die Grenze der Sichtbarkeit bei weitem kleiner, da bei den Fixsternen, auch mit den besten Vergröfserungswerkzeugen, nie ein merklicher Durchmesser beobachtet worden ist; allein bei der Betrachtung dieser Art von Gegenständen, die ein so starkes Licht besitzen, tritt der Fall des undeutlichen Sehens mit zerstreutem Licht ein, und sie geben auf der Netzhaut viel gröfsere Bilder, als ihrem eigentlichen Durchmesser und ihrer Entfernung vom Auge gemäfs geschehen sollte.

§. 53.

Wir wollen nun einige Erscheinungen untersuchen, die davon herrühren, dafs die Gegenstände bei einem sehr kleinen Gesichtswinkel unsichtbar werden.

Nimmt man zwei Parallellinien AB, CD, zwischen welchen sich das Auge in O (Fig. 6.) befindet, und zieht die beiden Linien EF, GH, die der Entfernung der Parallellinien von einander gleich sind, so erscheinen diese dem Auge unter den Gesichtswinkeln EOF, GOH, welche immer kleiner werden, je weiter die Linie GH vom Auge entfernt genommen wird. Zuletzt, wenn dieser Gesichtswinkel bis auf 40 Secunden abgenommen hat, wird die Entfernung der beiden Parallellinien dem Auge unsichtbar seyn, und dieselben sich zu treffen scheinen. Ein paar Parallelen erscheinen also dem Auge als convergent.

Die Bestätigung dieses Satzes durch Erfahrung kann sich jeder leicht verschaffen. Denn befindet man sich an Eingange einer langen Allee, deren Seiten einander parallel laufen, so werden die Baumreihen in groſser Entfernung völlig in einander zu gehen scheinen, und diese optische Täuschung wird dann Statt finden, wenn die Länge der Allee ihre Breite gegen 5000 mal übertrifft.

§. 54.

Nimmt man auf einer unbegrenzten Linie AB ein bestimmtes Stück CD (Fig. 7.), so erscheint dieses dem in O senkrecht über A befindlichem Auge unter dem Gesichtswinkel COD, dessen Gröſse sich folgendermaſsen ausmitteln läſst.

Die Entfernung des Auges O von der Linie AB, d. h. AO sey $= h$, $AC = a$, $CD = b$, so ist bekanntlich

$$\text{tang } AOC = \frac{AC}{AO} = \frac{a}{h},$$

$$\text{tang } AOD = \frac{AD}{AO} = \frac{a+b}{h}.$$

Nun ist aber

$$COD = AOD - AOC,$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten die Tangenten nimmt:

$$\tang COD = \tang (AOD - AOC)$$
$$= \frac{\tang AOD - \tang AOC}{1 + \tang AOD \,.\, \tang AOC}$$

und wenn man die eben gefundenen Werthe der Tangenten hierin substituirt, so kommt

$$\tang COD = \frac{bh}{hh + aa + ab}.$$

Dieser Werth von tang COD verschwindet zweimal, indem entweder $h = o$, oder $h = \infty$ gesetzt wird. Es wird also ein gewisser Werth von h geben, für welchen COD ein Maximum ist.

§. 55.

Um diesen Werth zu finden, differentiire man den Ausdruck

$$\frac{bh}{hh + aa + ab}$$

indem h als veränderlich betrachtet wird, und setze das Differential gleich Null, so erhält man

$$aa + ab = hh,$$

folglich den gröſsten Werth von

$$h = \sqrt{aa + ab},$$

d. h. um das Stück CD der Linie AB unter dem möglichst gröſsten Gesichtswinkel zu sehen, muſs die Höhe des Auges AO über der Linie AC die mittlere geometrische Proportionallinie, zwischen den Linien AC und AD seyn. Es wird also jedenfalls AO gröſser als AC, und kleiner als AD werden.

Substituirt man diesen Werth von h in die Gleichung

$$\tang COD = \frac{bh}{hh + aa + ab},$$

so erhält man

$$\tang COD = \tfrac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{aa + ab}}.$$

§. 56.

Nimmt man an, daſs der Punkt D unendlich weit von C entfernt liegt, so daſs die nach dem Punkt D

von O aus gezogene Gesichtslinie mit AB parallel läuft, so wird der Winkel COD' so groſs, als der Winkel OCA, dessen Tangente durch $\frac{OA}{AC}$, d. h. durch $\frac{h}{a}$ ausgedrückt wird.

Denselben Ausdruck erhält man auch aus der vorigen allgemeinen Gleichung für tang COD. Denn dividirt man den Zähler und Nenner des Bruchs durch b, so ist

$$\text{tang } COD = \frac{h}{a + \frac{aa + hh}{b}}$$

und setzt man nun $b = \infty$, wodurch $\frac{aa + hh}{b} = o$ wird, so bleibt

$$\text{tang } COD' = \frac{h}{a}.$$

Sobald nun der Gesichtswinkel $COD' = 40''$ wird, ist das ganze Stück der graden Linie von C nach B hin ins Unendliche fortgesetzt, dem Auge völlig unsichtbar, indem dasselbe gleichsam in einen physischen Punkt übergeht; es wird daher ungefähr $a = 5000\, h$.

§. 57.

Wie groſs die Entfernung sey, welche das Auge in einer gegebenen Höhe über der Erdoberfläche übersehen kann, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, läſst sich auf folgende Art finden. Es sey C der Mittelpunkt der Erde (Fig. 8.), ABD ein Kreis, dessen Halbmesser dem der Erde als gleich angenommen ist; in O das Auge. Zieht man durch den Punkt O eine Berührungslinie OB, die den Kreis in B trifft, so wird für das Auge jeder Punkt des Kreisbogens AB sichtbar seyn, und B wird den äuſsersten Punkt angeben. Man setze $AO = h$, den Halbmesser der Erde $AC = r$, so hat man in dem bei B rechtwinkligen Dreieck COB

$$\cos OCB = \frac{CB}{OC} = \frac{r}{r+h}.$$

Dieser Ausdruck ist aber zur Berechnung für kleine Höhen h nicht sehr geschickt, da der Winkel OCB immer nur sehr klein ist, und daher sein Cosinus sich wenig ändert, wenn auch der Winkel verhältnifsmäfsig stark vermehrt oder vermindert wird. Man kann denselben aber auch so schreiben:

$$1 - \cos OCB = 1 - \frac{r}{r+h} = \frac{h}{r+h},$$

und da aufserdem

$$1 - \cos OCB = 2 \sin \tfrac{1}{2} OCB^2,$$

so wird auch

$$\sin \tfrac{1}{2} OCB = \sqrt{\frac{h}{2(r+h)}},$$

welcher Ausdruck sich in jedem Falle genau berechnen läfst.

§. 58.

Diese Formel findet ihre Anwendung bei der Correction von Beobachtungen der Höhen der Himmelskörper, die auf dem Meere angestellt werden, und der Winkel OCB ist das, was man die Depression des Meereshorizonts nennt. Es sey z. B. OS eine nach dem zu beobachtenden Gestirn gezogene Gesichtslinie, so mifst der Schiffer den Winkel BOS, während er eigentlich den Winkel der Gesichtslinie OS mit der durch den Punkt A gelegten Berührungsebene messen sollte. Die Linie AT stelle den Durchschnitt dieser berührenden Ebene vor, so dafs TAC einen rechten Winkel macht. Den Winkel OCB setze man $= D$, den gemessenen Winkel $SOB = H$, den gesuchten Winkel TAS', wo AS' parallel OS gezogen ist, $= H'$, so hat man

$$SOB + BOC = S'AT + TAC$$

oder da $BOC = 90 - D$, so wird

$$H - D = H',$$

d. h. die Depression mufs vom gemessenen Winkel abgezogen werden.

§. 59.

Nach der Formel des vorigen Paragraphen läfst sich diese Depression berechnen, sobald die Höhe des Auges des Beobachters über der Meeresfläche bekannt ist, und da selbige gegen den Erdhalbmesser immer sehr klein ausfällt, so wird man ohne merklichen Fehler

$$\sin \tfrac{1}{2}\, OCB = \sqrt{\frac{h}{2r}}$$

setzen können, oder wenn man bedenkt, dafs bei einem so kleinen Winkel der Bogen mit seinem Sinus verwechselt werden kann, so ergiebt sich

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Will man diesen Winkel in Secunden haben, so mufs dieser Ausdruck noch mit 206264,8 multiplicirt werden. Setzt man hierin

$$r = 3265600 \text{ Toisen},$$

so erhält man den Ausdruck der Depression

$$= 161'',42\,\sqrt{h},$$

wo h jedesmal in Toisen ausgedrückt werden mufs.

§. 60.

Multiplicirt man in dem Ausdruck

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

den Bogen, der zu einem mit der Maafseinheit beschriebenen Kreise gehört, noch mit dem Halbmesser der Erde r, so erhält man die wirkliche Entfernung des Gesichtskreises vom Auge auf der kugelförmigen Erde $= \sqrt{2rh}$.

So lange also die Höhen h des Auges über der Erdoberfläche noch klein sind, verhalten sich die Entfernungen, die das Auge von dieser Erhöhung übersehen kann, wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen.

Für die als Ebene angenommene Erde hatte man die Entfernung mit Berücksichtigung des kleinsten Gesichtswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch sicht-

bar bleibt $= 5000\,h$ gefunden, folglich verhielten sich dann die Entfernungen wie die Höhen selbst.

Setzt man $h = 5$ Fuſs, welches die Höhe des Auges ungefähr dann ist, wenn der Mensch aufrecht auf dem Erdboden steht, so ergiebt sich auf der ebenen Erde die Weite der Aussicht zu 25000 Fuſs, während sie auf der kugelförmigen Erde ungefähr 14000 Fuſs beträgt.

§. 61.

Wir haben schon bemerkt, daſs die Gröſse des Gesichtswinkels, unter welchem die Gegenstände aufhören sichtbar zu seyn, und den wir in unsern Beispielen = 40 Secunden gesetzt haben, sehr von der Beschaffenheit des Auges des Beobachters, so wie auch von der der Erleuchtung abhängt; allein man kann doch allen Versuchen zufolge annehmen, daſs für sehr gute Augen, bei gewöhnlicher Beleuchtung nicht glänzender Gegenstände durch das Sonnenlicht, der angegebene Winkel die äuſserste Grenze ausmacht. Bei bedecktem Himmel dürfte man denselben zwei oder dreimal so groſs annehmen. Glänzende Gegenstände bleiben unter viel kleinern Gesichtswinkeln sichtbar. So kann man z. B. einen Silberdrath noch sehr gut sehen, wenn sein scheinbarer Durchmesser nur zwei Secunden beträgt. Selbstleuchtende Objecte, wie z. B. die Sterne, lassen aber, so weit unsere Beobachtungen reichen, gar keine Grenze des Gesichtswinkels zu, da es bis jetzt noch nicht gelungen ist, einen merklichen Durchmesser dieser Gegenstände zu beobachten.

§. 62.

Wir können von den Körpern nichts sehen als ihre Oberflächen, und diese stellen sich dem Auge als Ebenen dar, so daſs in der That der bloſse Sinn des Gesichts uns nicht den Begriff von körperlicher Ausdehnung verschaffen kann.

Betrachtet man daher zwei Körper, von denen der eine eckig, der andere aber von einer continuirlichen krummen Oberfläche eingeschlossen ist, wie z. B. Prisma und Cylinder, Pyramide und Kegel, und erscheinen dieselben dem Auge als in gleiche Grenzen eingeschlossen, wie Prisma und Cylinder in ein Parallelogramm, Pyramide und Kegel in ein Dreieck, so kann man durch das Gesicht nicht unterscheiden, welches der runde und welches der eckige Körper sey.

Sind aber die Grenzen, in welchen das Object eingeschlossen erscheint, verschieden, so wird man auch freilich beide Gegenstände selbst als verschieden anerkennen müssen, allein der Unterschied zwischen Ecke und Krümmung in der Oberfläche selbst würde dem Auge unbemerkbar bleiben.

§. 63.

Der im vorigen Paragraphen aufgestellte Satz, dafs wir vermöge des Gesichts keine körperliche Gestalt, d. h. keine Ausdehnung nach den drei Dimensionen des Raums, unterscheiden können, scheint zwar der Erfahrung zu widersprechen, da ein jeder bekanntlich im Stande ist, bei einem geringen Abstande des Körpers vom Auge, dessen Gestalt ziemlich zu beurtheilen. Allein man mufs bedenken, dafs diese Erkennung der eigentlichen Gestalt des Körpers nicht durch das Auge allein geschieht, sondern wir verbinden, uns selbst unbewufst, die schon früher gemachten Erfahrungen mit einander, die uns das Gesicht und das Gefühl zugleich mittheilten. Da nämlich die Erleuchtung eines Gegenstandes hauptsächlich von einer Seite geschieht, so werden nicht alle Theile seiner Oberfläche gleiche Lage gegen den erleuchtenden Körper, z. B. die Sonne, haben, und da, wie späterhin gezeigt werden wird, die Stärke der Erleuchtung von der Lage der erleuchteten Fläche gegen die einfallenden Strahlen abhängt, indem senkrecht auffallende Strahlen stärker erleuchten, als

schief auffallende, so wird die Oberfläche des gesehenen Körpers an verschiedenen Stellen auch mehr oder weniger erleuchtet erscheinen.

§. 64.

Eckige Körper zeigen eine plötzliche Abstufung des Lichts, die durch die Kanten ihrer Seitenflächen bedingt wird, indem bei dieser Art von Körpern immer ein endlicher Theil der Oberfläche einerlei Lage gegen die einfallenden Sonnenstrahlen hat, also dieser ganze Theil eine gleichförmige Erleuchtung erhält, während Körper mit gekrümmter Oberfläche eine allmälige Abstufung des Lichts zeigen, da bei dieser Art von Körpern jeder unendlich kleine Theil der Oberfläche eine andere Lage gegen die einfallenden Strahlen besitzt.

Haben wir nun schon früher durch das Gefühl uns überzeugt, daſs ein Körper, welcher plötzliche Abwechselungen von Lichtstärke auf seiner Oberfläche darbietet, ein eckiger sey, und im Gegentheil eine durch allmälige Grade abnehmende Erleuchtung einem an einer gekrümmten Oberfläche eingeschlossenen Körper zugehört, so werden wir bei Erblickung von Gegenständen sogleich durch Hülfe dieser gemachten Erfahrungen entscheiden können, ob derselbe eckig oder rund sey.

§. 65.

Da diese Lichtabstufung aber in bedeutenden Entfernungen nicht mehr sichtbar bleibt, so ist einleuchtend, daſs, um die Gestalt eines Körpers richtig beurtheilen zu können, derselbe nicht gar zu weit vom Auge entfernt seyn darf, und es erklärt sich daraus zugleich, warum wir meistentheils alle weit entfernte Gegenstände für rund annehmen, indem bei einem weit entfernten eckigen Körper, die Lichtabstufung nicht mehr als plötzlich abgebrochen, sondern in einander laufend erscheint.

§. 66.

So wenig wir im Stande sind, die wahren Oberflächen der Körper durch das Gesicht auszumitteln, so wenig können wir auch die Entfernungen derselben vom Auge angeben, und alles, was wir vermittelst des Anblicks von Gegenständen über ihre Entfernung urtheilen, beruht bloſs auf der Erinnerung an ähnliche Erscheinungen von Gegenständen, deren Entfernung von uns wirklich durch Messung ausgemittelt wurde, und uns jetzt bei andern Körpern zur Vergleichung dienen *).

Sind die Entfernungen so groſs, daſs dieselben über alle unsere Erfahrungen hinausgehen, so sind wir auch gar nicht im Stande, dieselben zu beurtheilen, wie es z. B. bei den Himmelskörpern der Fall ist, und nur durch ein dunkles Gefühl bewogen, hält man etwa die kleinen Sterne für entfernter als die gröſsern, wozu hauptsächlich wohl der Unterschied ihrer Lichtstärke beitragen mag.

§. 67.

Es dürfte nicht überflüssig seyn, Beispiele anzuführen, aus denen sich die Bestätigung des Satzes ergiebt, daſs die Entfernung eines Körpers durch das Gesicht allein nicht bestimmt werden kann.

Zuerst soll die Erfahrung angeführt werden, die in England an einem jungen Menschen gemacht wurde, welcher blind geboren war, und dem im zwölften Jahre von Chesselden durch die Operation des Staars das Gesicht gegeben wurde, so wie sie Robert Smith in seinem Werke (*a compleat System of Opticks* §. 132 — 134.) erzählt. Es ist zu bemerken, daſs die meisten mit dem Staar behafteten Personen, bei hellem Sonnenlichte einigermaſsen die Farben, vorzüglich weiſs und roth, aber die Umrisse der Gegen-

*) Bei sehr nahen Gegenständen giebt auch die Verschiedenheit in der Richtung der beiden Augenaxen über ihre Entfernung Aufschluſs. G.

stände nicht unterscheiden können. Dasselbe war auch bei dem erwähnten jungen Menschen der Fall; allein die Eindrücke dieser Farben zeigten sich sehr schwach, so dafs er nach der Operation behauptete, die Farben, welche man ihm früher durch ihre Benennung bezeichnet hatte, wären nicht mehr dieselben. Die rothe Farbe schien ihm die schönste von allen, und je heller andere Farben waren, desto angenehmer waren sie ihm; aber das erstemal als er Schwarz sah, erschrak er, doch gewöhnte er sich bald daran. Vorzüglich flöfste ihm ein Neger, den er einige Monate nach der Operation sah, grofsen Schrecken ein. Als er sein Gesicht erhalten hatte, konnte er keinesweges die Entfernungen unterscheiden, und er glaubte, dafs alle Objecte seine Augen berührten. Polirte und regelmäfsige Gegenstände hatten die meiste Annehmlichkeit für ihn, obgleich er über ihre Gestalt kein Urtheil fällen, und auch nicht angeben konnte, worin das Angenehme derselben bestände. Er kannte keine Gestalt, und konnte keinen Körper von dem andern unterscheiden, obgleich dieselben sowohl der Gröfse als der Gestalt nach sehr verschieden waren; sagte man ihm aber, welches die Objecte wären, welche er früher durch das Gefühl gekannt hatte, so hoffte er sie ein andermal wieder zu erkennen; da er aber so viele Gegenstände kennen zu lernen hatte, so vergafs er immer den Unterschied zwischen ihnen. Er war sehr erstaunt, dafs diejenigen Sachen, welche ihm vorher die besten geschienen hatten, nicht auch seinem Auge am angenehmsten vorkamen, und er erwartete, dafs die Personen, welche er am meisten liebte, auch die schönsten wären. Man glaubte Anfangs, dafs er bald verstehen würde, was die Gemälde, die man ihm zeigte, vorstellen sollten, allein man sah in der Folge, dafs dies nicht der Fall gewesen war, denn ungefähr zwei Monate, nachdem ihm der Staar gestochen war, machte er plötzlich die Entdeckung, dafs diese Gemälde Körper vorstellen sollten. Bis dahin hatte er sie blofs

als gefärbte Flächen betrachtet; dann aber war er nicht wenig erstaunt, als er bemerkte, daſs die Gemälde nicht eben so fühlbar wären als die Gegenstände, welche sie darstellten, und er fragte, welcher von beiden Sinnen, das Gesicht oder das Gefühl, trüglich wäre. Als er das Miniaturporträt seines Vaters erblickte, wollte er wissen, was es vorstellte; auch erkannte er die Aehnlichkeit, als man es ihm sagte; nichts desto weniger war er darüber sehr erstaunt, da er nicht begreifen konnte, wie ein so groſses Gesicht in einen so kleinen Raum gebracht werden konnte, indem er sagte, daſs ihm dieses so unmöglich schiene, als eine Tonne voll Flüssigkeit in ein kleines Maaſs zu bringen.

Anfangs vertrug er sehr wenig Licht, und alles, was er sah, schien ihm sehr groſs zu seyn, auch war er nicht im Stande, sich etwas Ausgedehnteres zu denken, als was er eben sah. Er wuſste, daſs das Zimmer, in welchem er sich befand, einen Theil des Hauses ausmachte, und doch konnte er nicht begreifen, daſs das Haus ihm gröſser erscheinen sollte als das Zimmer.

Ehe die Operation an ihm vorgenommen war, glaubte er nicht, daſs der Gebrauch des Gesichts ihm so groſse Vortheile verschaffen würde, um sich deswegen dieser Operation zu unterwerfen, ausgenommen, daſs er dadurch in den Stand gesetzt werden würde, zu lesen und zu schreiben, denn er glaubte, er würde bei dem Spazierengehen im freien Felde nicht mehr Vergnügen haben, als im Garten, wo ihm dasselbe bequem und leicht war; auch bemerkte er, daſs, so lange er blind wäre, ihm der Vortheil bliebe, zur Nachtzeit überall hingehen zu können, was die Sehenden nicht im Stande wären. Er verlor diese Fähigkeit nicht sogleich, als sein Gesicht hergestellt war, und er hatte lange Zeit kein Licht nöthig, um des Nachts im Hause herumzugehen.

Auſser diesem jungen Menschen hatte Chesselden noch mehrere andere operirt, und sie lernten alle auf

dieselbe Art sehen, wie dieser; merkwürdig bleibt es aufserdem, dafs Anfangs keiner im Stande war, seine Augen auf einen besondern Gegenstand zu richten; obgleich sie alle nach einiger Uebung bald diese Fähigkeit erlangten.

§. 68.

Eine andere sehr einfache Erfahrung giebt uns diejenige Erscheinung an die Hand, welche man gewöhnlich das Wasserziehen der Sonne nennt. Ist die Luft sehr mit Dünsten angefüllt, und schickt die Sonne ihre Strahlen durch die Oeffnungen einer dunkeln Wolke, so zeigen sich die in der Luft vorhandenen Dünste erleuchtet, als divergente Streifen, deren Vereinigungspunkt in der Sonne zu liegen scheint.

Die Entfernung der Sonne von uns ist so grofs, dafs die von einem Punkt ihrer Oberfläche ausgehenden Strahlen, innerhalb der ganzen Ausdehnung der Erde, höchstens nur einen Winkel von 17 bis 18 Secunden einschliefsen können, welcher ganz unmerklich ist. Man kann daher ohne Fehler annehmen, dafs die Sonnenstrahlen untereinander parallel sind, und die Abweichung derselben bei dem sogenannten Wasserziehen vom Parallelismus ist daher nicht wirklich, sondern blofs scheinbar.

§. 69.

Da wir nämlich nicht unterscheiden können, wie grofs die Entfernung der verschiedenen Theile dieser Lichtstreifen vom Auge ist, und wir keinen Grund in ihrem Aussehen finden, warum wir einen Theil derselben weiter entfernt setzen sollten, als den andern, so nehmen wir alle als von gleicher Entfernung an, oder projiciren sie wohl auch auf die Fläche der scheinbaren Himmelskugel.

Betrachtet man nun zwei solche neben einander laufende Streifen, so werden dieselben der vorigen Angabe zufolge parallel seyn, d. h. ihre gegenseitige

wirkliche Entfernung ist in allen Punkten dieselbe. Da nun im Allgemeinen die Wolke gegen die Sonne bei dieser Erscheinung eine solche Lage hat, dafs die durch die Oeffnung gehenden Strahlen mit der Sonne in ihrer ganzen Ausdehnung auf derselben Seite vom Beobachter aus sich befinden, so folgt, dafs die untern Theile dieser Lichtstreifen uns näher liegen, als die oben bei der Wolke befindlichen.

§. 70.

Nun ergiebt sich aber aus den frühern Betrachtungen über den scheinbaren Durchmesser und die scheinbare Entfernung zweier Punkte, dafs, wenn zwei Punkte immer dieselbe wirkliche Entfernung von einander haben, ihre scheinbare Entfernung desto gröfser wird, je näher sie dem Auge liegen.

Hieraus folgt, dafs die untern Theile zweier neben einander laufenden Lichtstreifen eine gröfsere scheinbare Entfernung von einander haben, als die obern, und da wir allen Theilen eine gleiche Entfernung vom Auge beilegen, so glauben wir, dafs die untern Theile wirklich weiter von einander entfernt sind, als die obern.

Könnten wir durch andere Erfahrungen die verschiedene Entfernung vom Auge schätzen, so würden uns gewifs auch die Streifen als parallellaufend erscheinen, wie z. B. bei einem langen parallelepipedischen Balken, vor dessen schmalem Ende wir stehen, wir gewifs nicht den obern Theil für schmäler halten, als den untern, obgleich hier ganz derselbe Fall rücksichtlich der scheinbaren Breite eintritt, als bei den zwei Lichtstreifen.

§. 71.

Man kann durch folgende Betrachtungen leicht berechnen, wie grofs die scheinbare Entfernung zweier Lichtstreifen an einer gegebenen Stelle ist. Es sey *AB* (Fig. 9.) die Oberfläche der Erde, welche wir der geringen Ausdehnung desjenigen Theils, welcher hierbei

in Betracht kommt, als eben annehmen können; SC sey ein Sonnenstrahl, welcher mit der Horizontalebene den Winkel $SCB = H$ macht, der der Höhe der Sonne zur Zeit des Phänomens gleich ist; in D sey die Oeffnung der Wolke, durch welche der Sonnenstrahl geht, und die Entfernung derselben von der Erde, $DE = h$; in O befinde sich der Beobachter, und der Winkel DOE, welchen die nach der Oeffnung der Wolke gezogene Gesichtslinie mit der Horizontallinie macht, werde durch α bezeichnet; W sey ein beliebiger Punkt in dem Strahlencylinder, und die nach ihm gezogene Gesichtslinie OW mache mit der Horizontallinie den Winkel $WOC = \varphi$.

Man hat nun im Dreieck DOW die Proportion:

$$DO : WO = \sin OWD : \sin ODW.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} DO &= DE \operatorname{cosec} DOE = h \,.\, \operatorname{cosec} \alpha \\ ODW &= DCE - DOE = H - \alpha \\ OWD &= 180^0 - DOW - DCE + DOE \\ &= 180^0 - \alpha + \varphi - H + \alpha \\ &= 180^0 - H + \varphi, \end{aligned}$$

folglich wenn man diese Werthe in vorige Proportion substituirt

$$h \operatorname{cosec} \alpha : WO = \sin(H - \varphi) : \sin(H - \alpha)$$

und hieraus

$$WO = \frac{h \,.\, \sin(H - \alpha)}{\sin \alpha \,.\, \sin(H - \varphi)}$$

§. 72.

Dieser Ausdruck gilt eigentlich bloſs für denjenigen Strahl, der eine solche Lage hat, daſs die durch ihn und das Auge gelegte Ebene senkrecht auf der Horizontalebene steht. Allein da es bei einer Untersuchung dieser Art nicht weiter auf völlig genaue Werthe, sondern auf eine bloſse Näherung ankommt, so kann man diese Ausdrücke für alle diejenigen Strahlen gebrauchen, welche nicht zu weit von der durch das Auge und die

Sonne gelegten, auf dem Horizont senkrecht stehenden Ebene entfernt sind.

§. 73.

Nimmt man nun einen zweiten Lichtstreifen, der dem ersten in der Entfernung $= e$ parallel läuft, so wird die Entfernung desjenigen Theils desselben, der eben die Höhe über der Oberfläche der Erde hat, als der Punkt W, vom Auge auch $= WO$ seyn. Die scheinbare Entfernung dieser beiden Punkte von einander bezeichne man durch ω, so hat man ein gleichschenkliges Dreieck zu betrachten, in welchem die drei Seiten gegeben sind, und der der Basis gegenüberliegende Winkel ω, welcher die scheinbare Entfernung dieser Punkte ausmacht, gesucht wird. Man hat demnach

$$e = 2\,WO\,.\sin\tfrac{1}{2}\omega,$$

also wenn man den vorhin gefundenen Werth von WO hierin substituirt

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h}\cdot\frac{\sin(H-\varphi)\,.\sin\alpha}{\sin(H-\alpha)}.$$

Bezeichnet man den an der Wolke Statt findenden Werth von ω durch ω', so ist daselbst $\varphi = \alpha$, also auch

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega' = \frac{e}{2h}\cdot\sin\alpha.$$

Ferner sey der Werth von ω, welcher an der Oberfläche der Erde Statt findet $= \omega''$, so erhält man

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega'' = \frac{e}{2h}\cdot\frac{\sin H\,.\sin\alpha}{\sin(H-\alpha)},$$

indem daselbst $\varphi = o$ wird. Hieraus ergiebt sich, indem die Werthe von $\sin\tfrac{1}{2}\omega'$, $\sin\tfrac{1}{2}\omega''$ mit einander multiplicirt werden

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega'\,.\sin\tfrac{1}{2}\omega'' = \frac{ee}{4hh}\cdot\frac{\sin\alpha^2\,.\sin H}{\sin(H-\alpha)}.$$

Sucht man hieraus den Werth von $\frac{e}{2h}$, und substituirt ihn in die Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h}\cdot\frac{\sin(H-\varphi)\,.\sin a}{\sin(H-\alpha)},$$

so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \sin (H - \varphi) \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}\omega' \cdot \sin \frac{1}{2}\omega''}{\sin H \cdot \sin (H - \alpha)}}.$$

In dieser Gleichung sind alle Gröfsen, welche die unbekannte ω ausdrücken, mefsbar, so dafs für jeden Werth von φ der correspondirende Werth von ω gefunden werden kann.

§. 74.

Zuweilen zeigt sich die Erscheinung des Wasserziehens der Sonne so, dafs die angegebenen Lichtstreifen nicht in der Sonne, sondern in einem derselben gegenüber liegenden Punkt ihren Vereinigungspunkt zu haben scheinen. Diese Erscheinung, welche freilich, gegen die erste genommen, sehr selten vorkommt, läfst sich auf gleiche Weise als die vorige erklären; nur ist es hierbei nöthig, dafs die Lichtstreifen über dem Beobachter weggehen, und er sich also zwischen der Sonne und demjenigen Punkt der Erdoberfläche befindet, wo die Strahlen selbige treffen. Unter dieselbe Kategorie gehört auch die scheinbare Convergenz der Strahlen gegen das Zenith bei dem Nordlicht.

§. 75.

Das Phänomen, dafs jede ausgedehnte Fläche in der Entfernung zu steigen scheint, wie z. B. die Oberfläche des Meers, weit in grader Linie fortlaufende Chausseen, läfst sich ebenfalls vermittelst des Gesichtswinkels erklären. Wir vergleichen nämlich jede andere Linie ihrer Lage nach, mit einer durch das Auge nach unserer Schätzung gelegten Horizontallinie. Da nun die Entfernung einer andern, unter dieser liegenden Horizontallinie von der ersten scheinbar immer abnimmt, so glauben wir, die untere Linie nähere sich der ersten wirklich, und steige daher in der Entfernung aufwärts. Aus einem gleichen Grunde scheinen hohe senkrechte Mauern, denen man sehr nahe steht, oben überzuhängen, indem ihre scheinbare Entfernung von der

durch das Auge gelegten Verticallinie in der Höhe abnimmt.

§. 76.

Eine sonderbare optische Erscheinung ist die Gestalt des Himmels, der uns im Scheitelpunkt viel näher zu seyn scheint, als im Horizont.

Leicht zu erklären würde diese Erscheinung seyn, wenn sie bloſs bei einem mit Wolken bedeckten Himmel Statt fände, denn dann sind die im Horizont befindlichen Wolken wirklich viel weiter von uns entfernt, als die im Scheitel stehenden. Es seyen AB, DE (Fig. 10.) zwei aus dem Mittelpunkt C beschriebene concentrische Kreisringe, von denen der innere AB die Oberfläche der Erde, der äuſsere DE die über derselben befindliche Wolkendecke bezeichnet. In G sey der Beobachter, so giebt der nach F verlängerte Halbmesser, für G den Scheitelpunkt oder das Zenith an, und FG ist die Entfernung der daselbst befindlichen Wolken.

Zieht man an G die Berührungslinie GH, welche in H die Wolkendecke schneidet, so wird HG die Entfernung der im Horizont befindlichen Wolken vom Beobachter seyn. Man setze $FG = h$, $HG = x$, den Halbmesser der Erde $GC = a$, so ist bekanntlich

$$h : x = x : 2a - h.$$

Hieraus wird mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von h,

$$x = \sqrt{2ah},$$

oder auch

$$h : x = 1 : \sqrt{\frac{2a}{h}}.$$

§. 77.

Wir wollen nun die senkrechte Höhe der Wolken über der Erde zu einer halben Meile annehmen, welches wohl bei ganz bedecktem Himmel das Maximum ist, und da a ungefähr 860 Meilen beträgt, so hat man

$$h : x = 1 : \sqrt{3440},$$

also sind die Wolken im Horizont ungefähr 59 mal so weit von uns entfernt, als im Scheitel, und wenn die Wolken niedriger stehen, als eine halbe Meile, so wird dieses Verhältnifs noch gröfser.

Allein gewifs Niemand wird glauben, dafs die Wolkendecke so viel mal weiter von ihm im Horizont entfernt sey, als im Zenith, und höchstens wird er erstere Entfernung viermal gröfser schätzen, als die letztere, und zwar blofs aus der Ursache, weil im Horizont alles weniger hell erscheint, als im Zenith, und wir immer geneigt sind, bei übrigens gleichen Zuständen, dem weniger hellen Körper eine gröfsere Entfernung beizulegen, als dem stärker glänzenden.

Die eingedrückte Gestalt des Himmels läfst sich also daraus nicht erklären, dafs wir die Idee über seine Gestalt bei einem mit Wolken bedeckten Himmel etwa auch auf den heitern Himmel übertrügen. Am wahrscheinlichsten ist es, dafs die gröfsere Entfernung, die wir dem Horizont beilegen, blofs von dem trüben und dunklen Aussehen herkommt, das auch bei unbedecktem Himmel die blaue Farbe daselbst besitzt.

§. 78.

Es ist am einfachsten, die scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes als ein Kugelsegment anzunehmen, dessen Mittelpunkt weit unter den Füfsen des Beobachters liegt, und es kommt daher blofs darauf an, die relative Lage dieses Mittelpunkts zu finden. Hierzu stellte Robert Smith folgende Beobachtung an: Er untersuchte, welche Lage die Sonne oder ein Stern über dem Horizont haben müfste, damit dieses Object scheinbar sich in der Mitte zwischen dem Scheitelpunkt und dem Horizont befand, und er beobachtete, dafs dies der Fall war, sobald die nach dem Object gezogene Gesichtslinie einen Winkel von 23 Grad mit dem Horizont machte.

§. 79.

Um nach dieser Beobachtung die Gestalt des Himmelsgewölbes zu verzeichnen, hat man folgende Aufgabe aufzulösen. Es sind zwei Linien (Fig. 11.) AB und DE gegeben, welche sich in D unter rechten Winkeln schneiden; ferner ist aus D eine Linie FD gezogen, die mit der ED einen Winkel $EDF = 23^0$ macht. Man soll einen Punkt C auf der Linie AB so finden, daſs, wenn man mit dem Halbmesser AC einen Kreisbogen beschreibt, derselbe die Linie FD so schneidet, daſs $EF = AF$ wird.

Man setze die Winkel $EDF = \alpha$, $AD = h$, und ziehe die Linien CF und CE, bezeichne den Winkel $FCA = ECF$ durch φ, so hat man in den Dreiecken FAD, FED,

$$AF^2 = FD^2 + AD^2 - 2AD \,.\, FD \,.\, \cos FDA$$
$$EF^2 = FD^2 + ED^2 - 2FD \,.\, ED \,.\, \cos EDF.$$

Da nun $AF = EF$ seyn muſs, so wird

$$AD^2 - 2AD \,.\, FD \,.\, \cos FDA$$
$$= ED^2 - 2FD \,.\, ED \,.\, \cos EDF.$$

Dies kann man auch so schreiben

$$\frac{AD^2}{EC^2} - 2 \cdot \frac{AD}{EC} \cdot \frac{FD}{EC} \cdot \sin \alpha$$
$$= \frac{ED^2}{EC^2} - 2 \cdot \frac{ED}{EC} \cdot \frac{FD}{EC} \cdot \cos \alpha,$$

wenn man bemerkt, daſs

$$FDA = 90^0 - EDF = 90^0 - \alpha$$

wird. Ferner hat man im Dreieck FDC

$$FD : FC = \sin FCD : \sin FDC$$
$$\frac{FD}{FC} = \frac{\sin FCD}{\sin FDC} = \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha}.$$

Auſserdem ist noch

$$\frac{ED}{EC} = \sin 2\varphi, \quad \frac{AD}{EC} = 1 - \cos 2\varphi,$$

folglich, wenn man die Werthe dieser drei Verhältnisse in vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$(1 - \cos 2\varphi)^2 - 2 \operatorname{tang} \alpha \sin \varphi \, (1 - \cos 2\varphi)$$
$$= \sin 2\varphi^2 - 2 \sin \varphi \,.\, \sin 2\varphi.$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch $(1 - \cos 2\varphi)^2$ und bemerkt, daſs

$$\frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \cot \varphi$$
$$\frac{\sin \varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \tfrac{1}{2} \operatorname{cosec} \varphi,$$

so erhält man

$$1 - \operatorname{tang} \alpha \,.\, \operatorname{cosec} \varphi = \cot \varphi^2 - \cot \varphi \,.\, \operatorname{cosec} \varphi$$

oder auch

$$\cos \varphi = 1 + \operatorname{tang} \alpha \sin \varphi - 2 \sin \varphi^2.$$

Quadrirt man diese Gleichung, ordnet sie nach den Potenzen von $\sin \varphi$ und dividirt durch $4 \sin \varphi$, so wird:

$$\sin \varphi^3 - \operatorname{tang} \alpha \,.\, \sin \varphi^2$$
$$- \tfrac{1}{4} (3 - \operatorname{tang} \alpha^2) \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha = o;$$

also führt die Auflösung der Aufgabe auf eine Gleichung des dritten Grades.

§. 80.

Will man dieselbe durch Näherung auflösen, so giebt man ihr bequemer folgende Form:

$$\sin \tfrac{3}{2} \varphi = \cos \tfrac{1}{2} \varphi \,.\, \operatorname{tang} \alpha.$$

Denn da in der Gleichung

$$\cos \varphi = 1 + \operatorname{tang} \alpha \,.\, \sin \varphi - 2 \sin \varphi^2$$

statt $1 - 2 \sin \varphi^2$, $\cos 2\varphi$ gesetzt werden kann, so kommt

$$\cos \varphi - \cos 2\varphi = \operatorname{tang} \alpha \,.\, \sin \varphi.$$

Ferner hat man

$$\cos \varphi - \cos 2\varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, \sin \tfrac{3}{2}\varphi$$
$$\sin \varphi = 2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

und wenn man diese Werthe substituirt, so erhält man die angegebene Form. Vermittelst einiger Versuche findet man, daſs der Gleichung

$$\sin \tfrac{3}{2}\varphi = \operatorname{tang} \alpha \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\varphi$$

ungefähr Genüge geleistet wird, wenn man bei dem Statt findenden Werthe von $\alpha = 23^0$, $\varphi = 16\tfrac{1}{2}^0$ nimmt.

Da nun

$$\frac{ED}{EC} = \sin 2\varphi, \quad \frac{AD}{EC} = 1 - \cos 2\varphi$$

war, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{ED}{AD} = \cot \varphi = 3{,}4;$$

also wird der Himmel im Horizont ungefähr drei und ein halb mal entfernter erscheinen, als im Scheitelpunkt.

§. 81.

Will man hingegen die Gleichung vollständig auflösen, so setze man zuerst

$$\text{tang}\, \alpha = 3 \,\text{tang}\, \beta,$$

so wird aus der Gleichung

$$\sin \varphi^3 - \text{tang}\, \alpha \,.\, \sin \varphi^2$$
$$- \tfrac{1}{4} (3 - \text{tang}\, \alpha^2) \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \text{tang}\, \alpha = o$$

folgender Ausdruck

$$\sin \varphi^3 - 3 \,\text{tang}\, \beta \,.\, \sin \varphi^2$$
$$- \tfrac{3}{4} (1 - 3 \,\text{tang}\, \beta^2) \sin \varphi + \tfrac{3}{2} \text{tang}\, \beta = o$$

und wenn man hierin

$$\sin \varphi = x + \text{tang}\, \beta$$

setzt, so erhält man

$$x^3 = \tfrac{3}{4} x (1 + \text{tang}\, \beta^2) - \tfrac{1}{4} \text{tang}\, \beta (3 + \text{tang}\, \beta^2).$$

Soll diese Gleichung nach der Cardanischen Regel auflösbar seyn, so findet man leicht, da hiernach

$$\tfrac{1}{16} \text{tang}\, \beta^2 (3 + \text{tang}\, \beta^2)^2 > (\tfrac{3}{4})^3 \tfrac{4}{27} \,.\, (1 + \text{tang}\, \beta^2)^3$$

seyn mufs, dafs in diesem Fall

$$6 \,\text{tang}\, \beta^2 + 3 \,\text{tang}\, \beta^4 > 1$$

oder wenn man diese Gleichung auflöst,

$$\text{tang}\, \beta > \sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}} - 1\right)}$$

verlangt wird. Dies gäbe tang $\beta > 0{,}393$, während nach dem angenommenen Werthe von α, tang β nur $= 0{,}141$ wird. Man mufs daher die Gleichung durch die trigonometrischen Functionen auflösen. Setzt man nämlich

$$x = r \,.\, \sin \omega,$$

so wird vorige Gleichung

$$\sin \omega^3 = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{\sin \omega}{rr} (1 + \text{tang}\, \beta^2) - \tfrac{1}{4} \frac{\text{tang}\, \beta}{r^3} (3 + \text{tang}\, \beta^2).$$

Man hat aber auch

$$\sin 3\,\omega = 3 \sin \omega - 4 \sin \omega^3$$

und hieraus

$$\sin \omega^3 = \tfrac{3}{4} \sin \omega - \tfrac{1}{4} \sin 3\,\omega.$$

Vergleicht man diese beiden cubischen Gleichungen mit einander, so sieht man, dafs, wenn selbige identisch werden sollen, die beiden Gleichungen

$$\frac{1 + \text{tang}\,6^2}{rr} = 1$$

$$\frac{\text{tang}\,6}{r^3}\,(3 + \text{tang}\,6^2) = \sin 3\,\omega$$

Statt finden müssen. Die erste giebt:

$$r = \frac{1}{\cos 6}$$

und durch Substitution dieses Werthes wird die zweite:

$$\sin 3\,\omega = \sin 6\,(3 \cos 6^2 + \sin 6^2)$$
$$= \sin 6\,(2 + \cos 2\,6).$$

Vermittelst der Gleichung $\text{tang}\,6 = \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\alpha$, wo $\alpha = 23^0$ ist, findet man nun

$$6 = 8^0\;3'\;12''$$

und hieraus ergiebt sich

$$3\,\omega = 24^0\;30'\;21'',$$

also finden für ω folgende drei Werthe Statt

$$\omega = 8^0\;10'\;7''$$
$$\omega = 128^0\;10'\;7''$$
$$\omega = 248^0\;10'\;7''$$

da bekanntlich der Werth von $3\,\omega$ auch um 360 und 720 Grad vermehrt werden kann. Vermittelst der Gleichung $x = r \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\cos 6}$ ergiebt sich dann

$$x = +\,0{,}143502$$
$$x = +\,0{,}794039$$
$$x = -\,0{,}937528$$

und hieraus ergeben sich endlich die Werthe von $\sin \varphi$, durch die Gleichung $\sin \varphi = x + \text{tang}\,6$

$$\sin\varphi = +\ 0{,}284994$$
$$\sin\varphi = +\ 0{,}935531$$
$$\sin\varphi = -\ 0{,}796036.$$

Hierzu gehören die Werthe von φ

$$\varphi = 16^0\ 33'\ 30'' \qquad \varphi = 163^0\ 26'\ 30''$$
$$\varphi = 69^0\ 18'\ 50'' \qquad \varphi = 110^0\ 41'\ 10''$$
$$\varphi = 232^0\ 45'\ 10'' \qquad \varphi = 307^0\ 14'\ 50''.$$

Der Natur der Aufgabe nach kann aber bloſs der Winkel gebraucht werden, der kleiner als 45^0 ist.

§. 82.

Man kann nun leicht eine Gleichung finden, welche allgemein für jede wahre Höhe des Objects über dem Horizont seine scheinbare Entfernung im Verhältniſs zu AD oder ED giebt. Zu diesem Ende sey (Fig. 12.) C der Mittelpunkt eines mit beliebigem Halbmesser beschriebenen Kreises EAB, in welchem der Durchmesser EB gezogen ist. Man mache den Winkel ACE dem vorigen §. zufolge $= 2\varphi = 33^0$, fälle das Perpendikel AD, so wird der Bogen EA für einen in D befindlichen Beobachter die Gestalt des scheinbaren Himmelsgewölbes angeben. Es sey M ein beliebiger Punkt des Bogens AE, so hat man im Dreiecke MDC:

$$MC^2 = MD^2 + DC^2 - 2MD.DC.\cos MDC.$$

Man bezeichne den Winkel AMD durch ψ, so giebt ψ die wahre Höhe des Punktes M über dem Horizont an, nun ist $MDC = 90^0 + \psi$ also:

$$\cos MDC = -\sin\psi,$$

folglich, wenn man diesen Werth in die vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$MD^2 + 2CD.MD.\sin\psi + CD^2 = MC^2.$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch ED^2, und setzt $\frac{MD}{ED} = r$, so daſs also der Werth von r immer die Einheit übertrifft, so wird

$$rr + 2r\sin\psi\cdot\frac{CD}{ED} + \frac{CD^2}{ED^2} = \frac{MC^2}{ED^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{CD}{ED} = \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$$

$$\frac{MC}{ED} = \frac{1}{1 - \cos 2\varphi},$$

folglich wird

$$rr + 2r \sin\psi \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man, wenn man bei der Radicalgröfse blofs das hier anwendbare positive Vorzeichen nimmt,

$$r = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi^2 \cos\psi^2} - \cos 2\varphi \,.\, \sin\psi}{1 - \cos 2\varphi}$$

Um diese Formel für die Rechnung geschickter zu machen, führe man einen Hülfswinkel θ, so ein, dafs

$$\cos 2\varphi \,.\, \cos\psi = \cos\theta,$$

so läfst sich die Gleichung so schreiben:

$$r = \frac{\sin\theta - \cos\theta \operatorname{tang}\psi}{1 - \dfrac{\cos\theta}{\cos\psi}}$$

$$= \frac{\sin\theta \,.\, \cos\psi - \cos\theta \,.\, \sin\psi}{\cos\psi - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin(\theta - \psi)}{2 \sin\frac{1}{2}(\theta - \psi) \sin\frac{1}{2}(\theta + \psi)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta - \psi)}{\sin\frac{1}{2}(\theta + \psi)}$$

§. 83.

Setzt man in dieser Gleichung statt 2φ seinen numerischen Werth von 33 Grad, so kann man für jeden Werth von ψ den entsprechenden Werth von r berechnen, d. h. für jede wahre Höhe eines Punktes des Himmelsgewölbes ergiebt sich das Verhältnifs seiner scheinbaren Entfernung zur scheinbaren Entfernung des Scheitelpunktes. Der bessern Uebersicht wegen ist dieses Verhältnifs in folgender Tabelle von 10 zu 10 Graden berechnet:

$\psi = 0^0$,	$r = 3{,}38$;		
10^0,	$2{,}59$;		
20^0,	$2{,}04$;		
30^0,	$1{,}66$;		
40^0,	$1{,}41$;		
50^0,	$1{,}24$;		
60^0,	$1{,}13$;		
70^0,	$1{,}05$;		
80^0,	$1{,}01$;		
90^0,	$1{,}00$.		

§. 84.

Endlich kann man auch noch die Relation zwischen der wahren Höhe eines Punktes der Himmelskugel über dem Horizont, und der scheinbaren Höhe, wie wir sie wegen der eingedrückten Gestalt des Himmelsgewölbes schätzen, auffinden. Nehmen wir z. B. den Punkt M (Fig. 12.), so schätzen wir dessen Höhe darnach, daſs wir die Länge des Bogens AM vom Horizont an, mit der Länge AE vergleichen. Bezeichnen wir also die scheinbare Höhe des Punktes M durch ψ', so legen wir derselben in Graden ausgedrückt, einen Werth bei

$$\psi' = 90^0 \cdot \frac{AM}{AE},$$

während die wahre Höhe desselben Punktes durch den Winkel $MDA = \psi$ angegeben wird. Es ist also bloſs nöthig, die Länge der Bogen AM und AE zu kennen, so erhält man die scheinbare Höhe des Punktes M. Hierzu hat man zuerst

$$AE = \frac{2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Ferner wird im Dreieck ADM, da daselbst

$$AD = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$$

ist, (wie man leicht aus der Gleichung

$$r = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi^2 \cos \psi^2} - \cos 2\varphi \,.\, \sin \psi}{1 - \cos 2\varphi}$$

findet, indem man in derselben $\psi = o$ setzt),

$$AM^2 = \frac{\sin 2\varphi^2}{(1 - \cos 2\varphi)^2} + rr - 2r \frac{\sin 2\varphi \cdot \cos \psi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Aus dem Dreieck AMC ergiebt sich dann

$$\sin \tfrac{1}{2} ACM = \frac{AM}{2AC}$$

$$= AM \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{2},$$

weil der Halbmesser des Kreises durch $\frac{1}{1 - \cos 2\varphi}$ ausgedrückt wird. Nachdem auf diese Art der Winkel ACM gefunden ist, ergiebt sich die Länge des Bogens AM selbst.

§. 85.

Aus dieser Darstellung der Gestalt der eingedrückten Himmelskugel ergiebt sich auch die Erklärung der Erscheinung, warum die Sonne und der Mond am Horizont einen viel gröſsern Durchmesser zu haben scheinen, als wenn sie am Himmel höher aufgestiegen sind. Genau genommen müſste der Durchmesser beider Himmelskörper, wenn sie sich im Horizont befinden, kleiner erscheinen, als wenn sie dem Zenith näher stehen, da sie im Horizont eine gröſsere Entfernung von uns haben, und der frühern Entwickelung zufolge der scheinbare Durchmesser eines Objects abnimmt, wenn seine Entfernung vom Auge wächst. Bei der Sonne ist dieser Unterschied unmerklich, allein bei dem Mond kann man durch Messungen wirklich finden, daſs sein Durchmesser vom Horizont an bei seinem Aufsteigen zunimmt. Die angeführte Erscheinung kann also nicht einer wirklichen Vergröſserung des scheinbaren Durchmessers, sondern bloſs unserer Einbildung zugeschrieben werden. Da wir nämlich über die wahre Entfernung der Sonne und des Mondes kein Urtheil fällen können, so setzen wir sie in ihren verschiedenen

Stellungen jedesmal in die Entfernung von uns, welche das Himmelsgewölbe daselbst zu haben scheint.

Das Bild, welches auf der Netzhaut entsteht, indem die Strahlen der Sonne oder des Mondes ins Auge fallen, bleibt bei jeder Höhe dieser Himmelskörper von einerlei Gröfse, wenn wir von der erwähnten geringen Veränderung abstrahiren, die dem blofsen Auge wohl immer unmerklich ist. Indem wir uns aber vorstellen, der Himmelskörper nähere sich uns bei seinem Aufsteigen, so machen wir in Gedanken unwillkürlich den Schlufs, der Durchmesser des Himmelskörpers habe sich verkleinert, und zwar in dem Maafse, in welchem wir uns diesen Körper genähert vorstellen. Dasselbe gilt auch von der scheinbaren Entfernung zweier Sterne von einander, die hoch am Himmel viel näher bei einander zu stehen scheinen, als bei ihrem Aufgang oder Untergang.

Von der Bewegung des Lichts und den aus derselben entstehenden Erscheinungen.

§. 86.

Das Licht pflanzt sich vom leuchtenden Punkt bis zum Auge nicht augenblicklich fort, sondern es vergeht eine der Entfernung des Objects proportionale Zeit, ehe ein aus dem Object ausgeflossenes Lichttheilchen zum Auge gelangt. Sobald sowohl das Object als auch der Beobachter ruht, wird es in der Beobachtung der Richtung, nach welcher das Object gesehen wird, keinen Unterschied machen, ob das Licht in einer endlichen, oder in einer unendlich kleinen Zeit von demselben in das Auge gelangt; allein sobald eins derselben, das Auge oder das Object, oder beide zugleich in Bewegung sind, und ihre Geschwindigkeit mit der des Lichts in einem merklichen Verhältnisse steht, wird auch die beobachtete Richtung des Lichtstrahls, oder die daraus gefolgerte Lage des Objects, nicht mit der wirklichen Lage desselben übereinstimmen, welche es dann haben würde, wenn die Geschwindigkeit des Lichts unendlich groſs wäre. Der Winkel, welchen diese beiden Richtungen mit einander bilden, wird die Aberration oder die Abirrung des Lichts genannt.

§. 87.

Die Geschwindigkeit des Lichts wurde zuerst von Olaus Römer, vermittelst der Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten entdeckt. Die-

ser Planet wird nämlich auf seiner Bahn um die Sonne von vier kleinern Nebenplaneten begleitet, die ungefähr die Gröſse unsers Mondes haben. Ihre Bahnen, die beinahe Kreise bilden, in deren Mittelpunkt sich Jupiter befindet, machen nur sehr kleine Winkel mit der Bahn des Jupiters um die Sonne. Da nun Jupiter als ein dunkler Körper von der Sonne erleuchtet wird, so muſs er hinter sich einen kegelförmigen Schatten werfen, dessen Spitze mit der durch die Mittelpunkte des Jupiters und der Sonne gezogenen graden Linie zusammenfällt, und die Trabanten sind dem Hauptkörper nahe genug, daſs der erste oder nächste derselben, bei jedem seiner Umläufe, der ungefähr 42 Stunden beträgt, in den Schatten des Jupiters tritt, und hierdurch verfinstert wird.

§. 88.

Ein Beobachter auf der Erde wird nun, wenn er sich der Linie, welche die Mittelpunkte des Jupiters und der Sonne verbindet, nicht zu nahe befindet, dieses Verschwinden der Trabanten beobachten, und die Zeit angeben können, zu welcher es geschieht. Man fand nun, daſs, wenn die Erde in ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne sich dem Jupiter näherte, die Unterschiede der beobachteten Zeiten, welche von einer Verfinsterung bis zur folgenden verliefen, kleiner waren, als die Unterschiede, welche dann Statt fanden, wenn sich die Erde vom Jupiter entfernte. Diese Erscheinung läſst sich vermittelst der Annahme, daſs das Licht eine gewisse Zeit braucht, um vom Jupiter zur Erde zu gelangen, leicht erklären.

§. 89.

Um dies zu zeigen, sey S (Fig. 13.) der Mittelpunkt der Sonne, um welchen zwei Kreise beschrieben sind, von denen der innere die Bahn der Erde, der äuſsere die des Jupiters vorstellt. In K befinde sich der Jupiter, während sich die Erde zu derselben

Zeit in T befinden mag. Der um K beschriebene kleine Kreis stelle die Bahn des ersten Trabanten vor, der so eben in den Schattenkegel des Jupiters tritt. Die Zeit, zu welcher dies geschieht, sey $= Z$; allein diese ist es nicht, welche der Beobachter auf der Erde zählt, wenn wir annehmen, das Licht komme nicht augenblicklich von M nach T. Es sey daher c der Weg, den das Licht in einer Zeitsecunde zurücklegt, oder die Geschwindigkeit des Lichts, die wir hier als gleichförmig annehmen, so mufs, da die ganze Reihe von Lichtstrahlen, welche auf der Linie MT liegen, erst noch ins Auge gleichsam abläuft, die Verfinsterung erst nach so viel Secunden gesehen werden, als die Gröfse c in der Entfernung MT enthalten ist. Die Beobachtungszeit der ersten Finsternifs wird also durch $Z + \frac{MT}{c}$ ausgedrückt werden.

§. 90.

Nachdem der Trabant seinen Umlauf wieder vollendet hat, tritt er von Neuem in den Schatten des Jupiters, und wenn wir die Zeit seines Umlaufs durch t bezeichnen, so wird die wahre Zeit der zweiten Verfinsterung durch $Z + t$ ausgedrückt seyn. Da der Ort des Jupiters sich langsam ändert, indem er erst in zwölf Jahren seinen Umlauf um die Sonne vollendet, so können wir denselben in der vorigen Lage beibehalten, ohne die Allgemeinheit der folgenden Schlüsse zu mindern.

Während der Zeit t hat aber die Erde ihren Ort geändert, und wir wollen annehmen, sie habe sich dem Jupiter genähert, und sey nach T' gekommen. Um nun die Zeit der Beobachtung der zweiten Finsternifs für den auf der Erde befindlichen Beobachter zu erhalten, müssen wir jetzt die Zeit zu der wahren Zeit $Z + t$ addiren, welche verfliefst, während das Licht den Raum MT' durchläuft. Diese ist $= \frac{MT'}{c}$. Man

hat daher die Zeit der Beobachtung der zweiten Finsternifs auf der Erde

$$= Z + t + \frac{MT'}{c}.$$

Zieht man von dieser die Zeit der Beobachtung der ersten Finsternifs ab, so bleibt

$$t - \frac{MT - MT'}{c},$$

und da $MT > MT'$ angenommen wurde, so ist dieser Unterschied kleiner als t.

§. 91.

Hätte sich hingegen die Erde in der Zwischenzeit der ersten und zweiten Beobachtung vom Jupiter entfernt, so dafs sie, statt nach T' zu gehen, nach T'' gekommen wäre, so hätte man den Unterschied der Beobachtungszeiten

$$= t - \frac{MT - MT''}{c}$$

gefunden. Da aber $MT < MT''$, so wird $MT - MT''$ negativ, also die Zwischenzeit

$$t + \frac{MT'' - MT}{c}$$

gröfser als t. Durch diese Untersuchung ergiebt sich ganz deutlich, dafs die im vorigen Paragraphen angegebene Ungleichheit der Zwischenzeit der Beobachtungen durch die Annahme erklärt wird, dafs das Licht sich mit einer endlichen Geschwindigkeit bewege, und die weitere Discussion der Beobachtungen hat gezeigt, dafs dasselbe den Raum zwischen der Sonne und der Erde, wenn beide Körper in ihrer mittlern Entfernung sich befinden, in einer Zeit von 493 Secunden durchlaufe.

§. 92.

Wir wollen nun näher untersuchen, in wiefern die nicht augenblickliche Fortpflanzung des Lichts einen Unterschied in der beobachteten Richtung des Licht-

strahls und der nach dem Object vom Auge gezogenen Linie hervorbringt, sobald man annimmt, daſs entweder das Object oder das Auge, oder auch beide zugleich, nach gegebenen Richtungen sich im Raume bewegen. Die Auflösung dieser Aufgabe ist für die astronomischen Wissenschaften von der gröſsten Wichtigkeit.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo der leuchtende Körper unbeweglich ist, und das Auge nach einer gegebenen Richtung fortrückt. Die Richtung eines Lichtstrahls können wir auf keine andere Art bestimmen, als daſs wir die Lage derjenigen graden Linie angeben, die zwei Punkte des Lichtstrahls, oder zwei auf einander folgende Lagen des Lichttheilchens in seiner gradlinigen Bahn mit einander verbindet. Hierzu bedient man sich entweder der Dioptern oder des Fernrohrs; bei ersterm Instrument sind diese beiden festen Punkte die Oeffnung in dem Oculardiopter und der Durchschnittspunkt der Fäden in dem Objectivdiopter; bei dem Fernrohr ist der eine Punkt die Mitte des Objectivglases, der andere der Durchschnitt der Fäden im Brennpunkt. Sind diese Instrumente nun nach irgend einem Object gerichtet, so legen wir dem von selbigem herkommenden Lichtstrahl dieselbe Lage bei, welche das Lineal der Dioptern oder die Axe des Fernrohrs hat. Wir nehmen nun an, dieses Instrument bewege sich mit dem Auge so fort, daſs es immer seiner ersten Richtung parallel bleibt, wenigstens während der Zeit, welche der Lichtstrahl zubringt, um entweder die Länge der Dioptern oder die Axe des Fernrohrs zu durchlaufen.

§. 93.

Es sey nun LO (Fig. 14.) die Lage des Fernrohrs zu der Zeit, wo der von einem zu beobachtenden Object herkommende Lichtstrahl die Mitte des Objectivglases in L trifft; die Richtung der Bewegung des Auges sey von O nach P. Während der Lichtstrahl das Fernrohr durchläuft, wird sich das Auge oder der

Durchschnittspunkt der Fäden nicht mehr in O befinden, sondern nach O' fortgegangen seyn, so daſs die jetzige Lage des Fernrohrs durch die Linie $O'L'$, welche mit OL parallel geht, angedeutet wird.

Da nun das in grader Linie fortgehende Lichttheilchen einmal im Punkt L, das anderemal im Punkt O' sich befand, so muſs es natürlicher Weise den Weg LO' zurückgelegt haben, und das Object, von dem der Lichtstrahl herkommt, in der Verlängerung der Linie $O'L$ liegen, während die Beobachtung uns die Linie $O'L'$ oder OL als die Richtung angiebt, in welcher das Object liegen soll. Der Winkel $L'O'L$ wird also die Aberration des Lichts seyn. Die Linie $L'O'$ giebt die scheinbare Lage, die Linie $O'L$ die wahre Lage des Objects an.

Man sieht übrigens, daſs das Fernrohr immer nach derjenigen Gegend geneigt werden muſs, wohin die Bewegung des Beobachters gerichtet ist.

§. 94.

Bezeichnet man den Winkel $L'O'P$ durch A, den Winkel $LO'L'$ durch α, so hat man im Dreieck $O'LL'$

$$O'L : L'L = \sin A : \sin \alpha.$$

Da nun die Geschwindigkeiten des Lichts und des Auges, während des kleinen Zeitraums, der hier in Betracht kommt, als gleichförmig angenommen werden, so verhalten sich die Linien LO' und LL', welche vom Licht und Auge in gleichen Zeiten durchlaufen werden, wie die Geschwindigkeiten.

Setzt man die Geschwindigkeit des Lichts $= c$, die des Auges $= v$, so hat man

$$O'L : L'L = c : v,$$

folglich, wenn man diese Proportion mit der ersten verbindet

$$c : v = \sin A : \sin \alpha,$$

oder, indem man das Verhältniſs $\frac{v}{c}$ durch μ bezeichnet,

$$\sin \alpha = \mu . \sin A.$$

Diese Gleichung zeigt, daſs die Aberration gar nicht von der Länge des bei den Beobachtungen gebrauchten Fernrohrs abhängt. Am gröſsten wird sie, wenn $A = 90^0$ ist, und sie verschwindet, wenn $A = o$ oder $A = 180^0$ ist; d. h. wenn die Richtung der Bewegung des Auges grade nach dem leuchtenden Punkt hin, oder von demselben abwärts geht.

§. 95.

Da die Erde mit dem Beobachter fortwährend in Bewegung ist, so müssen natürlich alle Beobachtungen der Lage der Himmelskörper dieser Aberration unterworfen seyn, und die Reduction des beobachteten scheinbaren Ortes auf den wahren muſs bei jeder Beobachtung vorgenommen werden. Bei den terrestrischen Beobachtungen ist diese unnöthig, weil alle Gegenstände in relativer Ruhe sind. Wir wollen daher die Art, auf welche die Beobachtungen von der Aberration befreit werden, näher untersuchen.

Die drei Linien $O'L$, $O'L'$ und $O'P$ liegen in einer Ebene, folglich ergiebt sich, daſs, wenn wir dieselben bis an die Himmelskugel verlängert denken, der wahre Ort, der scheinbare Ort des Himmelskörpers, und der Punkt, wohin die Richtung der Bewegung der Erde geht, immer in einem gröſsten Kreise liegen, und zwar so, daſs der scheinbare Ort zwischen den beiden andern Punkten sich befindet.

§. 96.

Es sey daher (Fig. 15.) ECB die Hälfte der Himmelskugel, welche nördlich von der Ecliptik EC liegt, B ihr Nordpol. Da die Richtung der Bewegung der Erde eine Berührungslinie an ihre Bahn ist, und die Ebene der Bahn selbst die Ecliptik ausmacht, so muſs die verlängerte Richtung der Bewegung der Erde die Himmelskugel in dem gröſsten Kreise EC selbst schneiden; dies geschehe in P. Die Bewegung der Erde

geschehe von der Sonne aus gesehen von C nach E; in C liege der Anfangspunkt des Widders.

Der Himmelskörper sey in L' beobachtet; legt man daher durch B und L' einen gröſsten Kreis BD', so wird

seine scheinbare Breite $L'D' = \beta'$

seine scheinbare Länge $CD' = \lambda'$.

Durch P und L' sey ein gröſster Kreis PQ gelegt, so ist PL' der im vorigen §. durch A bezeichnete Winkel. Der wahre Ort des Himmelskörpers liegt nun ebenfalls auf diesem gröſsten Kreise abwärts von L', nach Q zu, und er sey L, so daſs LL' der im vorigen §. durch α bezeichnete Winkel ist.

Durch L und B lege man ebenfalls einen gröſsten Kreis BD, so wird

die wahre Breite $LD = \beta$

die wahre Länge $CD = \lambda$

des Himmelskörpers angeben. Man setze $CP = l$, welcher Bogen als bekannt angesehen werden kann, die Art, wie er gefunden wird, soll nachher angezeigt werden, so hat man die Gröſsen l, β', λ', aus denen λ und β gefunden werden sollen.

§. 97.

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck $PD'L'$ hat man

$$\cos PL' = \cos PD' . \cos D'L'$$
$$\cot L'PD' = \sin PD' . \cot L'D',$$

d. h. wenn man die angegebenen Bezeichnungen einführt, und auſserdem den Winkel $L'PD' = i$ setzt,

$$\cos A = \cos \beta' . \cos (l - \lambda'),$$
$$\cot i = \cot \beta' . \sin (l - \lambda').$$

Aus §. 94. hat man noch die Gleichung

$$\sin \alpha = \mu . \sin A,$$

so daſs also aus diesen drei Gleichungen, wenn μ bekannt ist, welche Gröſse die Constante der Aberration heiſst, die drei Winkel A, i, α gefunden werden können.

§. 98.

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck PDL, wo die Hypotenuse PL und der Winkel bei P bekannt sind, hat man

$$\sin LD = \sin PL . \sin LPD$$
$$\text{tang}\, PD = \text{tang}\, PL . \cos LPD,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$\sin \beta = \sin (A + \alpha) . \sin i$$
$$\text{tang}\, (l - \lambda) = \text{tang}\, (A + \alpha) . \cos i,$$

und diese beiden Gleichungen mit den obigen drei verbunden, geben eine vollständige Auflösung der Aufgabe aus den beobachteten scheinbaren Oertern eines Himmelskörpers die wahren, von der Aberration befreiten zu finden.

§. 99.

Wendet man die Aufgabe um, und verlangt aus dem wahren Ort des Körpers seinen scheinbaren zu finden, so hat man mit leichter Mühe aus den vorigen Gleichungen folgende:

$$\cos (A + \alpha) = \cos \beta \cos (l - \lambda)$$
$$\cot i = \sin (l - \lambda) . \cot \beta$$
$$\sin \alpha = \mu . \sin A$$
$$\sin \beta' = \sin A . \sin i$$
$$\text{tang}\, (l - \lambda') = \text{tang}\, A . \cos i.$$

Allein diese lassen unter der angegebenen Form keine directe Auflösung wie die vorigen zu, denn die erste Gleichung giebt zwar $A + \alpha$, aber dieser Winkel kann so nicht weiter gebraucht, sondern mufs vermittelst der dritten von α befreit werden, welches entweder durch eine leichte Näherung, da α immer sehr klein ist, oder durch eine quadratische Gleichung geschieht.

§. 100.

Man hat nämlich aus der ersten Gleichung

$$\cos A . \cos \alpha - \sin A . \sin \alpha = \cos \beta . \cos (l - \lambda)$$

und aus der dritten

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \mu\mu \sin A^2},$$

folglich auch

$$\cos A . \sqrt{1 - \mu\mu \sin A^2} - \mu . \sin A^2 = \cos \beta . \cos (l - \lambda).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $\mu \sin A^2$ auf die andere Seite setzt, und dann quadrirt

$$1 - \sin A^2 = \cos \beta^2 . \cos (l - \lambda)^2$$
$$+ 2\mu \cos \beta \cos (l - \lambda) \sin A^2 + \mu\mu \sin A^2.$$

Dies giebt

$$\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta^2 \cos (l - \lambda)^2}{1 + 2\mu \cos \beta \cos (l - \lambda) + \mu\mu}}$$

$$\sin \alpha = \mu \sqrt{\frac{1 - \cos \beta^2 \cos (l - \lambda)^2}{1 + 2\mu \cos \beta \cos (l - \lambda) + \mu\mu}}$$

wodurch A und α einzeln gefunden werden.

Befindet sich der Himmelskörper im Pol der Ecliptik, wo also $\beta = 90^0$ ist, so hat man

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu\mu}}, \quad i = 90^0$$
$$\beta' = A, \quad l = \lambda'.$$

§. 101.

Die in den vorigen §§. dargestellten genauen Formeln wendet man nur dann an, wenn der Stern dem Pol der Ecliptik äusserst nahe steht; in allen andern Fällen kann man sich mit hinreichender Genauigkeit folgender Näherungsformeln bedienen. Da nämlich der Winkel α nur ungefähr 20 Secunden beträgt, wenn er am grössten ist, so kann man die höhern Potenzen dieses Winkels vernachlässigen, und den Sinus dem Bogen, den Cosinus der Einheit gleich setzen. Nimmt man ausserdem

$$\beta' = \beta + \Delta\beta$$
$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda,$$

so sind die Grössen $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$ von derselben Ordnung als α selbst, und man darf rücksichtlich ihrer Sinus und Cosinus dieselbe Annahme machen als für α. Nimmt man die beiden Gleichungen

$$\sin \beta = \sin (A + \alpha) . \sin i$$
$$\sin \beta' = \sin A . \sin i$$

und zieht beide von einander ab, so bleibt

$$\Delta\beta . \cos \beta' = - \alpha . \cos A . \sin i,$$

und da $\alpha = \mu . \sin A$, so wird

$$\Delta\beta . \cos \beta' = - \mu . \sin A . \sin i . \cos A.$$

Nun ist aber, wie man aus der Figur leicht sieht, im Dreieck PLD'

$$\sin A . \sin i = \sin \beta'$$
$$\cos A = \cos \beta' . \cos (l - \lambda')$$
$$\sin A . \sin i . \cos A = \sin \beta' . \cos \beta' . \cos (l - \lambda'),$$

folglich, wenn man diesen Werth in vorige Gleichung substituirt, so bleibt

$$\Delta\beta = - \mu . \sin \beta' . \cos (l - \lambda').$$

§. 102.

Nimmt man ferner die beiden Gleichungen

$$\text{tang } (l - \lambda) = \text{tang } (A + \alpha) \cos i$$
$$\text{tang } (l - \lambda') = \text{tang } A . \cos i$$

und zieht sie von einander ab, so kommt

$$\frac{\Delta\lambda}{\cos (l - \lambda')^2} = \frac{\alpha . \cos i}{\cos A^2}$$

oder, wenn man statt α seinen Werth setzt,

$$\frac{\Delta\lambda}{\cos (l - \lambda')^2} = \frac{\mu \text{ tang } A . \cos i}{\cos A}.$$

Man hat aber aus den Formeln der vorigen Paragraphen

$$\text{tang } A . \cos i = \text{tang } (l - \lambda')$$
$$\cos A = \cos \beta' . \cos (l - \lambda'),$$

folglich wird

$$\frac{\text{tang } A \cos i}{\cos A} = \frac{\sin (l - \lambda')}{\cos \beta' . \cos (l - \lambda')^2},$$

und wenn man diesen Werth in vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$\Delta\lambda = \mu . \frac{\sin (l - \lambda')}{\cos \beta'}.$$

§. 103.

In diesen beiden Formeln kann man beliebig statt β', λ', auch β, λ schreiben, so daſs durch dieselben sowohl der wahre Ort auf den scheinbaren, als auch umgekehrt der scheinbare auf den wahren reducirt werden kann. Die genäherte Formel

$$\Delta\beta = -\mu . \sin\beta' \cos(l - \lambda')$$

ist in allen Fällen brauchbar, allein diejenige, welche den Werth von

$$\Delta\lambda = \mu . \frac{\sin(l - \lambda')}{\cos\beta'}$$

ausdrückt, wird desto ungenauer, je kleiner der Divisor $\cos\beta'$ ist, d. h. je näher der Himmelskörper dem Pol der Ecliptik steht, und dann müssen, wie schon erwähnt wurde, die früher gegebenen genauen Formeln gewählt werden.

§. 104.

Wir haben jetzt noch die Berechnung des Winkels l, und der Gröſse μ, die von der Lage der Erde gegen die Sonne abhängen, zu zeigen. Die Erde beschreibt bekanntlich bei ihrem jährlichen Umlauf um die Sonne eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne sich befindet. Es sey $AGBH$ (Fig. 16.) diese Ellipse, E der Brennpunkt derselben, die halbe groſse Axe $AC = a$, die halbe kleine Axe $GC = b$, so hat man die Gleichung der Ellipse

$$aayy + bbxx = aabb,$$

wo die Abscissen auf der groſsen Axe vom Mittelpunkt C der Ellipse aus gerechnet werden.

Ist WT eine Berührungslinie der Ellipse im Punkt M, so wird, wenn sich die Erde in M befindet, MW die Richtung ihrer Bewegung seyn, vorausgesetzt, daſs die Erde von A nach G zu geht. Die Lage der Berührungslinie WT wird folgendermaſsen gefunden: Man beschreibe über der groſsen Axe AB einen Halbkreis, fälle von M, an welchem Punkt die Berührungs-

linie gezogen werden soll, ein Perpendikel MP auf die grofse Axe, und verlängere dasselbe rückwärts, bis es die Kreislinie in N trifft, ziehe den Halbmesser CN und darauf senkrecht NT, welche die Verlängerung der grofsen Axe in T trifft.

Verbindet man nun die Punkte M und T durch die Linie MT, so ist diese die Berührungslinie an der Ellipse in M. Da PT die dritte Proportionale zu PC und PN ist, und $PC = x$, $NC = a$, gesetzt wurde, so hat man

$$x : \sqrt{aa - xx} = \sqrt{aa - xx} : PT$$

$$TP = \frac{aa - xx}{x}.$$

Da nun ferner

$$MP = TP \,.\, \text{tang}\, MTP,$$

so wird, wenn man statt MP seinen Werth y setzt,

$$\text{tang}\, MTP = \frac{xy}{aa - xx}.$$

§. 105.

Nun sey KL (Fig. 17.) die nach dem Frühlingsäquinoctialpunkt gezogene Linie, von welcher aus die Länge gezählt wird, so ist LMW der Winkel, den wir früher durch l bezeichnet haben. Der Winkel LME ist die Länge der Sonne; kennt man also noch den Winkel WME, den die Berührungslinie mit dem nach M von der in E befindlichen Sonne gezogenen Radius Vector macht, so hat man

$$l = \odot - WME,$$

wo $\odot$ die Länge der Sonne bedeutet.

Betrachtet man die Bahn der Erde als einen Kreis, welcher bei vielen Anwendungen hinreichend genau ist, da das Verhältnifs der beiden Axen $b : a$ der Einheit sehr nahe kommt, so ist

$$WME = 90^0, \quad l = \odot - 90^0.$$

Setzt man daher diesen Werth von l in die Gleichungen

$$\Delta\beta = -\mu . \sin\beta . \cos(l - \lambda)$$
$$\Delta\lambda = +\mu . \frac{\sin(l - \lambda)}{\cos\beta},$$

so erhält man, da

$$\cos(\odot - 90 - \lambda) = -\sin(\lambda - \odot)$$
$$\sin(\odot - 90 - \lambda) = -\cos(\lambda - \odot),$$

die Werthe

$$\Delta\beta = +\mu . \sin\beta . \sin(\lambda - \odot)$$
$$\Delta\lambda = -\mu . \frac{\cos(\lambda - \odot)}{\cos\beta},$$

und diese Formeln werden gewöhnlich von den Astronomen zur Berechnung der Aberration in Länge und Breite angewendet.

§. 106.

Die erste Beobachtung der hieraus entstehenden Veränderung in dem Stande der Sterne schreibt sich von Bradley her, und derselbe gab auch die Erklärung dieses sonderbaren Phänomens. Seine Beobachtungen über den Stern γ im Drachen, die er eigentlich mit Molyneux zu dem Zweck angestellt hatte, die Entfernung der Fixsterne von uns zu finden, zeigten ihm Folgendes: Vom dritten December 1725 an wurde mehrmal der Abstand des Sterns vom Zenith gemessen, wobei sich aber kein merklicher Unterschied in den Stellungen des Sterns zeigte. Am 17. December ging derselbe etwas südlicher vom Zenith und die folgenden Tage noch mehr, bis er im Anfang März 1726 seine gröſste südliche Veränderung von etwa zwanzig Secunden erreicht hatte. In der Mitte des Aprils ging er wieder nördlicher, bis er im Anfang Juni dieselbe Zenithdistanz wieder erreicht hatte, als Anfangs December bei der ersten Beobachtung. Der Stern fuhr fort nordwärts zu rücken, bis in den September, wo er fast 20 Secunden nördlicher war, als im Juni. Von da an ging der Stern wieder nach Süden zurück, bis er im December 1726 wieder dieselbe Lage hatte, als im December des vorigen Jahres.

§. 107.

Man sieht hieraus, dafs die Periode der Veränderung der Stellung des Sterns das Jahr ist; dieses stimmt im Allgemeinen mit den vorigen Formeln überein, da die periodischen Functionen $\sin(\lambda - \odot)$ und $\cos(\lambda - \odot)$ innerhalb eines Jahres alle ihre möglichen Werthe durchlaufen haben.

Um nun die Erscheinungen des vorigen §. insbesondere aus den Formeln abzuleiten, müfsten wir zuerst die Gleichung aufsuchen, welche angiebt, wie die Aenderungen der Zenithdistanzen mit denen der Länge und Breite verbunden sind. Allein die besondere Lage des zu den vorigen Beobachtungen gewählten Sternes γ im Drachen erleichtert uns diese Untersuchung. Dieser Stern befindet sich nämlich sehr nahe an dem gröfsten Kreise, der durch den Pol der Ecliptik und den Anfangspunkt des Steinbocks gezogen wird, und welcher daher zugleich durch den Nordpol geht (im Wintersolstitialcolur). Seine ungefähr 75° betragende nördliche Breite bezeichnen wir durch β, den Abstand des Pols der Ecliptik von dem des Aequators durch ε, so ist für einen in dem besagten Kreise stehenden Stern die Declination

$$\delta = \beta - \varepsilon.$$

Setzen wir ferner seine Zenithdistanz bei der Culmination $= z$, die Polhöhe des Beobachtungsortes $= p$, so wird ebenfalls $z = p - \delta$, oder auch

$$z = p + \varepsilon - \beta.$$

Da p, ε constante Gröfsen sind, so folgt aus dieser Gleichung, dafs die Aenderungen der Zenithdistanz und der Breite einander gleich, aber entgegengesetzt sind. Bezeichnen wir also die Aenderung der Zenithdistanz durch Δz, und bemerken, dafs

$$\Delta\beta = + \mu . \sin\beta \sin(\lambda - \odot)$$

war, so erhalten wir

$$\Delta z = - \mu . \sin \odot . \sin(\lambda - \odot),$$

oder da für den Winkel $\gamma = 270°$

$$\sin(\lambda - \odot) = \sin(270^0 - \odot) = -\cos\odot,$$

welcher Werth für diesen Stern sehr nahe Statt findet, so bleibt

$$\Delta z = + \mu \sin 6 \,.\, \cos\odot.$$

Ferner ist $\sin 6 = \sin 75^0$ der Einheit fast gleich, wir können daher kurz die Gröſse

$$\mu \,.\, \sin 6 = 20 \text{ Secunden}$$

setzen, also wird

$$\Delta z = 20'' \,.\, \cos\odot.$$

§. 108.

Man sieht aus dieser Formel, daſs für einen Stern, welcher ungefähr 270° Länge hat, und dem Pol der Ecliptik ziemlich nahe steht, wie es bei dem von Bradley beobachteten Stern γ im Drachen der Fall ist, die bei dem Durchgang des Sterns durch den Meridian gefundene Zenithdistanz zunehmen muſs, so lange Δz oder $\cos\odot$ positiv ist, d. h. während die Länge der Sonne zwischen 270° und 90° enthalten ist. Dies findet bekanntlich vom December bis Juni Statt. Vom Juni bis December hingegen wächst die Länge der Sonne von 90° bis 270°; der Cosinus dieses Winkels ist also dann negativ, so wie auch Δz, folglich nimmt während dieser Zeit die Zenithdistanz ab, und der Stern nähert sich dem Zenith wieder. Die gröſste Entfernung vom Zenith erlangt der Stern, wenn $\cos\odot = +1$, also $\odot = 0$ ist, d. h. im März; seine kleinste Entfernung vom Zenith findet hingegen dann Statt, wenn Δz seinen gröſsten negativen Werth erreicht, d. h. wenn $\cos\odot = -1$ oder $\odot = 180^0$ wird, welches im September eintritt. Vergleicht man diese aus der Formel erhaltenen Resultate mit denen der Beobachtungen §. 106., so sieht man, daſs beide mit einander übereinstimmen.

§. 109.

Betrachtet man die Erdbahn als eine Ellipse, so wird der Winkel *WME*, welchen die Richtung der

Bewegung der Erde mit dem nach der Sonne gezogenen Radius Vector (Fig. 16.) bildet, kein rechter seyn, sondern im Allgemeinen einen veränderlichen Werth haben. Um denselben zu finden, hat man im Dreiecke EMT die Proportion

$$EM : ET = \sin MTP : \sin TME.$$

Es ist aber

$$EM^2 = PM^2 + EP^2$$
$$= PM^2 + (CP - EC)^2$$
$$= PM^2 + CP^2 + EC^2 - 2CP . EC.$$

Die Gleichung der Ellipse ist

$$aayy + bbxx = aabb$$

und die Eccentricität EO derselben wird

$$EC = \sqrt{aa - bb}.$$

Diesen Ausdruck setzen wir $= ae$, wo e die Eccentricität der Erdbahn im astronomischen Sinn, d. h. das Verhältniſs der in der Geometrie sogenannten Eccentricität zur halben groſsen Axe angiebt. Hierdurch erhält man

$$aaee = aa - bb;$$
$$bb = aa\,(1 - ee),$$

und wenn man diesen Werth von bb in die Gleichung der Ellipse substituirt, und den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor aa wegläſst, so wird

$$yy = (aa - xx)\,(1 - ee)$$
$$= aa - xx - eeaa + eexx.$$

Nun ist aber

$$PM = y,\quad CP = x,\quad EC = ae,$$

folglich, wenn man diese Werthe in den Ausdruck

$$EM^2 = PM^2 + CP^2 + EC^2 - 2CP . EC$$

substituirt, so kommt

$$EM^2 = yy + xx + aaee - 2aex$$
$$= aa - 2aex + eexx = (a - ex)^2$$

indem man den oben angegebenen Werth von yy substituirt; folglich erhält man durch Ausziehung der Quadratwurzel

$$EM = a - ex.$$

Eben so wird auch

$$ET = TP + EP = TP + PC - EC.$$

Es ist aber TP die Subtangente an der Ellipse, die wir §. 104.

$$= \frac{aa - xx}{x}$$

gefunden haben, also wird

$$ET = \frac{aa - aex}{x} = \frac{a(a - ex)}{x}$$

und hieraus folgt

$$EM : ET = a - ex : \frac{a(a - ex)}{x}$$
$$= x : a.$$

§. 110.

Ferner hatten wir §. 104. gefunden, daſs

$$\text{tang } MTP = \frac{xy}{aa - xx},$$

folglich wird

$$\sin MTP = \frac{x\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}}$$

wenn man bedenkt, daſs

$$\sin MTP = \frac{\text{tang } MTP}{\sqrt{1 + \text{tang } MTP^2}}$$
$$yy = (aa - xx)(1 - ee).$$

Die zu Anfang §. 109. gegebene Proportion

$$EM : ET = \sin MTP : \sin TME$$

verändert sich daher in folgende

$$x : a = \frac{x\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}} : \sin TME,$$

und hieraus findet sich

$$\sin TME = \frac{a\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}}.$$

Bei der Erdbahn ist die Gröſse e sehr klein, man hat nämlich

$$e = 0{,}0167787$$
$$ee = 0{,}000281525.$$

§. 111.

Entwickelt man den Werth des sin TME in eine Reihe, die nach den Potenzen von e fortschreitet, und vernachlässigt alle Glieder, welche eine höhere Potenz, als das Quadrat von e enthalten, so kommt

$$\sin TME = 1 - \tfrac{1}{2}\, ee \left(1 - \frac{xx}{aa}\right),$$

woraus man sieht, daſs bei der Erde der Winkel TME immer nur wenig von 90° verschieden seyn kann, da ee eine so kleine Gröſse ist. Wir müssen nun aber die Abscisse x anders ausdrücken, um diesen Winkel für die Berechnung der Aberration geschickt zu machen. Zu diesem Ende sey der Winkel MEA, welchen der nach der Sonne gezogene Radius Vector mit der groſsen Axe oder der sogenannten Apsidenlinie einschlieſst $= \varphi$, so hat man im Dreieck EMP

$$EP = EM \,.\, \cos \varphi,$$

oder da $EP = x - ae$, $EM = a - ex$ (§. 109.), so wird auch

$$(x - ae) = (a - ex) \cos \varphi,$$

und hieraus erhält man

$$x = a \,.\, \frac{\cos \varphi + e}{1 + e \cos \varphi},$$

oder wenn man diesen Werth in eine Reihe entwickelt:

$$x = a\,(\cos \varphi + e \sin \varphi^2 - ee \cos \varphi \sin \varphi^2).$$

Was den Werth von x anbetrifft, welcher bei dem Ausdruck von sin TME angewendet wird, so sieht man, daſs es hinreichend ist, in diesem Fall

$$x = a \,.\, \cos \varphi$$

zu setzen, weil, unserer Voraussetzung zufolge, alle Potenzen von e, welche das Quadrat übersteigen, weggelassen werden sollen. Es kommt dann

$$\sin TME = 1 - \tfrac{1}{2}\, ee \sin \varphi^2.$$

Der Winkel φ ist derjenige, den man in der Astronomie die wahre Anomalie nennt.

§. 112.

Ferner sey *LK* (Fig. 17.) die Gesichtslinie, welche von der Erde aus nach dem Frühlingsäquinoctialpunkt, oder demjenigen Punkt, von welchem aus die Länge der Sonne gezählt wird, gezogen ist, und wir setzen den Winkel *MKE*, unter welchem diese Linie die große Axe oder die Apsidenlinie schneidet, $= \gamma$. Zieht man ferner *ES* parallel mit *MK*, so wird der Winkel *SEM* die Länge der Erde von der Sonne aus gesehen, und da die Länge der Sonne immer um 180° größer seyn muſs, als die der Erde, so wird, wenn wir, wie früher, die Länge der Sonne durch ☉ bezeichnen,

$$\odot = SEM + 180^0$$
$$KEM = SEM - SEK$$
$$= SEM - MKE,$$

oder da $KEM = \varphi$, $SEM = \odot - 180^0$, $MKE = \gamma$, so bleibt

$$\varphi = \odot - 180^0 - \gamma.$$

Der Winkel γ beträgt bei der Erde 99° 2′, und er ist nichts anders, als die Länge des Punktes der Bahn der Erde, von der Sonne aus gesehen, in welchem die Erde der Sonne am nächsten ist, oder die Länge des Periheliums. Hieraus folgt

$$\cos\varphi = -\cos(\odot - \gamma)$$
$$\sin\varphi = -\sin(\odot - \gamma)$$
$$\sin TME = 1 - \tfrac{1}{2} ee \sin(\odot - \gamma)^2$$
$$\frac{x}{a} = -\cos(\odot - \gamma) + e\sin(\odot - \gamma)^2$$
$$+ ee\cos(\odot - \gamma) \,.\, \sin(\odot - \gamma)^2.$$

§. 113.

Nachdem auf diese Art der Winkel *TME* bestimmt worden ist, erhält man

$$WME = 180^0 - TME$$
$$\sin WME = 1 - \tfrac{1}{2} ee \,.\, \sin(\odot - \gamma)^2,$$

und hierdurch endlich den Winkel (§. 105.)

$$l = \odot - WME.$$

Da aber der Winkel WME durch seinen Sinus gegeben wird, so entsteht hierbei eine Zweideutigkeit, indem man nicht weiſs, ob der Winkel kleiner oder gröſser als 90° genommen werden soll. Dies läſst sich folgendermaſsen leicht entscheiden. Man hat nämlich auch

$$\cos WME = \pm\, e \,.\, \sin(\odot - \gamma),$$

aus welcher Formel sich der Winkel WME noch einfacher berechnen läſst, und es fragt sich nur, ob man das positive oder das negative Zeichen, welche beide durch die Ausziehung der Quadratwurzel entstanden, nehmen soll, indem der Cosinus des Winkels, welcher gefunden wird, schon von selbst bestimmt, ob der Winkel in dem ersten oder zweiten Quadranten liegt. Da der Winkel WME den Winkel angiebt, welchen die Richtung der Bewegung der Erde mit dem Radius Vector einschlieſst, so brauchen wir nur einen besondern Fall zu betrachten; befindet sich die Erde in dem Punkt H der Ellipse (Fig. 17.), wo der Radius Vector LH senkrecht auf der groſsen Axe der Ellipse steht, so geht ihre Richtung nach HN, und dann ist der Winkel gewiſs stumpf, also der Cosinus negativ. In diesem Fall ist $\varphi = 90^0$, also giebt die Gleichung (§.112.)

$$\varphi = \odot - 180^0 - \gamma$$

für diesen Fall $\odot - \gamma = 270^0$. Man hat also

$$\cos NHE = \pm\, e \,.\, \sin 270^0,$$

und da $\sin 270^0 = -1$, der Cosinus des Winkels NHE aber negativ werden soll, so sieht man, daſs das obere Zeichen gewählt werden muſs. Wir haben also

$$\cos WME = +\, e \,.\, \sin(\odot - \gamma).$$

§. 114.

Wir haben jetzt noch die Untersuchung des Werthes der Gröſse μ bei der Bewegung der Erde in der Ellipse durchzuführen. Da nämlich μ das Verhältniſs $\frac{v}{c}$ be-

zeichnet, wo v die Geschwindigkeit der Erde, c die des Lichts ist, so mufs, indem die Erde in ihren verschiedenen Stellungen gegen die Sonne auch eine verschiedene Geschwindigkeit besitzt, der Werth von μ veränderlich seyn.

Um diese Veränderlichkeit auszudrücken, müssen wir folgenden Hülfssatz aus der Bewegungslehre zuziehen: die Geschwindigkeiten der Erde in verschiedenen Punkten ihrer Bahn verhalten sich umgekehrt, wie die von der Sonne auf die an diesen Punkten gezogenen Berührungslinien gefällten Perpendikel. Es sey daher TW (Fig. 16.) die vom Punkt M gezogene Berührungslinie, in E, als dem Brennpunkt der Ellipse, die Sonne, und EQ das von E auf TW gefällte Perpendikel, dessen Länge wir durch p bezeichnen. Dann hat man dem so eben ausgesprochenen Satze zufolge

$$v = \frac{m}{p},$$

wo m eine constante Gröfse ist. Nun wird aber

$$EQ = EM . \sin TME,$$

oder da aus den §§. 103 und 104.

$$EM = a - ex$$

$$\sin TME = \frac{a\sqrt{1-ee}}{\sqrt{aa - eexx}},$$

so wird hierdurch EQ, oder

$$p = (a - ex) \cdot \frac{a\sqrt{1-ee}}{\sqrt{aa-eexx}}$$

$$= a\sqrt{1-ee} . \sqrt{\frac{a-ex}{a+ex}}$$

$$v = \frac{m}{a\sqrt{1-ee}} . \sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}}$$

$$\frac{v}{c} = \mu = \frac{m}{ca\sqrt{1-ee}} . \sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}}.$$

§. 115.

Aus §. 111. haben wir die Relation

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi + e}{1 + e\cos\varphi};$$

also, wenn wir diesen Werth in den Ausdruck $\sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}}$ substituiren, so kommt

$$\sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}} = \frac{\sqrt{1 + 2e\cos\varphi + ee}}{\sqrt{1-ee}},$$

und hierdurch wird

$$\mu = \frac{m}{ca(1-ee)} \cdot \sqrt{1 + 2e\cos\varphi + ee},$$

oder, wenn man statt $\cos\varphi$, $-\cos(\odot - \gamma)$ setzt (§.112.)

$$\mu = \frac{m}{ca(1-ee)} \cdot \sqrt{1 - 2e\cos(\odot - \gamma) + ee}$$

$$= \frac{m}{ca}[1 - e\cos(\odot - \gamma) + ee + \tfrac{1}{2} ee \sin(\odot - \gamma)^2].$$

Ferner haben wir, da $l = \odot - WME$

$$\cos(l - \lambda) = \cos(\odot - \lambda - WME)$$
$$= \cos(\odot - \lambda)\cos WME + \sin(\odot - \lambda)\sin WME$$
$$\sin(l - \lambda) = \sin(\odot - \lambda - WME)$$
$$= \sin(\odot - \lambda)\cos WME - \cos(\odot - \lambda)\sin(WME).$$

Vernachlässigen wir nun auch noch das Quadrat von e in unsern Rechnungen, so wird

$$\sin WME = 1, \ (\S. 113.)$$
$$\cos WME = e \cdot \sin(\odot - \gamma)$$
$$\cos(l - \lambda) = e \cdot \cos(\odot - \lambda)\sin(\odot - \gamma) + \sin(\odot - \lambda)$$
$$\sin(l - \lambda) = e \cdot \sin(\odot - \lambda)\sin(\odot - \gamma) - \cos(\odot - \lambda)$$
$$\mu \cdot \cos(l - \lambda) = \frac{m}{ca}[-\sin(\lambda - \odot) + e \cdot \sin(\lambda - \gamma)]$$
$$\mu \cdot \sin(l - \lambda) = \frac{m}{ca}[-\cos(\lambda - \odot) + e \cdot \cos(\lambda - \gamma)].$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (§. 103.)

$$\varDelta 6 = -\mu \cdot \cos(l - \lambda)\sin 6$$
$$\varDelta\lambda = +\mu \cdot \sin(l - \lambda) \cdot \frac{1}{\cos 6},$$

so erhält man

$$\Delta\beta = + \frac{m}{ca} [\sin(\lambda - \odot) - e \sin(\lambda - \gamma)] \sin\beta$$

$$\Delta\lambda = - \frac{m}{ca} [\cos(\lambda - \odot) - e \cos(\lambda - \gamma)] \frac{1}{\cos\beta}.$$

Man sieht hieraus, daſs alle Glieder, welche von der Eccentricität der Erdbahn abhängen, nicht periodisch sind, sondern für jeden Stern einen constanten Werth besitzen.

§. 116.

Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn fanden wir allgemein

$$v = \frac{m}{a\sqrt{1 - ee}} \sqrt{\frac{a + ex}{a - ex}}.$$

Setzt man hierin $x = + a$, so erhält man die gröſste Geschwindigkeit

$$= \frac{m}{a(1 - e)};$$

und nimmt man $x = - a$, so ergiebt sich die kleinste Geschwindigkeit

$$= \frac{m}{a(1 + e)}.$$

Das arithmetische Mittel aus diesen beiden Geschwindigkeiten kann man für die mittlere Geschwindigkeit der Erde nehmen; dies giebt selbige

$$= \frac{m}{a(1 - ee)},$$

oder, wenn wir das Quadrat der Eccentricität vernachlässigen, wird dieselbe $\frac{m}{a}$. Die Gröſse $\frac{m}{ac}$ ist also nichts anders, als das Verhältniſs der mittlern Geschwindigkeit der Erde zu der des Lichts. Da man aber $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$ in Secunden berechnet, so giebt man $\frac{m}{ac}$ ebenfalls in Secunden an, indem diese Verhältniſszahl durch 206264″8

multiplicirt wird. Die Angaben der Astronomen über den numerischen Werth dieser Gröſse, der sogenannten Constante der Aberration, stimmen nicht ganz mit einander überein. Delambre giebt dieselbe aus den Beobachtungen der Jupiterstrabantenverfinsterungen = 20″255; Lindenau aus den Beobachtungen des Polarstens = 20″449, und hieraus würde folgen, daſs das Licht des Polarsterns sich langsamer bewege, als das von den Jupiterstrabanten zurückgeworfene Sonnenlicht. Es ist überhaupt wohl noch etwas ungewiſs, ob das Licht der verschiedenen Sterne, vorzüglich derjenigen, die an Farbe verschieden sind, sich mit gleicher Geschwindigkeit bewege; eine gröſsere Geschwindigkeit würde die Constante der Aberration verkleinern, eine kleinere vergröſsern. So findet z. B. Brinkley die Constante der Aberration

aus	α der Leyer	= 20″35
-	γ des Drachen	= 19,91
-	η des groſsen Bären	= 20,66
-	α des Schwans	= 20,33
-	α des Bootes	= 19,94
-	α des Adlers	= 21,19.

Bei dem letzten Stern meint dieser Astronom aber selbst, daſs wohl ein Fehler, dessen Ursache ihm aber unbekannt ist, vorgefallen seyn möchte. Die übrigen Sterne gaben im Mittel 20″24, also sehr nahe diejenige Gröſse, welche Delambre aus den Jupiterstrabantenverfinsterungen gefunden hatte.

Nimmt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne

= 24096 Erdhalbmesser,

so durchläuft die Erde innerhalb 365 Tage 6 St. 9 Min. 11 Sec. oder in 31558151 Secunden einen Weg von

151401 Erdhalbmessern,

folglich ist der Weg, den sie in einer Secunde zurücklegt, oder ihre mittlere Geschwindigkeit, wenn man den Halbmesser der Erde = 860 Meilen setzt,

$= 4{,}1259$ Meilen.

Setzt man die Aberrationsconstante $= 20''25$, so ist das Verhältnifs der Geschwindigkeit des Lichts zu der der Erde, wie

$$206264{,}8 : 20{,}25$$

und hieraus findet man, dafs das Licht in einer Secunde einen Weg von 42026 Meilen zurücklegt

§. 117.

Bezeichnet man den Winkel $L'LD$ (Fig. 15.), welchen der durch den scheinbaren und wahren Ort des Sterns gelegte gröfste Kreis PQ mit dem durch den wahren Ort desselben gehenden Breitenkreis bildet, durch ψ, so hat man im Dreieck PLD die Relation

$$\sin PD = \sin PL \,.\, \sin PLD,$$

oder da $PD = (l - \lambda)$, $PL = (A + \alpha)$, so wird

$$\sin \psi = \frac{\sin (l - \lambda)}{\sin (A + \alpha)}.$$

Während nun der Punkt P vermöge der Bewegung der Erde immerwährend seinen Ort ändert, wird auch der Punkt L' gegen den unbeweglichen L seine Lage verändern, und der scheinbare Ort des Himmelskörpers bewegt sich in einer krummen Linie um den wahren.

§. 118.

Die Natur der auf diese Weise entstehenden krummen Linie läfst sich durch eine Gleichung ausdrücken, indem man den Bogen α als den Radius Vector, und den Winkel ψ als den veränderlichen Winkel ansieht, den derselbe mit einer festen Linie, hier dem Breitenkreis, bildet. Aus §. 99. hat man die beiden Gleichungen

$$\sin \alpha = \mu \,.\, \sin A,$$

$$\cos (A + \alpha) = \cos \beta \,.\, \cos (l - \lambda).$$

Quadrirt man die letztere, so kommt

$$\cos (l - \lambda)^2 = \frac{\cos (A + \alpha)^2}{\cos \beta^2}$$

und die Gleichung des vorigen §.

$$\sin \psi = \frac{\sin (l - \lambda)}{\sin (A + \alpha)}$$

giebt, wenn man sie ins Quadrat erhebt,

$$\sin (l - \lambda)^2 = \sin (A + \alpha)^2 . \sin \psi^2.$$

Addirt man dies zu dem Werthe von $\cos (l - \lambda)^2$, so kommt

$$1 = \sin (A + \alpha)^2 \sin \psi^2 + \frac{\cos (A + \alpha)^2}{\cos \beta^2},$$

und hieraus ergiebt sich

$$\sin (A + \alpha)^2 = \frac{\sin \beta^2}{1 - \sin \psi^2 \cos \beta^2},$$

oder da man mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von α, $\sin (A + \alpha) = \frac{\alpha}{\mu}$ setzen kann,

$$\alpha = \frac{\mu . \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin \psi^2 \cos \beta^2}}.$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung einer Ellipse, von deren Mittelpunkt aus die Radii Vectores ausgehen, und von deren kleiner Axe aus die Winkel gezählt werden. Ihre halbe grofse Axe ist $= \mu$, ihre halbe kleine Axe $= \mu . \sin \beta$ *).

*) Wir wollen jetzt bei der Bestimmung dieser Curve auf die elliptische Gestalt der Erdbahn Rücksicht nehmen. Wir fanden (§. 115.)

$$\Delta \beta = \frac{m}{ca} [\sin (\lambda - \odot) - e \sin (\lambda - \gamma)] \sin \beta$$

$$\cos \beta \, \Delta \lambda = \frac{m}{ca} [\cos (\lambda - \odot) - e \cos (\lambda - \gamma)].$$

Denkt man sich durch den wahren Ort des Sterns zwei rechtwinklige Coordinatenaxen gezogen, so ist, bei der geringen Ausdehnung der Bahn, $\Delta \beta = y$, $\cos \beta . \Delta \lambda = x$, setzen wir $\frac{m}{ca} = \mu$, so wird

$$\frac{y + \mu e \sin (\lambda - \gamma) \sin \beta}{\mu \sin \beta} = \sin (\lambda - \odot)$$

$$\frac{x - \mu e \cos (\lambda - \gamma)}{\mu} = - \cos (\lambda - \odot).$$

§. 119.

Die Formeln für die Aberration in Länge und Breite sind unter der Voraussetzung gefunden worden, dafs das Auge keine andere Bewegung habe, als diejenige, welche von der fast kreisförmigen Bahn desselben um die Sonne herrührt.

Da nun aber von den Astronomen die sehr wahrscheinliche Meinung aufgestellt ist, dafs die Sonne noch selbst eine eigene Bewegung habe, die man wohl während langer Zeit als gradlinig betrachten kann, so mufs die Erde mit an dieser Bewegung Theil nehmen, so dafs ihre Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn aus zweien zusammengesetzt ist, nämlich aus derjenigen, welche sie in der kreisförmigen Laufbahn haben mufs, und aus der, welche die Sonne selbst besitzt.

Liegt also die Richtung, nach welcher die Sonne fortgeht, nicht in der Ebene der Ecliptik, so wird der in Fig. 15. durch P bezeichnete Punkt auch nicht in der Ecliptik liegen, und es wird der Mühe werth seyn, wenigstens als Rechnungsbeispiel betrachtet, die Theorie der Aberration in dieser Hinsicht zu entwickeln, da wirklich die verschiedenen Beobachtungen eine aufserhalb der Ecliptik liegende Richtung der Bewegung der

Quadrirt man auf beiden Seiten und addirt dann, so kommt

$$\left(\frac{y + \mu e \sin(\lambda - \gamma) \sin 6}{\mu \sin 6}\right)^2 + \left(\frac{x - \mu e \cos(\lambda - \gamma)}{\mu}\right)^2 = 1.$$

Setzt man hier $y = y' - \mu e \sin(\lambda - \gamma) \sin 6$,
$x = x' + \mu e \cos(\lambda - \gamma)$, so ist:

$$\frac{y'y'}{(\mu \sin 6)^2} + \frac{x'x'}{\mu\mu} = 1.$$

Der Stern beschreibt also auch hier eine Ellipse, deren grofse Axe $= \mu$ der Ecliptik parallel ist, deren kleine Axe $= \mu \sin 6$ gefunden wird; doch liegt der wahre Stern nicht im Mittelpunkte der Ellipse, wie bei Annahme einer kreisförmigen Bahn der Erde, sondern entspricht den Coordinaten

$$y' = \mu e \sin(\lambda - \gamma) \sin 6$$
$$x' = - \mu e \cos(\lambda - \gamma).$$

G.

Sonne nach dem Stern λ im Sternbild des Hercules anzuzeigen scheinen.

§. 120.

Die Schlüsse des §. 94. bleiben auch hierbei dieselben, so daſs die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin A,$$

wo α den Unterschied der Richtungen nach dem scheinbaren und wahren Ort des Sterns, A den Winkel der Richtung des Fernrohrs mit der der Bewegung der Erde, v die Geschwindigkeit der Erde und c die des Lichts bedeutet, beibehalten wird. Eben so muſs auch immer der scheinbare Ort, der wahre Ort des Himmelskörpers, und der Punkt, nach welchem zu die Richtung der Bewegung der Erde geht, in einem gröſsten Kreise liegen (§. 95.).

Nur rücksichtlich der Gröſse v ist zu bemerken, daſs dieselbe nicht constant seyn kann, selbst in dem Fall, daſs wir die Erde in einem Kreis um die Sonne laufen lassen.

§. 121.

Es sey nun EC (Fig. 18.) die Ecliptik, in C der Frühlingsäquinoctialpunkt, B der Pol der Ecliptik, P der Punkt, nach welchem die Bewegung des Auges geht; die Länge dieses Punktes $CF = l$, die Breite $PF = b$; L' sey der scheinbare Ort des Himmelskörpers, dessen Länge und Breite CD' und $D'L'$ durch λ' und β' bezeichnet werden; L ist der wahre Ort des Himmelskörpers, $CD = \lambda$, $DL = \beta$, $PL' = A$. Setzt man nun noch $L'P' = A'$, $PP'F = i'$, $CP' = l'$, so wird man die vier sphärisch trigonometrischen Formeln der §§. 97. 98. anwenden können, wenn man nur in denselben

$$A = A', \quad i = i', \quad l = l'$$

setzt. Man hat daher

$$\cos A' = \cos \beta' . \cos (l' - \lambda')$$
$$\cot i' = \sin (l' - \lambda') \cot \beta'$$
$$\sin \beta = \sin (A' + \alpha) . \sin i'$$
$$\tang (l' - \lambda) = \tang (A' + \alpha) . \cos i'.$$

§. 122.

Wir betrachten die Unterschiede zwischen den wahren und scheinbaren Längen und Breiten

$$\beta' - \beta, \quad \lambda' - \lambda,$$

die wir vorher durch $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$ bezeichnet haben, als so klein, daſs die höhern Potenzen derselben ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können. Man findet dann aus den vorigen Gleichungen nach der Methode der §§. 101 und 102.

$$\Delta\beta . \cos \beta = - \alpha . A' . \sin i'$$
$$\Delta\lambda = \frac{\alpha . \cos i' \cos (l' - \lambda)^2}{\cos A'^2},$$

oder auch, indem man $\mu \sin A$ statt α, und $\cos \beta \cos (l' - \lambda)$ statt $\cos A'$ setzt,

$$\Delta\beta = - \mu . \sin A . \sin i' . \cos (l' - \lambda)$$
$$\Delta\lambda = \frac{\mu . \cos i' . \sin A}{\cos \beta^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel $P'LD$ durch u, so ist im Dreieck $P'LD$

$$\cos u = \cos (l' - \lambda) . \sin i,$$

und da auſserdem im Dreieck PBL

$$\sin A = \frac{\sin (l - \lambda) . \cos b}{\sin u},$$

so wird

$$\Delta\beta = - \mu . \sin (l - \lambda) \cos b . \cot u.$$

Ferner ist noch im Dreieck $P'LD$

$$\cos i' = \sin u . \cos \beta,$$

folglich, wenn man diesen Werth, so wie den von $\sin A$ in die Gleichung für $\Delta\lambda$, substituirt

$$1) \quad \Delta\lambda . \cos \beta = + \mu . \sin (l - \lambda) \cos b.$$

Im Dreieck BPL hat man

$$\cot u \sin (l - \lambda) = \cos (l - \lambda) \sin \beta - \cos \beta . \tang b,$$

folglich

2) $\Delta\beta = -\mu \cos b . (l - \lambda) \sin \beta + \mu . \cos \beta . \sin b$,
wodurch die verlangten Formeln gefunden sind. Setzt man in ihnen $b = o$, so erhält man die früher entwickelten.

§. 123.

Es ist nun noch übrig, die Gröſsen μ, b, l zu bestimmen. Wir vernachlässigen hierbei die Eccentricität der Erdbahn, so daſs also die Geschwindigkeit der Erde in der Bahn constant wird, und die Richtung derselben, ohne Rücksicht auf die Bewegung der Sonne zu nehmen, an welcher die Erde freilich ebenfalls Theil hat, mit dem Radius Vector, der aus der Sonne nach dem Ort der Erde gezogen wird, einen rechten Winkel macht. Bei dieser Untersuchung müssen wir folgende Sätze aus der Mechanik entlehnen:

1) Zwei Geschwindigkeiten, welche ein Punkt zu gleicher Zeit annehmen soll, lassen sich durch eine einzige ersetzen, die man die Mittelgeschwindigkeit nennt.
2) Die Richtungen dieser drei Geschwindigkeiten müssen in einerlei Ebene liegen.
3) Die Gröſse der Mittelgeschwindigkeit ist der Seite eines Dreiecks proportional, dessen beide andere Seiten, die den gegebenen Geschwindigkeiten proportional sind, einen Winkel einschlieſsen, der das Supplement desjenigen ist, welchen die Richtungen der gegebenen Geschwindigkeiten bilden.
4) Das Product aus der einen Geschwindigkeit in den Sinus des Winkels, den sie mit der andern gegebenen bildet, ist gleich dem Product aus der Mittelgeschwindigkeit in den Sinus desjenigen Winkels, welchen sie mit dieser zweiten gegebenen einschlieſst.

§. 124.

Aus diesen Sätzen lassen sich μ, b, l folgendermaſsen ableiten. Im Punkt P' (Fig. 19.) treffe die

Richtung der Bewegung der Erde in ihrer als Kreis angenommenen Bahn, die Ecliptik; die Richtung, welche die Sonne bei ihrer Bewegung annimmt, treffe die Himmelskugel in Q, so wird die Richtung der mittlern Geschwindigkeit der Erde, die aus den beiden vorigen zusammengesetzt ist, die Himmelskugel in einem Punkt R so treffen, daſs die drei Punkte P', Q, R in einem und demselben gröſsten Kreise der Himmelskugel befindlich sind, weil alle drei Richtungen in einer Ebene liegen. Ist nun t die Geschwindigkeit der Erde in ihrer kreisförmigen Bahn, s die der Sonne, und v die aus beiden zu gleicher Zeit Statt findenden Geschwindigkeiten hervorgehende Mittelgeschwindigkeit, so hat man den im vorigen Paragraphen angeführten Gesetzen zufolge:

$$vv = tt + ss + 2ts \,.\, \cos P'Q,$$

$$v \,.\, \sin RQ = t \,.\, \sin P'Q.$$

Setzt man $RP' = \xi$, $QP' = \gamma$, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in vorige Gleichungen

$$v \,.\, \sin (\gamma - \xi) = t \,.\, \sin \gamma$$

$$v = \sqrt{tt + ss + 2ts \,.\, \cos \gamma}.$$

Die Länge des Punktes P' ist nach §. 105. $\odot - 90^0$, die Länge des Punktes Q sey L, die Breite B, und die Länge von R ist die im vorigen Paragraphen durch l bezeichnete, so wie die Breite $= b$ ist.

§. 125.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen, zwischen v, t, s, erhält man

$$\sin \xi = \frac{s \,.\, \sin \gamma}{v},$$

$$\cos \xi = \frac{t + s \,.\, \cos \gamma}{v}.$$

Nun ist im Dreieck $P'RR'$:

$$\text{tang} (\odot - 90^0 - l) = \cos RP'R' \,.\, \text{tang}\, \xi$$

$$\cos \xi = \cos b \,.\, \cos (\odot - 90^0 - l),$$

oder auch

$$\cot(l - \odot) = \cos RP'R' \,.\, \text{tang}\, \xi$$
$$\cos \xi = - \cos b \,.\, \sin(l - \odot).$$

Die Gleichung (1) des §. 122.

$$\Delta\lambda \,.\, \cos 6 = + \mu \,.\, \sin(l - \lambda) \cos b$$

läſst sich auch folgendermaſsen schreiben, indem man $\frac{v}{c}$ statt μ, und statt $\sin(l - \lambda)$ die Entwickelung von $\sin[(l - \odot) - (\lambda - \odot)]$ schreibt,

$$\Delta\lambda \,.\, \cos 6 = + \frac{v}{c} \cos b \,.\, \sin(l - \odot) \,.\, \cos(\lambda - \odot)$$
$$- \frac{v}{c} \cos b \,.\, \cos(l - \odot) \,.\, \sin(\lambda - \odot).$$

Aus den beiden obigen Gleichungen

$$\cot(l - \odot) = \cos RP'R' \,.\, \text{tang}\, \xi$$
$$\cos \xi = - \cos b \,.\, \sin(l - \odot)$$

erhält man aber sogleich

$$\cos b \,.\, \sin(l - \odot) = - \cos \xi$$
$$\cos b \,.\, \cos(l - \odot) = - \cos RP'R' \,.\, \sin \xi.$$

Nun war aber auch

$$\cos \xi = \frac{t + s \,.\, \cos \gamma}{v}$$
$$\sin \xi = \frac{s \,.\, \sin \gamma}{v},$$

folglich wird hierdurch

$$v \,.\, \cos b \,.\, \sin(l - \odot) = - t - s \,.\, \cos \gamma$$
$$v \,.\, \cos b \,.\, \cos(l - \odot) = - s \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos R'P'R$$

und wenn diese Werthe in den Ausdruck von $\Delta\lambda \,.\, \cos 6$ substituirt werden, so kommt.

$$\Delta\lambda \,.\, \cos 6 = - \frac{t + s \,.\, \cos \gamma}{c} \,.\, \cos(\lambda - \odot)$$
$$+ \frac{s}{c} \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos RP'R' \,.\, \sin(\lambda - \odot).$$

Im Dreieck $P'QQ'$ hat man

$$\sin \gamma \,.\, \sin RP'R' = \sin B$$
$$\cot \,.\, RP'R' = \cot B \,.\, \sin(\odot - 90^0 - L).$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, so wird

$$\sin\gamma \,.\, \cos RP'R' = -\cos B \,.\, \cos(\odot - L),$$

und da aus demselben Dreieck ebenfalls

$$\cos\gamma = \cos B \,.\, \cos(\odot - 90^0 - L)$$
$$= \cos B \,.\, \sin(\odot - L),$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe von $\sin\gamma \,.\, \cos RP'R'$ und $\cos\gamma$, in obigen Ausdruck von $\Delta\lambda \,.\, \cos 6$

$$\Delta\lambda \,.\, \cos 6 = -\frac{t}{c} \,.\, \cos(\lambda - \odot)$$
$$-\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \cos(\lambda - \odot) \,.\, \sin(\odot - L)$$
$$-\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin(\lambda - \odot) \,.\, \cos(\odot - L),$$

oder wenn man die zwei letzten Glieder zusammenzieht,

$$1)\ \Delta\lambda \,.\, \cos 6 = -\frac{t}{c} \,.\, \cos(\lambda - \odot) - \frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin(\lambda - L).$$

§. 126.

Die Gleichung (2) des §. 122. läßt sich so schreiben:

$$\Delta 6 = -\frac{v}{c} \,.\, \cos b \,.\, \sin 6 \,.\, \cos(l - \odot) \,.\, \cos(\lambda - \odot)$$
$$-\frac{v}{c} \,.\, \cos b \,.\, \sin 6 \,.\, \sin(l - \odot) \,.\, \sin(\lambda - \odot)$$
$$+\frac{v}{c} \,.\, \sin b \,.\, \cos 6.$$

Nun war aber aus vorigem §.

$$\cos b \,.\, \cos(l - \odot) = -\sin\xi \,.\, \cos RP'R'$$
$$\cos b \,.\, \sin(l - \odot) = -\cos\xi,$$

und wenn man beide Gleichungen quadrirt, die Quadrate addirt, auf beiden Seiten von 1 abzieht, und dann wieder die Wurzel auszieht,

$$\sin b = \sin\xi \,.\, \sin RP'R'.$$

Substituirt man diese Werthe in vorigen Ausdruck, so kommt

$$\varDelta 6 = \frac{v}{c} . \sin 6 . \cos(\lambda - \odot) . \sin \xi . \cos RP'R'$$
$$+ \frac{v}{c} . \sin 6 . \sin(\lambda - \odot) . \cos \xi$$
$$+ \frac{v}{c} . \cos 6 . \sin \xi . \sin RP'R'.$$

Substituirt man hierin noch die Werthe von

$$\sin \xi = \frac{s . \sin \gamma}{v}$$

$$\cos \xi = \frac{t + s . \cos \gamma}{v}$$

$$\cos \gamma = \cos B . \sin(\odot - L)$$
$$\sin \gamma . \sin RP'R' = \sin B$$
$$\sin \gamma . \cos RP'R' = - \cos B . \cos(\odot - L),$$

so ergiebt sich der Ausdruck:

$$2) \quad \varDelta 6 = \frac{t}{c} . \sin 6 . \sin(\lambda - \odot)$$
$$- \frac{s}{c} . \sin 6 . \cos B . \cos(\lambda - L)$$
$$+ \frac{s}{c} . \cos 6 . \sin B,$$

wodurch die verlangten Formeln gefunden sind. Setzt man in denselben $s = o$, d. h. nimmt man die Sonne als stillstehend an, so kommt man auf die früher gegebenen Formeln zurück. Man muſs aber hierbei bemerken, daſs, solange die Aenderung in der Richtung der Bewegung der Sonne noch nicht merklich geworden ist, die von der Geschwindigkeit derselben abhängenden Theile nicht angegeben werden können, da sie constante Werthe haben.

§. 127.

Wir können die zuletzt abgeleiteten Formeln auch noch zu einer andern Art der Aberration anwenden, da

jeder Punkt der Erde, außer der mit ihrem Mittelpunkt gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, noch die aus der Umdrehung der Erde um ihre Axe hervorgehende Geschwindigkeit besitzt. Nehmen wir daher an, daſs s die von der Umdrehung der Erde herrührende Geschwindigkeit des Punktes der Oberfläche der Erde, an welchem beobachtet wird, bedeutet, und L und B die Länge und Breite desjenigen Punktes des Himmels, nach welchem in jedem Augenblick die Bewegung der Drehung gerichtet ist, so geben die in $\frac{s}{\mathfrak{v}}$ multiplicirten Glieder der vorigen Formel, die Gröſse, welche man die tägliche Aberration nennt.

Was nun die Richtung der Bewegung dieses Punktes der Erdoberfläche betrifft, so sieht man leicht, daſs dieselbe mit der Berührungslinie an dem Parallelkreise zusammenfällt, welchen der Punkt beschreibt, und diese Berührungslinie muſs nothwendig den Punkt des Himmels treffen, wo der Horizont des Beobachters vom Aequator am östlichen Theil des Himmels geschnitten wird. Die grade Aufsteigung dieses Punktes ist daher um 90° gröſser als die des culminirenden Punktes des Aequators, oder sie beträgt 90° mehr als die in Bogen verwandelte Sternzeit, welche der Beobachter zur Zeit der Beobachtung zählt. Bezeichnen wir diese in Bogen verwandelte Sternzeit durch σ, und bemerken, daſs die Declination des Punktes, nach welchem die Bewegung der Erde gerichtet ist, Null wird, da der Punkt im Aequator selbst liegt, so haben wir zwischen σ, B, L folgende zwei Gleichungen, wenn ε die Schiefe der Ecliptik bedeutet:

$$\cos B \,.\, \cos L = - \sin \sigma,$$
$$\sin B = - \cos \sigma \,.\, \sin \varepsilon.$$

Quadrirt man diese beiden Gleichungen, und addirt ihre Quadrate, so kommt:

$$\cos B^2 \,.\, \cos L^2 + \sin B^2 = \sin \sigma^2 + \cos \sigma^2 \,.\, \sin \varepsilon^2,$$

oder wenn auf beiden Seiten — 1 hinzugesetzt, und dann die Wurzel ausgezogen wird,

$$\cos B \,.\, \sin L = \cos \sigma \,.\, \cos \varepsilon \text{ *)}.$$

§. 128.

Entwickelt man in den Formeln (1) und (2) der §§. 125 u. 126. die Ausdrücke $\sin(\lambda - L)$, $\cos(\lambda - L)$, so lassen sich die daselbst gegebenen Formeln so schreiben:

$$\Delta\lambda \,.\, \cos \beta = -\frac{t}{c} \,.\, \cos(l - \odot)$$
$$-\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin \lambda \,.\, \cos L$$
$$+\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \cos \lambda \,.\, \sin L,$$

$$\Delta\beta = \frac{t}{c} \,.\, \sin \beta \,.\, \sin(\lambda - \odot)$$
$$-\frac{s}{c} \,.\, \sin \beta \,.\, \cos B \,.\, \cos L \,.\, \cos \lambda$$
$$-\frac{s}{c} \,.\, \sin \beta \,.\, \cos B \,.\, \sin L \,.\, \sin \lambda$$
$$+\frac{s}{c} \,.\, \cos \beta \,.\, \sin B;$$

folglich, wenn man hierin die im vorigen §. angegebenen Werthe von $\cos B \,.\, \cos L$, $\cos B \,.\, \sin L$, $\sin B$ substituirt, so kommt

*) Da es bei der Wurzelausziehung unentschieden bleibt, ob auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselben Zeichen genommen werden müssen oder verschiedene, so ist wohl folgende Ableitung vorzuziehn: Es ist

$$\cos B = -\cos L \,.\, \sin \sigma + \sin L \,.\, \cos \sigma \,.\, \cos \varepsilon.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\sin L$, und setzt $1 - \cos L^2$ statt $\sin L^2$, so kommt:

$$\cos B \,.\, \sin L = -\frac{1}{\cos L \,.\, \cos \sigma} \,.\, (\operatorname{tg} L \,.\, \operatorname{tg} \sigma \,.\, \cos \varepsilon) + \cos \sigma \,.\, \cos \varepsilon,$$

und da $\operatorname{tang} L \,.\, \operatorname{tang} \sigma = -\cos \varepsilon$, so erhält man

$$\cos B \,.\, \sin L = \cos \sigma \,.\, \cos \varepsilon$$

wie im Texte. G.

$$\Delta\lambda \, . \cos \beta = -\frac{t}{c} . \cos (\lambda - \odot) + \frac{s}{c} . \sin \lambda \, . \sin \sigma$$
$$+ \frac{s}{c} . \cos \lambda \, . \cos \sigma \, . \cos \varepsilon,$$
$$\Delta\beta = + \frac{t}{c} . \sin \beta \, . \sin (\lambda - \odot)$$
$$+ \frac{s}{c} . \sin \beta \, . \cos \lambda \, . \sin \sigma$$
$$- \frac{s}{c} . \sin \beta \, . \sin \lambda \, . \cos \sigma \, . \cos \varepsilon$$
$$- \frac{s}{c} . \cos \beta \, . \cos \sigma \, . \sin \varepsilon.$$

Die von der täglichen Umdrehung der Erde herrührende Aberration ist viel kleiner als diejenige, welche aus ihrer jährlichen Bewegung um die Sonne entsteht, indem die beiden Aberrationsconstanten $\frac{t}{c}$, $\frac{s}{c}$ sich zu einander verhalten müssen, wie die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn zu der Umdrehungsgeschwindigkeit derselben um ihre Axe. Liegt der Punkt, an welchem beobachtet wird, unter dem Aequator, so verhalten sich die Peripherien der Erdbahn und der Erde (§. 116.) wie 24096 : 1, und da die Zeiten, in welchen diese Wege durchlaufen werden, in dem Verhältniſs von 366,26 : 1 zu einander stehen, so folgt, daſs

$$\frac{t}{c} : \frac{s}{c} = 24096 : 366{,}26.$$

Nehmen wir nun nach §. 116. die Aberrationsconstante $\frac{t}{c} = 20''449$, so folgt, daſs unter dem Aequator das Verhältniſs $\frac{s}{c} = 0''311$ ist. Unter jeder andern Polhöhe muſs diese Gröſse noch mit dem Cosinus der Polhöhe multiplicirt werden.

§. 129.

Wir haben jetzt den Fall zu betrachten, wo sich der leuchtende Punkt bewegt und das Auge ruht. Indem das Licht mit dem leuchtenden Punkt fortgeht, und von ihm fortgestofsen wird, mufs die Geschwindigkeit des Lichts in jedem Augenblick aus zwei verschiedenen Geschwindigkeiten zusammengesetzt seyn, nämlich aus derjenigen, welche das Licht hat, wenn es von einem ruhenden Körper ausfliefst, und der, welche der leuchtende Punkt selbst besitzt. Da aber alle Körper, die wir beobachten, eine Geschwindigkeit haben, welche gegen die des Lichts sehr klein ist, so wird man immer annehmen können, das Licht durchlaufe den Weg vom leuchtenden Punkt zum Auge blofs mit seiner eigenen Geschwindigkeit, als ob der leuchtende Punkt ruhte.

Bezeichnet man die Entfernung desselben vom Auge durch r, die Geschwindigkeit des Lichts durch c, die Zeit, welche das Licht gebraucht, um den Raum r zu durchlaufen, durch t, so hat man $r = ct$, indem die Geschwindigkeit des Lichts als constant angenommen wird.

§. 130.

Gesetzt nun man hat die Lage des leuchtenden Punktes, z. B. eines Planeten oder Cometen, für die Zeit T auf der Erde beobachtet, so wird dies nicht die wahre Lage seyn, welche der Punkt zu dieser Zeit hatte; denn da das Licht die Zeit $t = \frac{r}{c}$ gebrauchte, um von demselben zur Erde zu kommen, so wird dieser Punkt um so viel seine Lage geändert haben, als seine Bewegung während der kleinen Zeit t ausmacht. Man mufs daher entweder die beobachtete Lage aus der bekannten Bewegung des leuchtenden Punktes so corrigiren, dafs die während der Zeit t Statt findende Veränderung der Lage zur beobachteten hinzugesetzt wird, oder man mufs die Zeit der Beobachtung corrigiren, indem man die Zeit t von derselben abzieht.

§. 131.

Der letzte Fall, wenn sich sowohl das Auge als der leuchtende Punkt bewegt, ist aus den beiden vorigen zusammen gesetzt. Man verbessert nämlich zuerst den beobachteten Ort vermittelst der Aberration, welche in dem Fall Statt findet, wenn sich das Auge allein bewegt, und hierauf geschieht die zweite Correction auf eine der im vorigen §. angegebenen Arten.

Bei den Fixsternen ist bloſs die erste Correction nöthig, da wir ihr eignes Fortrücken am Himmel, wenn sie auch eine wirkliche Bewegung haben, nicht bemerken können. Da bei den astronomischen Rechnungen die Entfernung, welche im vorigen §. durch r bezeichnet wurde, nicht in Meilen ausgedrückt, sondern bloſs angegeben wird, das wie Vielfache der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne sie sey, so muſs die Formel des vorigen §. $r = ct$ etwas geändert werden, um sie dieser Art von Maaſs anzupassen. Bezeichnet man nämlich die in Secunden ausgedrückte Zeit, in welcher das Licht die mittlere Entfernung von der Erde zur Sonne durchläuft, durch t', so hat man ebenfalls $1 = ct'$, und verbindet man hiermit die Gleichung $r = ct$, so bleibt $rt' = t$, wo t' gewöhnlich $= 493$ Secunden angenommen wird.

§. 132.

Wir wollen als Beispiel zu dem letzten Fall annehmen, das Auge sowohl als der Körper, welcher beobachtet wird, bewege sich in Kreisen, die in parallelen Ebenen so liegen, daſs die Linie, welche beider Mittelpunkte verbindet, senkrecht auf dieser Ebene steht. Die Winkelgeschwindigkeit beider Punkte, des Auges und des zu beobachtenden Körpers, sey gleich groſs, und habe gleiche Richtung. Nennt man v die Geschwindigkeit des Auges, c die des Lichts, A den Winkel, welchen das nach dem scheinbaren Ort des Objects gerichtete Fernrohr mit der Richtung der Be-

wegung des Auges bildet, α die Aberration, so hat man, wie früher gezeigt worden ist,

$$\frac{v}{c} . \sin A = \sin \alpha,$$

und $A + \alpha$ wäre der Werth des Winkels, welchen die nach dem wahren Ort des Gegenstandes gezogene Gesichtslinie mit der Richtung der Bewegung des Auges bildete, wenn der Gegenstand sich in Ruhe befände. Ferner sey l die Entfernung des Auges vom Object, so ist $\frac{l}{c} = t$ die Zeit, welche das Licht gebraucht, um diese Entfernung zu durchlaufen. Ist nun r der Halbmesser des Kreises, welchen das Auge beschreibt, r' der Halbmesser des Kreises, den der Gegenstand beschreibt, so wird die wirkliche Geschwindigkeit des Gegenstandes, da wir die des Auges $= v$ setzen, und für beide Körper gleiche Winkelgeschwindigkeit annehmen, $\frac{vr'}{r}$. Es wird also der in der Zeit t vom Gegenstand durchlaufene Weg

$$= \frac{vr'}{r} . t = \frac{vr'l}{rc}.$$

Dieser Raum erscheint dem Auge unter einem Winkel $= \beta$, der durch die Proportion

$$\sin A : l = \sin \beta : \frac{vr'l}{rc}$$

gefunden wird, und die wahre Neigung des nach dem Ort des Gegenstandes gezogenen Gesichtsstrahls wird, da wir für beide Punkte gleiche Richtung der Bewegung angenommen haben $= A + \alpha - \beta$. Wegen der Kleinheit der Winkel α, β können wir auch statt der Sinus die Bogen selbst setzen, und dann wird

$$\alpha = \frac{v}{c} . \sin A, \quad \beta = \frac{vr'}{rc} . \sin A$$

$$\alpha - \beta = \frac{v(r - r')}{rc} . \sin A.$$

§. 133.

Diese Auflösung läſst sich auf die Aberration des Lichts anwenden, die bei der Beobachtung terrestrischer Gegenstände Statt findet. Beobachtet man nämlich unter einer Polhöhe p einen Gegenstand, dessen Polhöhe $p - \delta$ ist, so hat man den vorigen Fall, indem das Auge sowohl als der Gegenstand Kreise beschreiben, deren Lage den im vorigen §. gegebenen Bedingungen entspricht. Ist der Halbmesser des Aequators der Erde $= a$, die Geschwindigkeit eines Punktes im Aequator $= s$, so hat man

$$v = s \,.\, \cos p, \quad r = a \,.\, \cos p, \quad r' = a \,.\, \cos(p - \delta)$$

und der Winkel A ist der Werth von 90^0 weniger dem beobachteten Azimuth des Gegenstandes nach Westen zu gezählt. Man erhält hierdurch

$$\alpha - \beta = \frac{s}{c} \,.\, \cos p \,[\cos p - \cos(p - \delta)] \,.\, \sin A$$

$$= -2\,\frac{s}{c} \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\delta \,.\, \sin(p - \tfrac{1}{2}\delta) \,.\, \sin A \,.\, \cos p$$

$$= -\tfrac{1}{2} \,.\, \frac{s}{c} \,.\, \delta \,.\, \sin 2p \,.\, \sin A,$$

indem man den Bogen δ immer als so klein betrachten kann, daſs seine Potenzen sich vernachlässigen lassen. Der Werth von $\frac{s}{c}$ ist der §. 128. gefundene $= 0''311$, und man sieht, daſs wegen der Kleinheit von δ, die wegen der Aberration zu corrigirende Gröſse des beobachteten Werthes von A immer sehr klein seyn muſs.

§. 134.

Es dürfte nicht ganz überflüssig seyn, hier eine zur Aberration gehörende Frage zu beantworten, die man aufgestellt hat, um zwischen der Richtigkeit der Undulationstheorie und der der Emanationstheorie zu entscheiden, wenn wir auch im Vorigen noch nicht alle Gesetze angegeben haben, auf denen diese Entscheidung beruht. Man mag von diesen beiden Systemen

der Fortpflanzung des Lichts annehmen, welches man will, so ist es immer nothwendig, bei dem Uebergang des Lichts aus dem leeren Raum in ein durchsichtiges Mittel, oder aus einem durchsichtigen Mittel ins andere, eine Aenderung der Geschwindigkeit desselben vorauszusetzen, und zwar bewegt sich das Licht in einem brechenden Mittel, z. B. Wasser, Glas, nach der Emanationstheorie schneller als im leeren Raume, nach der Undulationstheorie hingegen langsamer.

Gesetzt nun, man habe eine Röhre *ABCD* (Fig. 19 b.), vermittelst welcher man die Lage eines Sterns beobachten kann, mit Wasser gefüllt, so wird der Röhre eine solche Lage gegeben werden müssen, daſs der Lichtstrahl innerhalb derselben die Axe *EF* durchläuft, während der Lichtstrahl auſserhalb des Wassers die eigentliche wahre Richtung *FG* besitzt. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit des Auges durch v, die des Lichts im Wasser durch c', den Neigungswinkel der Axe *EF* der Röhre gegen die Richtung der Bewegung des Auges durch A, die Aberration durch den Winkel *EFH* durch α', so hat man die schon oft gebrauchte Gleichung

$$\frac{v}{c'} . \sin A = \sin \alpha',$$

und man sieht hieraus, daſs bei der Annahme des Emanationssystems, wo c' gröſser wird, α' kleiner ausfallen muſs, als wenn die Röhre bloſs mit Luft gefüllt wäre. Bei der Annahme des Vibrationssystems wird das Gegentheil Statt finden.

Nun ereignet sich aber bei dem Uebergange des Lichts aus Luft in Wasser eine Brechung oder Ablenkung vom gradlinigen Wege, so daſs der Strahl *HF* und dessen rückwärts gehende Verlängerung schon den gebrochenen Strahl anzeigt. Dem Brechungsgesetz zufolge, welches in der Dioptrik vorkommt, wird nun, wenn *KF* den vom Stern herkommenden Lichtstrahl angiebt, den wir nach *L* verlängert ansehen,

$$\sin LFE : \sin HFE = n : 1,$$

wo n eine constante Gröſse, das sogenannte Brechungsverhältniſs, ist. Da $HFE = \alpha'$ gesetzt war, so kommt

$$\sin LFE = n \,.\, \sin \alpha',$$

oder wenn wir statt $\sin \alpha'$ seinen Werth substituiren,

$$\sin LFE = \frac{vn}{c'} \,.\, \sin A.$$

Der Emanationstheorie zufolge ist aber $c' = nc$, wo c die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum bedeutet, also bleibt

$$\sin LFE = \frac{v}{c} \,.\, \sin A,$$

welches die frühere Formel ist, und hieraus sieht man, daſs nach der Emanationstheorie die schnellere Bewegung des Lichts im brechenden Mittel die Aberration nicht ändert. Nach der Undulationstheorie ist aber $c' = \frac{c}{n}$, also

$$\sin LFE = \frac{v}{c}\, nn \,.\, \sin A,$$

folglich wird nach letzterer Theorie die Aberration im Verhältniſs von $1 : nn$ vergröſsert, da n bei jedem brechenden Mittel die Einheit übertrifft.

Von der scheinbaren Bahn der Körper.

§. 135.

Zieht man vom Auge zu einem beobachteten Objecte, das wir hier als Punkt annehmen wollen, eine grade Linie, so giebt die Lage derselben die Richtung an, in welcher jenes Object vom Auge gesehen wird. Bewegt sich Auge und Object, oder eins von beiden, so wird im Allgemeinen auch diese Richtung sich ändern. Sind nun die Bahnen des Auges und des Objects, so wie auch die Gesetze, nach denen sie beschrieben werden, bekannt, so mufs für jeden Augenblick die Richtung der graden Linie, welche Auge und Object verbindet, sich finden lassen.

§. 136.

Die Bestimmung und Vergleichung verschiedener Richtungen wird sehr erleichtert, wenn man eine aus einem beliebigen Mittelpunkt mit beliebigem Halbmesser beschriebene Kugel zu Hülfe nimmt. Zieht man aus ihrem Mittelpunkte Parallelen mit den zu vergleichenden Richtungen, so können die Punkte auf der Oberfläche der Kugel, in welchen sie von den Parallelen geschnitten wird, diese Richtungen darstellen. Repräsentirt man so die Richtungen der in jedem Zeitpunkte vom Auge zum Objecte gezogenen graden Linien, so bildet sich auf der Oberfläche der Kugel eine continuirliche Curve, welche man die scheinbare Bahn des Objects nennt. Das Verhältnifs der einer unendlich kleinen Zeit entsprechenden Aenderung in der Richtung der Gesichts-

linie zu jener Zeit selbst, heifst die **scheinbare Geschwindigkeit** oder auch die **Winkelgeschwindigkeit** des Objects. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich die scheinbare Bahn und die Winkelgeschwindigkeit des Objects finden läfst.

§. 137.

Es seyen für irgend einen Zeitpunkt t die rechtwinkligen Coordinaten des Objects x, y, z, die des Auges x', y', z', die Richtung der Gesichtslinie werde auf der Hülfskugel durch O angegeben. Um diesen Punkt auf der Kugel festzusetzen, legt man eine Ebene durch den Mittelpunkt, welche auf der Oberfläche durch den gröfsesten Kreis MN (Fig. 20.) dargestellt wird, nimmt in diesem einen beliebigen Punkt K, zieht durch den Pol P und den zu bestimmenden Punkt O einen gröfsesten Kreis, der MN in L trifft, und giebt KL und OL an, indem man hinzusetzt, ob der Bogen OL aufwärts oder abwärts, d. h. ob er positiv oder negativ genommen werden soll. Die Ebene MN wollen wir hier, der gröfseren Einfachheit wegen, der Ebene der Coordinaten x, y parallel legen; K möge die Richtung des positiven Theils der Axe der x darstellen; die Längen auf MN sollen in dem Sinne gezählt werden, in welchem man auf dem kürzesten Wege von K zu K', welcher Punkt dem positiven Theile der Axe der y entspricht, gelangt. Es sey $Kl = l$, $OL = b$.

§. 138.

Ist A (Fig. 21.) das Auge, B das beobachtete Object, so ziehe man durch A, AX, AY, AZ den Coordinatenaxen parallel, denke sich durch AX, AY eine Ebene gelegt, und fälle auf diese das Perpendikel BQ, dann wird OAQ durch den Bogen OL, QAX durch LK gemessen, und wir haben

$$OAQ = b$$
$$QAX = l.$$

Zieht man QS, QR den Linien AX, AY parallel, so ist: $AR = x - x'$, $AS = y - y'$, $BQ = z - z'$, $AB = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$, folglich:

$$\sin BAQ = \frac{z - z'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

$$\operatorname{tang} QAR = \frac{y - y'}{x - x'},$$

oder wenn man $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = r$ setzt:

$$\sin b = \frac{z - z'}{r}$$

$$\operatorname{tang} l = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

Da b nicht gröſser als 90° sein kann, so ist es durch den Sinus vollkommen bestimmt; l dagegen kann jeden beliebigen Werth haben, wird also durch die Tangente nicht ganz bestimmt, wir haben aber auch

$$\sin l = \frac{QR}{AQ} = \frac{y - y'}{r \cos b}$$

$$\cos l = \frac{AR}{AQ} = \frac{x - x'}{r \cos b}$$

aus welchen Formeln der Bogen l sich ohne alle Zweideutigkeit ergiebt. Man kann also hiernach die Richtung der Gesichtslinie, wenn die Oerter des Auges und des Objects gegeben sind, bestimmen.

§. 139.

Die Coordinaten x, y, z; x', y', z' sind Functionen der Zeit t, setzt man also in den Gleichungen für $\sin b$ und $\operatorname{tang} l$ ihre durch t ausgedrückten Werthe, so erhält man $\sin b$ und $\operatorname{tang} l$ durch t bestimmt. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so erhält man eine neue Gleichung, welche die Beziehung zwischen l und b angiebt, d. h. die Gleichung für die scheinbare Bahn des Objects.

§. 140.

Bewegen sich Auge und Object in derselben Ebene, so ist es am einfachsten, die Coordinaten x und y in dieser Ebene zu nehmen, dann ist $z = o$, $z' = o$, also auch $\sin b = o$ und $b = o$; die scheinbare Bahn ist also ein gröſsester Kreis. Dasselbe findet Statt, wenn das Auge ruht und das Object sich in einer durch das Auge gehenden Ebene bewegt, oder wenn das Object still steht, und das Auge sich in einer durch dasselbe gehenden Ebene bewegt.

§. 141.

Um die scheinbare Geschwindigkeit des Objects zu haben, ist es nur nöthig, aus $\sin b$ und $\operatorname{tang} l$, die uns als Functionen von t gegeben sind, $\frac{db}{dt}$ und $\frac{dl}{dt}$ abzuleiten, das letzte Differentialverhältniſs giebt mit $\cos b$ multiplicirt die Geschwindigkeit in einer der MN (Fig. 20.) parallelen Richtung, das erste die Geschwindigkeit in der Richtung OP. Für die Totalgeschwindigkeit erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{db^2 + \cos b^2 . dl^2}}{dt}$$

oder, wenn wir diese Geschwindigkeit in Secunden angeben wollen,

$$206265'' \cdot \frac{\sqrt{db^2 + \cos b^2 . dl^2}}{dt}.$$

§. 142.

Die Richtung, nach der in irgend einem Augenblicke das Object sich scheinbar bewegt, wird aus der Tangente des Winkels, den sie mit einem durch O dem MN parallel gelegten Kreise macht, bestimmt; diese Tangente findet man $= \frac{db}{\cos b . dl}$.

Von der Parallaxe.

§. 143.

Die Gesichtslinien, welche von zwei verschiedenen Oertern des Auges, nach ein und demselben Gegenstand gezogen werden, bilden an diesem einen Winkel, welcher die Parallaxe des Objects genannt wird. Sind z. B. F und B zwei Oerter, die das Auge nach und nach einnimmt, oder auch die Oerter zweier gleichzeitiger Beobachter, und O ein Gegenstand, nach welchem die Gesichtslinien FO, BO (Fig. 22.) gezogen sind, so wird der Winkel FOB die Parallaxe von O angeben.

Kennt man die Entfernung FB der beiden Beobachtungsörter von einander, und hat man die Winkel OFB, OBF gemessen, so lassen sich im Dreieck FBO die Entfernungen FO und FB finden. Man hat in diesem Dreieck die Proportion

$$FB : FO = \sin FOB : \sin FBO,$$

folglich hieraus

$$FO = \frac{FB \,.\, \sin FBO}{\sin FOB}.$$

Ist der Winkel FOB Null, so wird FO unendlich groſs; in diesem Fall werden die Gesichtslinien FO, BO einander parallel laufen, und man sagt daher, daſs unendlich entfernte Gegenstände keine Parallaxe besitzen. Es kann aber der Fall eintreten, daſs der Sinus der Parallaxe Null wird, ohne daſs das Object deſswegen unendlich weit entfernt ist. Dies geschieht dann, wenn

der Sinus des Winkels FBO zugleich Null ist, in welchem Fall die Entfernung FO sich unter der Form $\frac{o}{o}$ darstellt, also einen unbestimmten Werth erhält. Man sieht leicht, daſs in diesem Fall die gegenseitige Lage der drei Punkte F, B, O so beschaffen seyn muſs, daſs alle drei auf ein und derselben graden Linie sich befinden, und wenn der Punkt O, sowohl von F als von B aus gesehen, nach einerlei Seite zu liegt, so wird seine Parallaxe Null; erscheint derselbe aber von beiden Punkten nach entgegengesetzten Richtungen, so wird die Parallaxe 180 Grad betragen. In beiden Fällen wird der Sinus Null.

§. 144.

Es kommt bei terrestrischen Messungen sehr häufig der Fall vor, daſs man einen zu beobachtenden Gegenstand von einem bestimmten Standpunkt aus nicht sehen kann, indem derselbe von einem dazwischenliegenden Körper verdeckt wird, und man sich etwas vom eigentlichen Standpunkte entfernen muſs, um selbigen zu Gesicht zu bekommen. Auch kann der Fall eintreten, daſs man den inne gehabten Standpunkt, von einem neuen Standpunkt aus, wieder als Object gebrauchen will, derselbe sich aber in der Entfernung nicht kenntlich macht, in seiner Nähe hingegen sich ein deutliches Object zeigt, das man an die Stelle des Standpunkts setzen muſs. Letzterer Fall würde z. B. dann eintreten, wenn sich der Standpunkt auf einem Thurm befindet, und man das Instrument nicht unmittelbar unter die Spitze desselben, die späterhin als Object dienen soll, aufstellen kann. In allen diesen Fällen muſs dann an den beobachteten Winkeln eine Verbesserung angebracht werden, die wir etwas näher untersuchen wollen.

§. 145.

In O befinde sich der Standpunkt (Fig. 23.), in B das zu beobachtende Object; C sey der Punkt, auf

welchen die in O gemachte Beobachtung reducirt werden soll, OM eine feste Linie, von welcher aus die beobachteten Winkel gezählt werden. Die Lage des Punktes C wird durch das Perpendikel $CN = p$, und $ON = n$, gegen den Punkt O bestimmt; der beobachtete Winkel BOM sey $= \alpha$, die Entfernung $OB = r$, diese braucht hierbei eben nicht sehr genau bekannt zu seyn, da wir in der Praxis immer annehmen können, die Gröfsen p und n seyen gegen r genommen sehr klein. Zieht man BP senkrecht auf OM, so ist

$$BP = r \,.\, \sin\alpha, \quad OP = r \,.\, \cos\alpha.$$

Wird dann CQ parallel mit OP gezogen, so ist QCB der gesuchte Winkel, welchen wir durch α' bezeichnen wollen. Man hat dann

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{BQ}{CQ} = \frac{r \,.\, \sin\alpha - p}{r \,.\, \cos\alpha - n}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha = \frac{n \,.\, \operatorname{tang}\alpha - p}{r \,.\, \cos\alpha - n}$$

$$1 + \operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\alpha = \frac{r - n \,.\, \cos\alpha - p \,.\, \sin\alpha}{r \,.\, \cos\alpha - n} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

und da bekanntlich

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha' \,.\, \operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{tang}(\alpha' - \alpha),$$

so erhält man:

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{n \,.\, \sin\alpha - p \,.\, \cos\alpha}{r - n \,.\, \cos\alpha - p \,.\, \sin\alpha}.$$

Setzt man noch $n = q \,.\, \cos\beta$, $p = q \,.\, \sin\beta$, wo, wie man leicht sieht, q die Entfernung, OC und β den Winkel CON bedeutet, so hat man mit Berücksichtigung der gehörigen Zusammenziehungen:

$$\operatorname{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{q \,.\, \sin(\alpha - \beta)}{r - q \,.\, \cos(\alpha - \beta)},$$

und man sieht leicht, dafs $\alpha' - \alpha$ die Parallaxe des Objects rücksichtlich der Entfernung $OC = q$ darstellt.

§. 146.

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha' - \alpha = \delta, \quad \alpha - \beta = \varDelta, \quad \frac{q}{r} = \varrho,$$

so kann man vorige Formel auch so schreiben:

$$\tang \delta = \frac{\varrho \,.\, \sin \varDelta}{1 - \varrho \,.\, \cos \varDelta},$$

und aus dieser Formel läſst sich der Winkel δ durch folgende sehr einfache Reihe unmittelbar finden. Bezeichnet man die imaginäre Gröſse $\sqrt{-1}$ durch i, so hat man aus voriger Gleichung:

$$\frac{1 + i \tang \delta}{1 - i \tang \delta} = \frac{1 - \varrho\,(\cos \varDelta - i \sin \varDelta)}{1 - \varrho\,(\cos \varDelta + i \sin \varDelta)}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so kommt:

$$\log \frac{1 + i \tang \delta}{1 - i \tang \delta} = \log\,[1 - \varrho\,(\cos \varDelta - i \sin \varDelta)]$$
$$- \log\,[1 - \varrho\,(\cos \varDelta + i \sin \varDelta)],$$

oder, wenn man die Logarithmen nach der bekannten Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}\log \left(\frac{1 + i \tang \delta}{1 - i \tang \delta}\right) = & - \varrho\,(\cos \varDelta - i \sin \varDelta) \\ & - \tfrac{1}{2}\varrho^2\,(\cos \varDelta - i \sin \varDelta)^2 \\ & - \tfrac{1}{3}\varrho^3\,(\cos \varDelta - i \sin \varDelta)^3 \\ & - \ldots\ldots\ldots \\ & + \varrho\,(\cos \varDelta + i \sin \varDelta) \\ & + \tfrac{1}{2}\varrho^2\,(\cos \varDelta + i \sin \varDelta)^2 \\ & + \tfrac{1}{3}\varrho^3\,(\cos \varDelta + i \sin \varDelta)^3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Aus der Theorie der imaginären Gröſsen ist aber bekannt, daſs

$$\log \frac{1 + i \tang \delta}{1 - i \tang \delta} = 2 i \delta$$

$$(\cos \varDelta \pm i \sin \varDelta)^n = \cos n\varDelta \pm i \sin n\varDelta,$$

was für eine Zahl auch n bedeuten mag. Man behält also nach der Substitution dieser Werthe, mit Hinweg-

lassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $2i$, die Reihe

$$\delta = \varrho . \sin \varDelta + \tfrac{1}{2}\varrho^2 . \sin 2\varDelta + \tfrac{1}{3}\varrho^3 . \sin 3\varDelta + \ldots$$

Um bei der Berechnung dieser Reihe δ gleich in Secunden zu erhalten, braucht man das Resultat nur mit 206264″8 zu multipliciren.

§. 147.

Die Berechnung der Parallaxe bei Beobachtungen der Himmelskörper ist ebenfalls, so wie die in einem der vorigen Abschnitte erwähnte Aberration, eine Verbesserung, der die beobachteten Winkel unterworfen sind. Die Beobachtungen können nicht anders als auf der Oberfläche der Erde angestellt werden, so daſs also zur Vergleichung der an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche angestellten Beobachtungen es nothwendig wird, sie vorher alle auf einen und denselben Punkt, für welchen der Mittelpunkt der Erde angenommen wird, zu reduciren. Es sey C (Fig. 24.) der Mittelpunkt der Erde, in O ein Beobachter, so giebt bei der als Kugel angenommenen Erde der verlängerte Halbmesser CO in Z das Zenith des Beobachters an. In S befinde sich ein Himmelskörper, so wird OSC die Parallaxe desselben seyn. Bezeichnet man dieselbe durch p und den Winkel SOZ durch z, so hat man im Dreieck SOZ die Proportion:

$$SC : CO = \sin z : \sin p.$$

Ferner sey OS' senkrecht auf CZ und $CS' = CS$, so ist der Winkel $OS'C$ derjenige, den man in der Astronomie die Horizontalparallaxe nennt, welche wir $= P$ setzen. Dann ist im Dreieck $OS'C$

$$S'C : OC = 1 : \sin P,$$

folglich, wenn man diese Proportion mit der vorigen verbindet,

$$1 : \sin P = \sin z : \sin p,$$

und hieraus erhält man:

$$\sin p = \sin P . \sin z.$$

Der Winkel p wird die Höhenparallaxe genannt, und wir sehen hieraus, daſs sich die Sinus der verschiedenen Höhenparallaxen für einen und denselben Himmelskörper, wie die Sinus der beobachteten Zenithdistanzen desselben verhalten. Hat man durch diese Formel die Parallaxe gefunden, so zieht man dieselbe von der beobachteten Zenithdistanz ab, und man erhält dann die Zenithdistanz, welche der Beobachter gefunden haben würde, wenn er im Mittelpunkt der Erde die Beobachtung angestellt hätte. Uebrigens sieht man hieraus, daſs die Parallaxe den Abstand des Himmelskörpers vom Zenith vergröſsert, oder seine Höhe über dem Horizont vermindert.

§. 148.

Bezeichnet man die Zenithdistanz, welche der Beobachter im Mittelpunkt der Erde gefunden haben würde, durch Z, und die auf der Oberfläche der Erde beobachtete durch z, wo letztere mit der Parallaxe p behaftet ist, so hat man $z = Z + p$, folglich, wenn dieser Werth in die Gleichung

$$\sin p = \sin P \,.\, \sin z$$

substituirt wird, so kommt

$$\begin{aligned} \sin p &= \sin P \,.\, \sin (Z + p) \\ &= \sin P\,(\sin Z \,.\, \cos p + \cos Z \,.\, \sin p). \end{aligned}$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch $\cos p$, und sucht dann $\operatorname{tang} p$, so kommt

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin P \,.\, \sin Z}{1 - \sin P \,.\, \cos Z}.$$

Man sieht, daſs diese Gleichung mit der frühern (§.146.)

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\varrho \,.\, \sin \Delta}{1 - \varrho \,.\, \cos \Delta}$$

übereinstimmt, wenn man $\varrho = \sin P$, $\Delta = Z$ setzt, folglich wird man der in demselben §. entwickelten Reihe zufolge auch

$$p = \sin P \,.\, \sin Z + \tfrac{1}{2} \sin P^2 \,.\, \sin 2Z + \tfrac{1}{3} \sin P^3 \,.\, \sin 3Z + \ldots$$

erhalten.

§. 149.

Um die zur Berechnung der Parallaxe nothwendigen Formeln in ihrer gröfsten Allgemeinheit zu haben, wollen wir folgende Betrachtungen anstellen. Wir nehmen drei Punkte an, das Object O, den Beobachter B, und den festen Punkt F (Fig. 22.), auf welchen die in B beobachteten Winkel, die zur Bestimmung der Lage des Objects O dienen sollen, reducirt werden. Durch den Punkt F legen wir drei sich rechtwinklig durchschneidende Coordinatenaxen, und bezeichnen die auf diese Axen bezogenen Coordinaten von O durch X, Y, Z, die Coordinaten von B durch x, y, z. Legt man nun durch den Punkt B auch drei Coordinatenaxen, die den in F sich durchschneidenden parallel sind, und bezeichnet die Coordinaten des Punktes O rücksichtlich dieser neuen Axen durch X', Y', Z', so erhält man die drei Gleichungen

$$X' = X - x, \quad Y' = Y - y, \quad Z' = Z - z.$$

Jetzt verbinde man die drei Punkte O, F, B durch grade Linien, bezeichne die Entfernung OF durch R, die Entfernung BF durch r, die Entfernung OB durch R'; ferner seyen die Winkel, welche diese Radien mit ihren Projectionen auf der Ebene der xy bilden, H, h, H', und endlich die Winkel, welche die besagten Projectionen mit der Axe der x machen, A, a, A', so hat man aus der analytischen Geometrie die Formeln:

$$X = R \,.\, \cos H \,.\, \cos A$$
$$Y = R \,.\, \cos H \,.\, \sin A$$
$$Z = R \,.\, \sin H$$
$$x = r \,.\, \cos h \,.\, \cos a$$
$$y = r \,.\, \cos h \,.\, \sin a$$
$$z = r \,.\, \sin h$$
$$X' = R' \,.\, \cos H' \,.\, \cos A'$$
$$Y' = R' \,.\, \cos H' \,.\, \sin A'$$
$$Z' = R' \,.\, \sin H',$$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichungen

$$X' = X - x, \quad Y' = Y - y, \quad Z' = Z - z$$

substituirt, so kommt:

1) $R.\cos H.\cos A - r.\cos h.\cos a = R'.\cos H'.\cos A'$

2) $R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a = R'.\cos H'.\sin A'$

3) $R.\sin H \quad - r.\sin h \quad = R'.\sin H'$.

Vermittelst dieser Gleichungen läſst sich, wenn zwei der drei Systeme von Gröſsen

$$R,\ H,\ A;\quad r,\ h,\ a;\quad R',\ H',\ A'$$

gegeben sind, das dritte System finden. Denn wir wollen z. B. annehmen, die beiden ersten Systeme

$$R,\ H,\ A;\quad r,\ h,\ a$$

seyen gegeben, so hat man, indem die Gleichung (2) durch (1) dividirt wird

$$\text{tang}\, A' = \frac{R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a}{R.\cos H.\cos A - r.\cos h.\cos a},$$

wodurch der Winkel A' bekannt wird. Dividirt man hierauf (3) durch (2), so kommt

$$\text{tang}\, H' = \sin A' \cdot \frac{R.\sin H - r.\sin h}{R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a},$$

also kennt man auch H', und man kann endlich aus irgend einer der drei Formeln auch R' berechnen.

Vom Schatten der Körper.

§. 150.

Wenn das Licht, welches von irgend einem leuchtenden Punkte oder Körper ausgeht, auf seinem Wege einem undurchsichtigen Körper begegnet, so wird es von demselben in seiner fortschreitenden Bewegung aufgehalten, und es entsteht hinter dem Körper ein lichtleerer Raum, der der Schatten des Körpers genannt wird. Von irgend einem andern Gegenstand, der hinter dem Körper im lichtleeren Raum sich befindet, sagt man, er liege im Schatten, oder er werde verdunkelt. Schatten ist also nichts anders als die Abwesenheit des

Lichts in einem gewissen Raum. Bei dem gewöhnlichen Sprachgebrauch versteht man unter dem Schatten nicht den lichtleeren Raum selbst, sondern bloſs den Durchschnitt desselben mit der Oberfläche eines andern Körpers, indem erst auf diesem Durchschnitt der lichtleere Raum sich erkennen läſst. Diesen Durchschnitt nennt man die Projection des Schattens oder den Schlagschatten. Die Gestalt desselben hängt im Allgemeinen von der Lage und der Gestalt des leuchtenden, des schattenwerfenden und des durchschneidenden Körpers ab.

§. 151.

So lange man den leuchtenden Körper bloſs als einen physischen Punkt betrachtet, dessen Dimensionen gegen die des schattenwerfenden Körpers als unendlich klein angesehen werden können, wird der projicirte Schatten selbst einfach seyn, und der ganze lichtleere Raum läſst sich als Pyramide oder Kegel annehmen, dessen Spitze der leuchtende Punkt ist, und dessen Seitenlinien die Oberfläche des schattenwerfenden Körpers berühren. Die Linie, in welcher die Berührungspunkte der Seitenlinien mit der Oberfläche des Körpers liegen, heiſst die Erleuchtungsgrenze, sie trennt den erleuchtenden Theil der Oberfläche von dem im Schatten liegenden.

Wenn hingegen der leuchtende Körper wirklich als ausgedehnt angenommen wird, so hat man zwei verschiedene Arten von Schatten zu betrachten. Es befindet sich nämlich dann hinter dem Körper ein Raum, der so wie im vorigen Fall gar kein Licht enthält, und dieser heiſst daher auch der volle Schatten oder der Kernschatten. Dieser völlig lichtleere Raum wird aber noch von einem zweiten umgeben, in welchen nicht von allen leuchtenden Punkten des Körpers Licht fallen kann, und zwar werden seine Theile desto weniger Licht enthalten, je näher sie dem vollen

Schatten liegen, desto mehr Licht hingegen, je weiter sie von demselben entfernt sind, bis die Lichtmenge durch unmerkliche Abstufungen in den vollen Lichtglanz übergeht. Dieser zweite Schatten wird der Halbschatten genannt.

§. 152.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wo sowohl der leuchtende als der erleuchtete Körper Kugeln sind, und da eine durch die Mittelpunkte dieser Kugeln gelegte Ebene immer ein und dieselbe Figur als Durchschnitt giebt, so mögen C und D (Fig. 25.) die Mittelpunkte der Kreise AB und EF seyn, die durch den Durchschnitt der Kugeln vermittelst einer durch ihre Mittelpunkte gelegten Ebene entstehen. Der Kreis AB sey der Durchschnitt der leuchtenden, der Kreis EF der Durchschnitt der erleuchteten Kugel, und wir nehmen den Durchmesser der erstern gröſser als den der letztern an. Zieht man an die beiden Kreise Berührungslinien AE und BF, die sich verlängert in G schneiden, so wird jeder Punkt, welcher in dem Raum EGF enthalten ist, kein Licht von der leuchtenden Kugel erhalten, und EGF selbst wird den Durchschnitt des Schattenkegels angeben, dessen Axe DG ist. Es sey der Halbmesser der leuchtenden Kugel $CA = r$, der der erleuchteten $DE = r'$, die Entfernung der beiden Mittelpunkte der Kugeln von einander $CD = a$, die Länge des Schattenkegels $DG = x$, so hat man in den beiden ähnlichen Dreiecken ACG, EDG, die Proportion

$$r : a + x = r' : x,$$

und hieraus ergiebt sich $x = \frac{ar'}{r - r'}$.

So lange $r > r'$, wie hier in der Figur angenommen ist, wird x immer einen positiven Werth erhalten, und sich also wirklich ein begrenzter Schattenkegel bilden, allein sobald $r < r'$ ist, d. h. wenn die leuchtende

Kugel einen kleinern Durchmesser als die erleuchtete hat, wird x negativ, und dann fällt die Spitze des Kegels nicht hinter den dunkeln Körper, und der Schatten erstreckt sich dann ins Unendliche. Ist $r = r'$, so hat man $x = \infty$, folglich geht dann der Schattenkegel in einen Schattencylinder über.

§. 153.

Die beiden Berührungslinien, welche die Grenze des vollen Schattens bilden, waren so gezogen, dafs dieselben beide Kreise an einer und derselben Seite der die Mittelpunkte derselben verbindenden Linie CD berührten. Man kann dieselben aber auch so legen, dafs sich die Berührungspunkte auf verschiedenen Seiten der Linie CD befinden, wie z. B. bei den Linien $B'E'$, $A'F'$ der Fall ist, dann schliefsen die Räume $HE'G$, $KF'G$ den Halbschatten ein, der ebenfalls eine kegelförmige Gestalt hat, nur dafs seine Spitze in M zwischen beiden Kugeln liegt. Setzt man $DM = y$, so hat man in den beiden ähnlichen Dreiecken $CA'M$, $DF'M$ die Proportion

$$r : a - y = r' : y$$

$$y = \frac{ar'}{r + r'},$$

durch welche Formel der Abstand der Spitze des Halbschattenkegels von dem Mittelpunkte der erleuchteten Kugel bestimmt wird.

§. 154.

Nimmt man beliebig einen Punkt N auf der beiden Schattenkegeln gemeinschaftlichen Axe DG an, und errichtet auf derselben das Perpendikel NQ, so ist NP der Halbmesser des Kernschattens, NQ der Halbmesser des Halbschattens an dieser Stelle. Setzt man

$$DN = z, \quad NP = R, \quad NQ = R',$$

so hat man

$$\sin DGE = \frac{r'}{x}; \text{ tang } DGE = \frac{R}{x - z},$$

und da auch

$$\text{tang}\, DGE = \frac{\sin DGE}{\sqrt{1 - \sin DGE^2}},$$

so wird

$$\frac{R}{x - z} = \frac{r'}{\sqrt{xx - r'r'}}.$$

Substituirt man hierin statt x seinen Werth (§. 152.)

$$x = \frac{ar'}{r - r'},$$

so kommt

$$R = \frac{ar' - z(r - r')}{\sqrt{aa - (r - r')^2}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man dann auch

$$R' = \frac{ar' + z(r + r')}{\sqrt{aa - (r + r')^2}},$$

durch welche Gleichungen die Halbmesser R und R' des Kernschattens und des Halbschattens in der Entfernung z vom Mittelpunkte der erleuchteten Kugel bestimmt sind.

§. 155.

Stellt z. B. die leuchtende Kugel die Sonne, die dunkle die Erde vor, und nimmt man bei der Bestimmung der Längen, welche in vorigen Formeln vorkommen, als Maafseinheit den Halbmesser der Erde an, so hat man

$$r = 110, \quad r' = 1, \quad a = 23984,$$

und hieraus ergiebt sich

$$R = 1.000009 - 0.0045448\, z$$
$$R' = 1.000011 + 0.0046281\, z.$$

Setzt man in diesen Formeln $z = 60$, so erhält man ungefähr den Punkt, wo der Mond auf seiner Bahn um die Erde die Axe des Schattenkegels schneidet, und man hat daselbst

$$R = 0.727321, \quad R' = 1.277686,$$

während der Halbmesser des Monds selbst nur 0,273 beträgt. Da der Mond ebenfalls ein dunkler Körper

ist, der sein Licht von der Sonne erhält, so wird er bei seinem Eintritt in den Schatten, welchen die Erde hinter sich wirft, sein Licht verlieren, und eine Mondfinsterniſs entstehen.

§. 156.

Die Gröſse des Segments, welches auf der Oberfläche der dunkeln Kugel von der leuchtenden erhellt wird, läſst sich ebenfalls finden. Denn es sey S der Punkt, wo die Axe CD die dunkle Kugel trifft, so wird $ES = FS$, und da

$$SDE = 90^0 + EGD$$

und vorhin (§. 154.) $\sin EGD = \frac{r - r'}{a}$ gefunden war, so hat man hierdurch auch SDE. Ist $r - r'$ gegen a sehr klein, so ist, da in diesem Fall auch der Winkel EGD sehr klein wird,

$$EGD = \sin EGD + \tfrac{1}{6} \sin EGD^3,$$

also hieraus

$$SDE = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{r - r'}{a} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{r - r'}{a}\right)^3.$$

Um das Segment $E'S$ zu finden, hat man

$$E'DS = 90^0 - DME',$$

und da vorhin

$$\sin EMD = \frac{r + r'}{a}$$

gefunden wurde, so hat man, wenn ebenfalls $r + r'$ gegen a sehr klein ist,

$$E'DS = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{r + r'}{a} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{r + r'}{a}\right)^3.$$

Um die Gröſse des Stücks EE' zu finden, auf welches nur von einem Theil der leuchtenden Kugel Licht fallen kann, hat man

$$EDE' = EDS - E'DS$$
$$= \frac{2r}{a}\left[1 + \tfrac{1}{6}.\frac{rr + 3r'r'}{aa}\right].$$

Dies beträgt bei der Erleuchtung der Erde von der Sonne ungefähr einen halben Grad *).

§. 157.

Als zweites Beispiel wollen wir den Fall betrachten, wo der schattenwerfende Körper ein Parallelepipedum von unendlich kleiner Dicke ist, dessen breite Seite der Sonne zugekehrt wird. Seine Aufstellung sey so beschaffen, daſs es senkrecht auf der Horizontalebene steht, und zugleich die durch seine Mitte und das Centrum der Sonne gelegte Ebene einen rechten Winkel mit der vordern Seitenfläche desselben bildet. Da wir eine unendlich kleine Dicke des Parallelepipedum angenommen haben, so können wir dasselbe schlechthin als ein Parallelogramm betrachten.

Nennen wir die Ebene, welche durch die Mitte des Parallelogramms und den Mittelpunkt der Sonne gelegt ist, die Verticalebene, so ist einleuchtend, daſs die zwei Ebenen, welche wir durch die Seitenlinien des Parallelogramms legen, und die zugleich die Sonnenkugel berühren, jede auf derselben Seite der Verticalebene, auf welcher die in ihr befindliche Seitenlinie des Parallelogramms liegt, die Horizontalebene in zwei Linien schneiden, welche mit der andern Seite des Parallelogramms, die in der Horizontalebene liegt, eine gleichschenkliges Dreieck bilden. Innerhalb dieses Dreiecks wird kein Strahl von der Sonne fallen können, so daſs dasselbe die Projection des Kernschattens auf die Horizontalebene bildet, vorausgesetzt, daſs eine Ebene, welche man durch die obenliegende Seite des Parallelogramms so legt, daſs sie die Sonnenkugel auf der von der Horizontalebene abgewandten Hemisphäre berührt, die Horizontalebene nicht in einer geringen Entfernung von der untersten Seite des Parallelogramms schneidet, als die Spitze des erwähnten Dreiecks von derselben Seite hat.

*) Genauer 31′32″. G.

§. 158.

Um die Projection dieses Kernschattens ihrer Gröſse nach zu bestimmen, denken wir uns einen Cylinder, der die Sonnenkugel mit allen seinen Seitenlinien berührt, und senkrecht auf der Horizontalebene steht, so wird er diese in einem Kreise ADB (Fig. 26.) schneiden, dessen Halbmesser $CD =$ dem der Sonne ist. Die Linie EF sey die Durchschnittslinie des Parallelogramms mit der Horizontalebene, und in G halbirt, so wird CG mit EF einen rechten Winkel machen. Zieht man ferner durch E und F die Berührungslinien EA, FB, die sich verlängert in H schneiden, so wird EHF das erwähnte Dreieck seyn.

Nun bezeichne man die Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von G durch a, die Höhe desselben über dem Horizont durch α, so ist $CG = a \,.\, \cos \alpha$, und wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \varrho$ setzt, so ist $CD = a \,.\, \sin \varrho$. Man hat nun in den beiden ähnlichen Dreiecken CAH, EGH die Proportion

$$AC : AH = EG : GH,$$

oder da auch

$$AH^2 = (CG + GH)^2 - AC^2,$$

so wird hieraus

$$AC^2 : (CG + GH)^2 - AC^2 = EG^2 : GH^2,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen, wenn noch die Breite des Parallelogramms $= 2b$, also $EG = b$ gesetzt wird

$$aa \sin \varrho^2 : (a \cos \alpha + GH)^2 - aa \sin \varrho^2 = bb : GH^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir der Kürze wegen

$$aa \sin \varrho^2 - bb = kk$$

setzen, der Werth von

$$GH = \frac{ab}{kk} \,.\, [b \,.\, \cos \alpha + \sin \varrho \sqrt{aa \,.\, \cos \alpha^2 - kk}].$$

Man muſs das positive Vorzeichen bei Ausziehung der Quadratwurzel nehmen, denn, wenn man das negative anwendet, so erhält man den Abstand GH', wo die

Berührungslinie FA' auf entgegengesetzten Seiten der CH, die Kugel und das Parallelogramm trifft.

§. 159.

Jetzt müssen wir noch den Abstand des Durchschnitts der andern Ebene, die durch die obere Seite des Parallelogramms gelegt ist, mit der Horizontalebene untersuchen. Zu diesem Zweck sey AB die Durchschnittslinie der Verticalebene mit der Horizontalebene (Fig. 27.), FG der Kreis, der durch den Durchschnitt derselben Ebene mit der Sonnenkugel entsteht, CD der verticale Durchschnitt des Parallelogramms, DF eine durch D an den Kreis gelegte Berührungslinie, welche verlängert die Horizontallinie AB in B schneidet, so wird CB die gesuchte Entfernung seyn. Man hat hier $ECH = \alpha$, $EC = a$, $EF = a \,.\, \sin\varrho$, und CD bezeichne man durch h, so wie Winkel DBC durch φ. Fällt man vom Berührungspunkt F das Perpendikel FK, so wird, da, wie man leicht findet, $EFK = \varphi$ ist,

$$FK = a \,.\, \sin\varrho \,.\, \cos\varphi + a \,.\, \sin\alpha$$
$$CK = a \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \sin\varrho \,.\, \sin\varphi,$$

und wenn man LD parallel mit AB zieht,

$$FL = a \,.\, \sin\alpha + a \,.\, \sin\varrho \,.\, \cos\varphi - h$$
$$LD = a \,.\, \cos\alpha - a \,.\, \sin\varrho \,.\, \sin\varphi.$$

Nun ist aber $FDL = \varphi$, folglich

$$FL = LD \,.\, \text{tang}\,\varphi,$$

und wenn man hierin die Werthe von FL und LD substituirt, so kommt

$$(a \,.\, \sin\alpha - h)\cos\varphi + a \,.\, \sin\varrho = a \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin\varphi,$$

oder, wenn man die ganze Gleichung durch $\sin\varphi$ dividirt,

$$(a \,.\, \sin\alpha - h)\cot\varphi + a \,.\, \sin\varrho\sqrt{1 + \cot\varphi^2} = a \,.\, \cos\alpha.$$

Bemerkt man ferner, daſs

$$CB = CD \,.\, \cot CBD = h \,.\, \cot\varphi,$$

so wird auch

$$(a \,.\, \sin\alpha - h)\,CB + a \,.\, \sin\varrho\sqrt{hh + CB^2} = ah \,.\, \cos\alpha,$$

und hieraus ergiebt sich

$$CB = \frac{ah}{ff}\,[(a.\sin\alpha - h)\cos\alpha - \sin\varrho\sqrt{aa.\cos\alpha^2 + ff}],$$

wo der Kürze wegen

$$(a.\sin\alpha - h)^2 - aa.\sin\varrho^2 = ff$$

gesetzt wurde. Bei der Ausziehung der Quadratwurzel mufs man das negative Vorzeichen nehmen, indem das positive für eine an den untern Sonnenrand gelegte Berührungsebene gilt.

§. 160.

Es sey ein Stab von beliebiger Länge auf eine Horizontalebene gesteckt, und ein leuchtender Punkt bewege sich beliebig um denselben herum, man sucht die Gleichung der krummen Linie, welche der Schatten des Endpunkts während der Bewegung des leuchtenden Punktes beschreibt.

Wir nehmen den Anfangspunkt der Coordinaten im Durchschnittspunkt des Stabes mit der Horizontalebene, legen die Axen der x und y in die Horizontalebene, bezeichnen die Coordinaten des Endpunktes des Stabes durch ξ, η, ζ, die des leuchtenden Punktes für eine bestimmte Zeit t durch ξ', η', ζ', so werden die Gleichungen der graden Linie, welche durch diese beiden Punkte gelegt wird,

$$y - \eta = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi}\,(x - \xi),$$

$$z - \zeta = \frac{\zeta' - \zeta}{\xi' - \xi}\,(x - \xi),$$

wo x, y, z die allgemeinen Coordinaten der graden Linie bedeuten. Setzt man in der letzten Gleichung $z = o$, so kann man aus diesen Gleichungen die Werthe von x und y bestimmen, und diese sind nichts anders, als die Coordinaten des Punktes, in welchem die besagte grade Linie die Horizontalebene durchschneidet, d. h. die Coordinaten des Endpunktes der Projection des Schattens. Man erhält dann

$$x = \frac{\xi\zeta' - \xi'\zeta}{\zeta' - \zeta},$$

$$y = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\zeta' - \zeta}.$$

Da nun die Art der Bewegung des leuchtenden Punkts als bekannt vorausgesetzt wird, so werden die Coordinaten ξ', η', ζ' als Functionen der Zeit t betrachtet werden können. Eliminirt man dann aus diesen beiden Gleichungen die Gröſse t, so bleibt eine Gleichung zwischen x und y und den constanten Coordinaten ξ, η, ζ, welche die Natur der von dem Endpunkt des Schattens auf der Horizontalebene beschriebenen krummen Linie angeben wird.

§. 161.

Um diese allgemeine Auflösung auf einen besondern Fall anzuwenden, wollen wir annehmen, der leuchtende Punkt sey die Sonne, von deren Dimensionen wir aber hierbei abstrahiren, und wir betrachten die Sache so, als ob bloſs ihr Mittelpunkt leuchtend wäre. Was die Lage der Coordinaten betrifft, so falle die Axe der x mit der Mittagslinie zusammen. Bezeichnen wir dann die Höhe der Sonne durch H, ihr Azimuth durch A, ihren Abstand vom Anfangspunkt der Coordinaten durch r, so hat man

$$\xi' = r \,.\, \cos H \,.\, \cos A$$
$$\eta' = r \,.\, \cos H \,.\, \sin A$$
$$\zeta' = r \,.\, \sin H.$$

Nun sey (Fig. 27 b.) AZB die Himmelskugel, AB der Horizont, Z das Zenith, P der Pol, in S die Sonne zu irgend einer Zeit, so wird, wenn SZ und SP Bogen gröſster Kreise sind,

$$SZ = 90^0 - H, \quad SZP = 180^0 - A.$$

Setzen wir auſserdem

$$ZP = 90^0 - p, \quad SP = 90^0 - \delta, \quad ZPS = u,$$

wo p die Polhöhe des Aufsteckepunktes des Stabes, δ

die Declination der Sonne bedeutet, so hat man im Dreieck ZPS

$$\sin H = \sin p \,.\, \sin \delta + \cos p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$$
$$\cos H \,.\, \sin A = \cos \delta \,.\, \sin u.$$

Quadrirt man die erste Gleichung und zieht ihr Quadrat von 1 = 1 ab, so bleibt

$$\cos H^2 = 1 - \sin p^2 \,.\, \sin \delta^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2$$
$$- 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u.$$

Hiervon das Quadrat der zweiten abgezogen, kommt

$$\cos H^2 \,.\, \cos A^2 = 1 - \sin p^2 \,.\, \sin \delta^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2$$
$$- \cos \delta^2 \,.\, \sin u^2 - 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$$
$$= \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 + \sin \delta^2 \,.\, \cos p^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2$$
$$- 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$$
$$= \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 \,.\, \sin p^2 + \sin \delta^2 \,.\, \cos p^2$$
$$- 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$$
$$= (\sin \delta \,.\, \cos p - \cos \delta \,.\, \cos u \,.\, \sin p)^2,$$

also, wenn man die Wurzel auszieht,

$$\cos H \,.\, \cos A = \cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p \text{ *)}.$$

Man könnte Anfangs in Zweifel bleiben, ob die Form

$$\cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p,$$

oder die andere

$$\sin \delta \,.\, \cos p - \cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u$$

hierbei gewählt werden müſste. Allein dies läſst sich durch folgende Betrachtung leicht entscheiden. Die Gröſse $\cos H \,.\, \cos A$ ist nämlich der Abscisse ξ' pro-

*) Zu dieser Formel kann man auch auf folgendem Wege gelangen. Es ist

$$\sin \delta = \sin H \,.\, \sin p - \cos H \,.\, \cos p \,.\, \cos A,$$

also $\cos A \,.\, \cos H = \sin H \,.\, \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin \delta}{\cos p}$,

setzt man nun für $\sin H$ den Werth $\sin p \,.\, \sin \delta + \cos p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$, so ist

$$\cos A \,.\, \cos H = \frac{\sin p^2 \,.\, \sin \delta}{\cos p} + \sin p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u - \frac{\sin \delta}{\cos p}$$
$$= \sin p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p.$$

Auf diesem Wege kann über das Zeichen des Werthes von $\cos A \,.\, \cos H$ kein Zweifel herrschen. G.

portional, und diese wächst, während u abnimmt; es mufs also das Verhältnifs $\frac{d\xi'}{du}$ negativ ausfallen, welches bei der ersten, aber nicht bei der zweiten Form geschieht.

§. 162.

Die drei Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne lassen sich also auch folgendermafsen ausdrücken, wenn man statt $\cos H . \cos A$, $\cos H . \sin A$, $\sin H$ ihre Werthe substituirt

$$\xi' = r . (\cos \delta . \sin p . \cos u - \sin \delta . \cos p)$$
$$\eta' = r . \cos \delta . \sin u$$
$$\zeta' = r . (\sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta . \cos u),$$

und wenn man diese Gröfsen in die Gleichungen (§. 160.)

$$x = \frac{\xi\zeta' - \xi'\zeta}{\zeta' - \zeta}$$
$$y = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\zeta' - \zeta}$$

setzt, so braucht man aus ihnen nur den Winkel u zu eliminiren, um die Gleichung der Curve zu haben. Wegen der grofsen Entfernung der Sonne gegen die Länge des Stabes, dürfen wir uns aber einer Abkürzung bedienen, indem wir statt $\zeta' - \zeta$ im Nenner blofs ζ' setzen. Dann hat man

$$x\zeta' = \xi\zeta' - \xi'\zeta$$
$$y\zeta' = \eta\zeta' - \eta'\zeta,$$

und aus der ersten Gleichung folgt

$$\cos u = - \frac{(x - \xi) \sin p . \sin \delta - \zeta \sin \delta . \cos p}{\zeta \cos \delta . \sin p + (x - \xi) \cos p . \cos \delta}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung

$$\zeta' = r . (\sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta . \cos u),$$

so erhält man den Ausdruck

$$\zeta' = r\zeta . \frac{\cos \delta . \sin \delta}{\zeta \cos \delta . \sin p + (x - \xi) \cos p . \cos \delta},$$

und hierdurch ergiebt sich vermittelst der Gleichung

$$y\zeta' = \eta\zeta' - \eta'\zeta$$

$$\eta' = r.(\eta - y).\frac{\sin\delta.\cos\delta}{\zeta\cos\delta.\sin p + (x - \xi)\cos p.\cos\delta},$$

und da $\eta' = r.\cos\delta.\sin u$ ist, so wird

$$\sin u = \frac{(\eta - y).\sin\delta}{\zeta\cos\delta.\sin p + (x - \xi)\cos p.\cos\delta}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so wie die für $\cos u$, und addirt dann die Quadrate, so kommt

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$= (\eta - y)^2.\sin\delta^2 + (\xi - x)^2.(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2\zeta(x - \xi)\sin p.\cos p.$$

Diese Gleichung ist für x und y vom zweiten Grade, folglich gilt sie für einen Kegelschnitt. Der Kürze wegen wollen wir annehmen, daſs der Stab in der Mittagsebene aufgesteckt, also $\eta = o$ sey. Dann läſst sich die Gleichung so schreiben:

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$+ \xi^2(\cos\delta^2.\cos p^2 - \sin p^2.\sin\delta^2) - 2\zeta\xi\sin p.\cos p$$
$$= x^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2x(\zeta\cos p.\sin p + \xi\sin p^2.\sin\delta^2 - \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ y^2.\sin\delta^2.$$

Man nehme nun $x = v + m$, so daſs v die neue Abscisse, und m eine Constante bedeutet, die aus den andern in der Gleichung vorkommenden Gröſsen zu bestimmen ist. Durch Substitution dieses Werthes wird

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$+ \xi^2(\cos\delta^2.\cos p^2 - \sin\delta^2.\sin p^2) - 2\zeta\xi\sin p.\cos p$$
$$= v^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ m^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ 2v(m.\sin p^2.\sin\delta^2 - m.\cos p^2.\cos\delta^2$$
$$- \zeta\cos p.\sin p - \xi\sin p^2.\sin\delta^2 + \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2m(\zeta\cos p.\sin p + \xi\sin p^2.\sin\delta^2 - \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ y^2.\sin\delta^2.$$

Hieraus bestimmen wir m so, daſs alle von v und y unabhängige Glieder aus der Gleichung heraus fallen, d. h. es wird

$$m^2 - 2m\left(\frac{\zeta\cos p\,.\sin p}{\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2\,.\cos\delta^2} + \xi\right)$$
$$= \frac{\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2) - 2\zeta\xi\,.\sin p\,.\cos p}{\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2\,.\cos\delta^2} - \xi\xi.$$

Hieraus folgt

$$m - \frac{\zeta\cos p\,.\sin p}{\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2\,.\cos\delta^2} - \xi =$$
$$\zeta\sqrt{\frac{\cos p^2\,.\sin p^2}{(\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2\,.\cos\delta^2)^2} + \frac{\cos\delta^2\,.\sin p^2 - \sin\delta^2\,.\cos p^2}{\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2\,.\cos\delta^2}}.$$

Der Zähler des Bruchs unter dem Wurzelzeichen läſst sich auch so schreiben:

$$\cos\delta^2.\sin\delta^2(\cos p^4 + 2\cos p^2.\sin p^2 + \sin p^4)$$
$$= \cos\delta^2.\sin\delta^2,$$

folglich erhält man

$$m - \frac{\zeta\cos p\,.\sin p}{\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos\delta^2\,.\cos p^2} - \xi = \pm\frac{\zeta\cos\delta\,.\sin\delta}{\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos\delta^2.\cos p^2}.$$

Die überbleibende Gleichung zwischen v und y ist nun:

$$vv\;(\sin p^2\,.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2) + yy\,.\sin\delta^2$$
$$= -2v(m.\sin p^2.\sin\delta^2 - m.\cos p^2.\cos\delta^2 - \zeta.\cos p\,.\sin p$$
$$- \xi\,.\sin p^2.\sin\delta^2 + \xi.\cos p^2.\cos\delta^2),$$

und wenn man hierin den so eben gefundenen Werth von m substituirt,

$$vv\;(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2) + yy\,.\sin\delta^2$$
$$= 2v\,.\zeta.\cos\delta.\sin\delta,$$

indem wir uns des negativen Vorzeichens bedienen. Dividirt man noch durch $\sin\delta^2$, so wird

$$yy = 2v\,.\zeta\,.\cot\delta - vv\left(1 - \frac{\cos p^2}{\sin\delta^2}\right),$$

also wird die Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\cos p$ kleiner, gleich oder gröſser als $\sin\delta$ ist.

§. 163.

Um die allgemeinen Formeln zu erhalten, welche die Gleichung der Oberfläche des hinter dunkeln Körpern gebildeten lichtleeren Raums, so wie die Gleichung der Erleuchtungsgrenze angeben, wollen wir zuerst den Fall betrachten, wo die Erleuchtung aus einem einzigen

Punkt ausgeht. Wird die Gleichung des dunkeln Körpers durch eine bestimmte Relation zwischen x, y, z ausgedrückt, und bezeichnet man die Coordinaten eines Punktes der an diesen Körper gelegten Berührungsebene durch X, X, Z, so ist die Gleichung der Berührungsebene

$$(Z - z) = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

wo die Gröſsen p und q die partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ angeben. Sind ferner die Coordinaten des leuchtenden Punktes ξ, η, ζ, so muſs die Berührungsebene, welche an irgend einen Punkt der Erleuchtungsgrenze des dunkeln Körpers gelegt wird, durch den leuchtenden Punkt gehen, d. h. für dieselbe muſs die Gleichung

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y)$$

Statt finden. Verbindet man mit dieser Gleichung die Gleichung der Oberfläche des Körpers, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche die Natur der Curve, die die Erleuchtungsgrenze bildet, angeben.

Bezeichnet man die allgemeinen Coordinaten einer graden Linie, die durch die zwei Punkte geht, deren Coordinaten resp. ξ, η, ζ; x, y, z sind, durch X, Y, Z, so werden die beiden Gleichungen, welche eine solche grade Linie darstellen,

$$Y - \eta = \frac{\eta - y}{\xi - x}\,(X - \xi),$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta - z}{\xi - x}\,(X - \xi),$$

und wenn alle Punkte, durch welche nach und nach diese grade Linie geht, auf der Erleuchtungsgrenze liegen sollen, so hat man zwei Gleiehungen für dieselben, zwischen x, y, z, und verbindet man diese mit den so eben angegebenen Gleichungen der graden Linie, so lassen sich aus diesen vier Gleichungen die Gröſsen x, y, z eliminiren, und man erhält die Glei-

chung der Oberfläche des Schattenkegels zwischen den Coordinaten X, Y, Z.

§. 164.

Gesetzt z. B., der dunkle Körper sey ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenes Sphäroid, dessen Gleichung wir durch

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$$

darstellen, wo a die halbe grofse und b die halbe kleine Axe bedeutet. Man hat durch Differentiation dieser Gleichung

$$aazdz + bb\,(xdx + ydy) = o,$$

folglich hieraus

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = -\frac{bb}{aa} \cdot \frac{x}{z},$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = q = -\frac{bb}{aa} \cdot \frac{y}{z}.$$

Es sind also die beiden Gleichungen für die Erleuchtungsgrenze

$$1)\ (\zeta - z) + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{x}{z}\,(\xi - x) + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{y}{z}\,(\eta - y) = o,$$

$$2)\ aazz + bb\,(xx + yy) = aabb,$$

Schreibt man die zweite Gleichung so:

$$z + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{xx}{z} + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{yy}{z} = \frac{bb}{z},$$

und addirt sie zur ersten, so bleibt

$$\zeta + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{x}{z} \cdot \xi + \frac{bb}{aa} \cdot \frac{y}{z} \cdot \eta = \frac{bb}{z},$$

oder auch

$$aa\zeta z + bb\xi x + bb\eta y = aabb,$$

und hieraus folgt, dafs die Erleuchtungsgrenze eine in einer Ebene liegende Curve bildet. Eliminirt man aus diesen beiden und den vorigen Gleichungen (§. 163.)

$$3)\ Y - \eta = \frac{\eta - y}{\xi - x}\,(X - \xi)$$

$$4)\ Z - \zeta = \frac{\zeta - z}{\xi - x}\,(X - \xi)$$

die Gröfsen x, y, z, so erhält man die Gleichung der Oberfläche des Schattenkegels zwischen den Coordinaten X, Y, Z.

§. 165.

Der zweite Fall ist der, wo die Erleuchtung von einem wirklich ausgedehnten Körper herkommt. Wir bezeichnen die Coordinaten der Oberfläche des leuchtenden Körpers durch ξ, η, ζ, die des erleuchteten wie früher durch x, y, z. Legt man eine Ebene so, dafs sie beide Körper berührt, so wird diese Ebene ebenfalls die Oberfläche des Schattenkegels berühren. Setzt man

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q, \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right) = p', \quad \left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right) = q',$$

so wird die Gleichung einer Berührungsebene an den erleuchteten Körper

$$(Z - z) = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

und die Gleichung einer Berührungsebene an den leuchtenden Körper

$$(Z - \zeta) = p'\,(X - \xi) + q'\,(Y - \eta).$$

Sollen beide Ebenen zusammenfallen, so müssen ihre Gleichungen identisch seyn, und hierzu ist nöthig, dafs

$$z - px - qy = \zeta - p'\xi - q'\eta,$$

$$p = p', \quad q = q',$$

werde. Statt der ersten Gleichung kann man also diese setzen

$$z - \zeta = p\,(x - \xi) + q\,(y - \eta).$$

Man bezeichne ferner die Gleichung der Oberfläche des leuchtenden Körpers durch $\zeta = \varphi\,(\xi, \eta)$, die des erleuchteten durch $z = \psi\,(x, y)$, so hat man zwischen den sechs Gröfsen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ fünf Gleichungen

1) $p = p'$, 2) $q = q'$

3) $\zeta = \varphi\,(\xi, \eta)$, 4) $z = \psi\,(x, y)$

5) $z - \zeta = p\,(x - \xi) + q\,(y - \eta)$.

Eliminirt man aus denselben ξ, η, ζ, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y, z, welche die Gleichungen der Erleuchtungsgrenze auf dem dunkeln Körper

geben. Eliminirt man dagegen x, y, z, so geben die beiden übrigen Gleichungen zwischen ξ, η, ζ die Grenze desjenigen Theils des hellen Körpers, von welchem Strahlen auf den dunkeln fallen.

Verbindet man mit vorigen fünf Gleichungen noch die beiden einer graden Linie, die durch die beiden Punkte geht, deren Coordinaten resp. x, y, z; ξ, η, ζ sind, nämlich:

$$Y - \eta = \frac{\eta - y}{\xi - x}(X - \xi),$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta - z}{\xi - x}(X - \xi),$$

so hat man sieben Gleichungen, aus denen sich x, y, z, ξ, η, ζ eliminiren lassen, und es bleibt eine Gleichung zwischen X, Y, Z, welche die Gleichung der Oberfläche des Schattenkegels ist.

§. 166.

Als ein hierher gehöriges Beispiel wollen wir für den dunkeln Körper ein elliptisches Sphäroid annehmen, dessen Gleichung, wie im §. 164., durch

$$aazz + bb(xx + yy) = aabb$$

ausgedrückt wird. Der leuchtende Körper sey eine Kugel vom Halbmesser r, und die Coordinaten ihres Mittelpunkts α, o, γ, so ist deren Gleichung

$$(\zeta - \gamma)^2 + \eta\eta + (\xi - \alpha)^2 = rr.$$

Die Differentiale dieser Gleichungen sind:

$$aazdz + bb(xdx + ydy) = o$$

$$(\zeta - \gamma)\,d\zeta + \eta d\eta + (\xi - \alpha)\,d\xi = o,$$

und hieraus erhält man

$$p = -\frac{bbx}{aaz},\quad q = -\frac{bby}{aaz},$$

$$p' = -\frac{(\xi - \alpha)}{\zeta - \gamma},\quad q' = -\frac{\eta}{\zeta - \gamma}.$$

Es werden daher die drei Gleichungen des vorigen Paragraphen

$$aaz\,(\xi - \alpha) = bbx\,(\zeta - \gamma)$$
$$bby\,(\zeta - \gamma) = aaz\eta$$
$$(z - \zeta) + \frac{bbx}{aaz}(x - \xi) + \frac{bby}{aaz}(y - \eta) = o.$$

Die letzte läſst sich mit Zuziehung der Gleichung

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$$

auch so schreiben:

$$aabb = aaz\zeta + bby\eta + bbx\xi.$$

Man erhält aus diesen drei Gleichungen

$$\xi - \alpha = \frac{bbx}{aaz}(\zeta - \gamma)$$
$$\eta = \frac{bby}{aaz}(\zeta - \gamma)$$
$$\zeta - \gamma = \frac{aabb - bbx\alpha - aaz\gamma}{b^4 + (aa - bb)\,zz} \cdot z.$$

Substituirt man die beiden ersten Werthe in die Gleichung

$$(\zeta - \gamma)^2 + \eta\eta + (\xi - \alpha)^2 = rr,$$

so kommt

$$(\zeta - \gamma)^2 \left[1 + \frac{b^4y^2}{a^4zz} + \frac{b^4x^2}{a^4zz}\right] = rr$$

oder auch, da

$$b^4\,(x^2 + y^2) = aabb\,(bb - zz),$$
$$(\zeta - \gamma)^2\,[b^4 + (aa - bb)\,zz] = rra^2z^2.$$

Setzt man hierin obigen Werth von $(\zeta - \gamma)$, so wird

$$(aabb - bbx\alpha - aaz\gamma)^2 = rraa\,[b^4 + (aa - bb)\,zz]$$

die eine Gleichung der Erleuchtungsgrenze des dunkeln Körpers und

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$$

wird die andere Gleichung darstellen. Diese Gleichungen finden z. B. Statt bei der Erleuchtung der Planeten durch die Sonne.

§. 167.

Da die Gestalt der Planeten wenig von der Kugelform abweicht, so lassen sich vorige Gleichungen noch etwas vereinfachen. Bezeichnet man die geocentrische Breite eines Ortes durch ψ, seine geographische Länge, von

dem Ort aus gezählt, wo die Sonne culminirt, durch φ, seinen Abstand vom Mittelpunkt der Erde durch ϱ, so hat man

$$x = \varrho \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$y = \varrho \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$z = \varrho \,.\, \sin\psi,$$

und die Gleichung $aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$ verwandelt sich in diese:

$$aa\varrho\varrho \,.\, \sin\psi^2 + bb\varrho\varrho \,.\, \cos\psi^2 = aabb.$$

Man setze nun $bb = aa\,(1 - ee)$, so kommt

$$\varrho\varrho \,.\, \sin\psi^2 + \varrho\varrho\,(1 - ee)\cos\psi^2 = aa\,(1 - ee),$$

und da ee ein kleiner Bruch ist, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so erhält man hieraus

$$\varrho = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2).$$

Zieht man ferner in der Gleichung

$$(aabb - bbx\alpha - aaz\gamma)^2 = rraa\,[b^4 + (aa - bb)\,zz]$$

auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so kommt, mit Beibehaltung des doppelten Vorzeichens,

$$aabb - bbx\alpha - aaz\gamma = \pm ra\sqrt{(b^4 + (aa - bb)\,zz)},$$

oder, wenn $aa\,(1 - ee)$ statt bb gesetzt wird,

$$aa(1-ee) - (1-ee)\,\alpha x - z\gamma = \pm r\sqrt{(aa(1-2ee) + eezz)}$$
$$= \pm ra\left(1 - ee + \tfrac{1}{2}ee \,.\, \frac{zz}{aa}\right).$$

Man hat nun aus dem Vorigen

$$x = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2) \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\varphi$$
$$z = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2) \,.\, \sin\psi,$$

folglich läſst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$a\,(1 - ee) - \alpha \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\varphi\,(1 - ee - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2)$$
$$- \gamma \,.\, \sin\psi\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2)$$
$$= \pm r\,(1 - ee + \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2).$$

Setzt man die Entfernung der Erde von der Sonne $= R$, ihre Declination $= \delta$, so ist

$$\alpha = R \,.\, \cos\delta, \quad \gamma = R \,.\, \sin\delta,$$

und da die Halbmesser der Erde und der Sonne a und r gegen die Entfernung R nur sehr klein sind, so kann man auch bei den in a und r multiplicirten Gliedern die Gröſse ee weglassen; dann erhält man

$$a - R \, . \cos \delta \, . \cos \psi \, . \cos \varphi \, (1 - ee - \tfrac{1}{2} ee \, . \sin \psi^2)$$
$$- R \, . \sin \delta \, . \sin \psi \, (1 - \tfrac{1}{2} ee \, . \sin \psi^2) = \pm r.$$

In der mathematischen Geographie wird ferner gezeigt, dafs, wenn θ die geographische Breite eines Ortes bedeutet, zwischen θ und ψ die Gleichung

$$a \, . \operatorname{tang} \psi = b \, . \operatorname{tang} \theta$$

Statt findet. Hieraus erhält man leicht, wenn die höhern Potenzen von ee vernachlässigt werden, die Werthe von

$$\cos \psi = \cos \theta \, (1 + \tfrac{1}{2} ee \, . \sin \theta^2)$$
$$\sin \psi = \sin \theta \, (1 - \tfrac{1}{2} ee \, . \cos \theta^2),$$

und wenn man diese in vorige Gleichung substituirt, so wird

$$a - R . \cos \delta . \cos \varphi . \cos \theta (1 - ee) - R . \sin \delta . \sin \theta (1 - \tfrac{1}{2} ee) = \pm r.$$

Hieraus folgt nun

$$\cos \varphi = \frac{a \pm r}{R \, . \cos \delta \, . \cos \theta} - \operatorname{tang} \delta \, . \operatorname{tang} \theta \, (1 + \tfrac{1}{2} ee).$$

Aus dieser Gleichung läfst sich bestimmen, durch welche Länge bei gegebener Breite die Erleuchtungsgrenze gehe. Das doppelte Vorzeichen erklärt sich leicht aus den Betrachtungen, die wir (§. 156.) angestellt haben.

Von der Erleuchtung.

§. 168.

Es ist schon oben aus der Erfahrung dargethan worden, dafs das Licht von einem leuchtenden Punkt aus nach allen Seiten in graden Linien sich verbreite. Wir mögen nun die Art dieser Verbreitung erklären, wie wir wollen, so müssen wir doch das Licht als eine Materie betrachten, die verschiedene Dichtigkeiten anzunehmen im Stande ist, so dafs in einem und demselben Raum eine gröfsere oder kleinere Menge Lichttheilchen enthalten seyn können. Denkt man sich um den leuchtenden Punkt mehrere concentrische Kugeln beschrieben,

deren Mittelpunkt der leuchtende Punkt ausmacht, so versteht es sich von selbst, daſs auf jede der innern Oberflächen dieser Kugeln vom leuchtenden Punkt gleichviel Licht fallen muſs, also auf den kleinern Kugeln die Dichtigkeit des Lichts stärker seyn wird, als auf den gröſsern. Das Volumen des Lichts, welches auf jeder dieser Kugelflächen befindlich ist, wird nun dieser Oberfläche selbst proportional seyn; bezeichnet man also die Lichtvolumina, die auf die Kugelflächen fallen, deren Halbmesser r und r' sind, durch v und v', so hat man die Proportion

$$v : v' = rr : r'r',$$

da sich bekanntlich die Oberflächen zweier Kugeln wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten. Bezeichnet man ferner die Dichtigkeit der auf beide Oberflächen gefallenen Lichtvolumina durch ϱ und ϱ', so hat man die Lichtmasse, welche sich auf der Kugeloberfläche vom Halbmasser r befindet $= \varrho v$, und diejenige, welche auf der Kugeloberfläche, deren Halbmesser r' ist, sich befindet $= \varrho' v'$. Da nun aber beide Lichtmengen gleich seyn müssen, so hat man $\varrho v = \varrho' v'$, also auch $v : v' = \varrho' : \varrho$, und da

$$v : v' = rr : r'r'$$

vorhin gefunden war, so erhält man aus der Verbindung beider Proportionen

$$\varrho : \varrho' = \frac{1}{rr} : \frac{1}{r'r'},$$

d. h. die Dichtigkeiten des von einem strahlenden Punkt ausströmenden Lichts verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen der Lichttheilchen vom strahlenden Punkt.

Es ist übrigens klar, daſs auf einer und derselben Kugeloberfläche, in allen Punkten eine gleichförmige Dichtigkeit des Lichts herrschen muſs, da man den leuchtenden Punkt selbst von einer solchen Beschaffenheit annimmt, daſs er nach allen Seiten hin gleichviel Licht sendet.

§. 169.

Wenn man annimmt, dafs die ganze innere Oberfläche einer Kugel gleichförmig erleuchtet ist, so mufs auf gleich grofse Stücken der Kugeloberfläche gleich viel Licht fallen, und hieraus folgt, dafs die Lichtmenge, welche auf ein bestimmtes Stück dieser Fläche fällt, der Fläche selbst proportional seyn mufs. Bezeichnet man die auf eine Kugeloberfläche, die mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben ist, fallende Lichtmenge durch 1, und die daselbst Statt findende Dichtigkeit des Lichts ebenfalls durch 1, so kann man leicht die Lichtmenge finden, die auf irgend ein anderes um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebenes Kugelstück fällt. Es sey das Verhältnifs des Kugelstücks zur ganzen Kugeloberfläche wie $s : 1$, so wird die Lichtmenge, die auf dasselbe fällt, ebenfalls durch s ausgedrückt werden, und die Dichtigkeit des auf ihm befindlichen Lichtes durch $\frac{1}{rr}$, wie im vorigen Paragraph erwiesen ist.

§. 170.

Da wir bisher immer eine Kugeloberfläche annahmen, deren Mittelpunkt im leuchtenden Punkt befindlich war, auf welche das aus demselben ausfliefsende Licht auffallen sollte, so war die Richtung des Lichtstrahles immer senkrecht gegen die auffangende Fläche, und die angegebenen Regeln, welche die Vertheilung des Lichts befolgen soll, werden daher nur für senkrecht auffallendes Licht gelten.

Man kann aber auf folgende Weise leicht finden, wie sich die Erleuchtung bei schief auffallendem Lichte verhält. Es sey L ein leuchtender Punkt (Fig. 28.), der auf ein unendlich kleines Stück AB einer mit dem Halbmesser LB beschriebenen Kugeloberfläche Licht sendet, so wird die auffallende Lichtmenge der Fläche AB direct, und dem Quadrat von LB umgekehrt pro-

portional seyn, also $\frac{AB \cdot l}{LB^2}$, indem durch l eine constante Gröſse ausgedrückt wird, welche die Proportionalität anzeigt, und für leuchtende Punkte von gleicher Intensität des Lichts, auch dieselbe Gröſse haben wird.

§. 171.

Ferner sey CB eine andere, unendlich kleine, ebene Fläche, die mit der vorigen, welche ebenfalls bei ihrer unendlich kleinen Ausdehnung als eben angenommen werden kann, einen bestimmten Winkel ABC macht. Obgleich nun nicht alle Punkte der Fläche CB, genau genommen, gleich weit von L entfernt liegen, so ist der gröſste Unterschied der Entfernungen $LC - LB$ doch immer nur unendlich klein, so daſs wir annehmen können, das auf CB auffallende Licht sey ebenfalls gleichförmig verbreitet. Nun werde die Dichtigkeit des Lichts auf AB durch ϱ, die auf CB durch ϱ' bezeichnet, so hat man die Lichtmassen, die auf beiden Flächen befindlich sind,

$$AB \cdot \varrho;\quad CB \cdot \varrho'.$$

Da aber auf die Fläche CB dieselbe Lichtmenge fällt, als auf AB, so muſs zugleich

$$AB \cdot \varrho = CB \cdot \varrho'$$

seyn, oder, wenn man die Gleichung in eine Proportion verwandelt,

$$\varrho : \varrho' = CB : AB,$$

folglich verhalten sich die Dichtigkeiten umgekehrt, wie die Flächen. Wegen der unendlich kleinen Ausdehnung der Flächen AB und CB gegen die Entfernung BL, kann man annehmen, AC sey senkrecht auf AB, so daſs also

$$AB = CB \cdot \sin ACB,$$

folglich wird auch

$$\varrho : \varrho' = 1 : \sin ACB.$$

Nun ist aber ACB der Winkel, den der einfallende Strahl LC mit der Fläche CB macht, folglich verhalten sich die Dichtigkeiten des Lichts auf zwei unendlich

kleinen Flächen, welche gleiche Entfernung vom leuchtenden Punkt besitzen, aber unter verschiedenen Winkeln gegen den einfallenden Strahl geneigt sind, wie die Sinus dieser Winkel.

§. 172.

Bezeichnet man also die Entfernung des beleuchteten Elements vom leuchtenden Punkt durch r, seine Neigung gegen den einfallenden Strahl durch ε, die Fläche des Elements durch s, und durch l eine constante Gröfse, die von der Intensität des Lichts des leuchtenden Punkts abhängt, so hat man die Lichtmasse, welche dieses Element empfängt,

$$= \frac{l \,.\, s}{rr} \,.\, \sin \varepsilon.$$

Ist die beleuchtete Fläche von endlicher Ausdehnung, sie mag nun eben oder krumm seyn, so giebt diese Formel ebenfalls die Lichtmenge, welche auf die ganze Fläche fällt, indem man die Summe dieses Ausdrucks für alle Elemente sucht, aus denen die Fläche besteht, welches bekanntlich durch die Integration dieser Formel zwischen den Grenzen, welche die Natur der erleuchteten Fläche erfordert, zu Stande gebracht wird, und über das dabei anzuwendende Verfahren sollen nachher einige Beispiele ausgeführt werden.

§. 173.

Die Dichtigkeit des Lichts auf jedem dieser Elemente findet sich, indem die Lichtmenge durch die Gröfse des Elements dividirt wird, und hierdurch erhält man dieselbe

$$\varrho = \frac{l \,.\, \sin \varepsilon}{rr}.$$

Sie ist also bei einer ausgedehnten Fläche aus zwei Gründen veränderlich, erstens, weil jedes Element einen andern Abstand r vom leuchtenden Punkt hat, und zweitens, weil der einfallende Strahl mit jedem Element einen andern Einfallswinkel bildet. Man kann daher

nicht nach der Dichtigkeit des Lichts auf einer ausgedehnten Fläche im Allgemeinen fragen (wenn diese nicht etwa eine um den leuchtenden Punkt als Centrum beschriebene Kugeloberfläche ist), sondern man mufs die Lage des Elements erst bestimmen, und dann bezieht sich die gefundene Dichtigkeit auf dieses Element allein, oder auf alle gleichliegende. Ist z. B. die erleuchtete Fläche eine Kugel, und zieht man vom erleuchteten Punkte, der aufserhalb der Kugel liegt, nach dem Mittelpunkt der Kugel eine Linie, welche die Oberfläche der Kugel schneidet, so erhalten alle Elemente, die von diesem Durchschnittspunkt gleich weit abstehen, gleich viel Licht, und das auf sie fallende Licht hat auch gleiche Dichtigkeit, indem sehr einfach zu beweisen ist, dafs alle so bestimmte Elemente der Kugeloberfläche sowohl gleich weit vom leuchtenden Punkt entfernt sind, als auch gleiche Winkel mit dem einfallenden Lichtstrahl bilden.

§. 174.

Man kann aber sehr wohl eine mittlere Dichtigkeit des Lichts bestimmen; denn nimmt man an, ϱ^0 sey die Dichtigkeit, welche das Licht erhalten würde, wenn dieselbe Lichtmenge gleichförmig auf der ganzen Fläche vertheilt wäre, so würde, wenn die Gröfse der ganzen Fläche, auf welche das Licht fällt, durch S bezeichnet wird, die Gleichung

$$\varrho^0 . S = \int \frac{l . s . \sin e}{rr}$$

Statt finden. Man erhält also die mittlere Dichtigkeit, indem man die ganze Lichtmasse, die sich auf der gegebenen Oberfläche befindet, durch die Ausdehnung der Oberfläche selbst dividirt.

§. 175.

Wenn die Erleuchtung blofs von einem leuchtenden Punkt ausgeht, kann man denselben als den Anfangspunkt der Coordinaten betrachten. Ist nun die

Gleichung der erleuchteten Oberfläche in Polarcoordinaten gegeben, die wir durch r, φ, ψ bezeichnen, wo φ den Winkel bedeutet, welchen die Projection des Radius vector auf die Ebene x, y mit der Axe der x macht, und ψ den Winkel, welchen der Radius vector und seine Projection einschliefsen, so ist das Element der Oberfläche

$$s = \frac{rr \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

wo θ den Winkel bezeichnet, den der nach einem Punkt der Oberfläche gezogene Radius vector mit der Normale, welche an demselben Punkte errichtet wird, bildet. Dieser Winkel ist aber auch das Complement desjenigen, welchen der Radius oder der Lichtstrahl mit der Berührungsebene an dem Punkte, oder dem Element macht, d. h. er ist das Complement des Einfallswinkels. Man hat also

$$\theta = 90^0 - \varepsilon, \quad \cos\theta = \sin\varepsilon,$$

folglich, wenn man diesen Ausdruck in die vorige Formel substituirt, und die Lichtmenge durch L bezeichnet, so kommt

$$L = l \int d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

wo der Factor l als eine constante Gröfse vor das Integralzeichen gesetzt werden kann. Die mittlere Dichtigkeit ist also

$$\varrho^0 = \frac{L}{S},$$

wo S den Flächenraum bedeutet, auf welchen das Licht fällt.

§. 176.

Will man aber die Dichtigkeit des Lichts an einer bestimmten Stelle der Fläche haben, so ist die Kenntnifs des Winkels ε unumgänglich nöthig, da diese Dichtigkeit durch

$$\varrho = \frac{l \,.\, \sin\varepsilon}{rr}$$

ausgedrückt wird. Es seyen die Coordinaten des erleuchteten Elements x, y, z, so werden die Gleichungen

des aus dem Anfangspunkt der Coordinaten ausgehenden Lichtstrahls durch

$$Y = \frac{y}{x} . X, \quad Z = \frac{z}{x} . X$$

ausgedrückt, und die Gleichungen der auf demselben Element errichteten Normale sind

$$p\,(Z - z) + (X - x) = o$$
$$q\,(Z - z) + (Y - y) = o,$$

wo p und q die partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ bedeuten. Aus diesen Gleichungen findet sich der Winkel, den beide Linien mit einander bilden, auf die bekannte Art

$$\cos\theta = \frac{px + qy - z}{r\sqrt{1 + pp + qq}}.$$

§. 177.

Man kann nun diese Formel unter dieser Gestalt gebrauchen, und in jedem besondern Fall die partiellen Differentialcoefficienten p, q durch x, y, z, sobald die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, ausdrücken, und dann erst, um Polarcoordinaten zu erhalten, die Werthe

$$x = r . \cos\varphi . \cos\psi$$
$$y = r . \sin\varphi . \cos\psi$$
$$z = r . \sin\psi$$

einführen. Allein voriger Ausdruck läſst sich auch allgemein auf Polarcoordinaten reduciren, so daſs bloſs zwischen diesen die Gleichung der Oberfläche bekannt zu seyn braucht. Die Reduction kann folgendermaſsen ausgeführt werden. Gesetzt, die Gleichung der Oberfläche sey zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben, und sie werde durch $V = o$ bezeichnet, so ist

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = o.$$

Hieraus ergiebt sich

$$dz = -\frac{\left(\frac{dV}{dx}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)}.dx - \frac{\left(\frac{dV}{dy}\right)}{\left(\frac{dV}{dz}\right)} dy,$$

und da dieselbe Differentialgleichung nach unserer Bezeichnung auch die Form

$$dz = pdx + qdy$$

hat, so kommt durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$p.\left(\frac{dV}{dz}\right) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)$$

$$q.\left(\frac{dV}{dz}\right) = -\left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Multiplicirt man also den Zähler und Nenner des Bruches, der $\cos\theta$ ausdrückt, durch $\left(\frac{dV}{dz}\right)$, und substituirt die hier gegebenen Werthe von

$$p.\left(\frac{dV}{dz}\right),\quad q.\left(\frac{dV}{dz}\right),$$

so erhält man

$$\cos\theta = -\frac{x.\left(\frac{dV}{dx}\right) + y.\left(\frac{dV}{dy}\right) + z.\left(\frac{dV}{dz}\right)}{r.\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}}.$$

§. 178.

In so fern nun V als Function der Gröſsen r, φ, ψ betrachtet wird, hat man auch

$$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right) dr + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right) d\psi,$$

und aus den im vorigen §. angegebenen Relationen

$$x = r.\cos\varphi.\cos\psi,$$

$$y = r.\sin\varphi.\cos\psi,$$

$$z = r.\sin\psi,$$

erhält man die Gleichungen

$$rr = xx + yy + zz$$

$$\tang\varphi = \frac{y}{x},\quad \tang\psi = \frac{z}{\sqrt{xx+yy}},$$

also, indem man differentiirt, kommt

$$dr = \frac{x}{r} \cdot dx + \frac{y}{r} \cdot dy + \frac{z}{r} \cdot dz$$

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi^2}{x} \cdot dy - \frac{y \cdot \cos\varphi^2}{xx} \cdot dx$$

$$d\psi = \frac{\cos\psi^2}{\sqrt{xx+yy}} \cdot dz - z \cdot \frac{xdx+ydy}{\sqrt{(xx+yy)^3}} \cdot \cos\psi^2.$$

Substituirt man diese Werthe von dr, $d\varphi$, $d\psi$ in vorige Gleichung, die das vollständige Differential dV ausdrückt, so kommt

$$\begin{aligned} dV = & \left[\left(\frac{dV}{dr}\right) . \cos\varphi . \cos\psi - \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{r . \cos\psi} \right. \\ & \left. - \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi . \sin\psi}{r}\right] dx. \\ & + \left[\left(\frac{dV}{dr}\right) . \sin\varphi . \cos\psi + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi}{r . \cos\psi} \right. \\ & \left. - \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi . \sin\psi}{r}\right] dy. \\ & + \left[\left(\frac{dV}{dr}\right) . \sin\psi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\psi}{r}\right] dz. \end{aligned}$$

§. 179.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vollständigen Differential von V, indem V als Function von x, y, z betrachtet wird, so erhält man, da

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz,$$

indem man die Coefficienten von dx, dy, dz in beiden Ausdrücken einander gleich setzt,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right) . \cos\varphi . \cos\psi & - \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{r . \cos\psi} \\ & - \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi . \sin\psi}{r} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right).\sin\varphi.\cos\psi + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right).\frac{\cos\varphi}{r.\cos\psi}$$
$$- \left(\frac{dV}{d\psi}\right).\frac{\sin\varphi.\sin\psi}{r}$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right).\sin\psi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right).\frac{\cos\psi}{r}.$$

Vermittelst dieser Ausdrücke ergiebt sich nun

$$x.\left(\frac{dV}{dx}\right) + y.\left(\frac{dV}{dy}\right) + z.\left(\frac{dV}{dz}\right)$$
$$= r.\left(\frac{dV}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2$$
$$= \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2.\frac{1}{rr.\cos\psi^2} + \left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2.\frac{1}{rr},$$

und wenn man diese Werthe in den Ausdruck von $\cos\theta$ des §. 177. substituirt, so erhält man

$$\cos\theta = \frac{r.\left(\frac{dV}{dr}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dr}\right)^2.rr + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2.\frac{1}{\cos\psi^2}\right]}}.$$

§. 180.

Betrachtet man ferner r als Function von φ und ψ, so ist

$$dr = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right).d\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right).d\psi,$$

und da die Gleichung der Oberfläche $V = o$ ist, so hat man ebenfalls $dV = o$, oder

$$\left(\frac{dV}{dr}\right).dr + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right).d\varphi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right).d\psi = o.$$

Hieraus ergiebt sich

$$dr = -\frac{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dV}{dr}\right)}.d\varphi - \frac{\left(\frac{dV}{d\psi}\right)}{\left(\frac{dV}{dr}\right)}.d\psi.$$

Man hat also durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von dr die Gleichungen

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{dV}{dr}\right).\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)$$
$$\left(\frac{dV}{d\psi}\right) = -\left(\frac{dV}{dr}\right).\left(\frac{dr}{d\psi}\right)$$

und wenn man diese Werthe in vorige Gleichung für $\cos\theta$ substituirt, so kommt

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}},$$

welche die gesuchte Formel ist.

§. 181.

Da wir ferner in §. 175. gezeigt haben, daſs der Winkel θ das Complement des Winkels ε ist, so wird $\cos\theta = \sin\varepsilon$, also, wenn wir diesen Winkel in die Formel der Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho = \frac{l\,.\sin\varepsilon}{rr}$$

substituiren, so kommt die Dichtigkeit

$$\varrho = \frac{l}{r.\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}}.$$

Im Allgemeinen wird dieser Ausdruck die drei veränderlichen Gröſsen r, φ, ψ enthalten, allein da die Gleichung der Oberfläche zwischen denselben Gröſsen gegeben ist, so kann man eine derselben, z. B. r, eliminiren, und man erhält hierdurch ϱ als Function von φ und ψ.

§. 182.

Wir wollen als Beispiel die Lichtmenge berechnen, welche auf die Oberfläche einer Kugel fällt. Die Entfernung des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt der Kugel sey $= f$, der Halbmesser der Kugel $= a$, so ist die Gleichung der Kugel, wenn wir die Linie, welche

den Mittelpunkt der Kugel mit dem leuchtenden Punkt verbindet, als die Axe der z annehmen

$$aa = rr + ff - 2fr \,.\, \sin\psi.$$

Nun ist nach §. 175. die Lichtmenge

$$L = l\int d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi.$$

Integrirt man zuerst nach φ, so muſs diese Integration von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ geschehen, es wird also

$$L = 2\pi l \int d\psi \,.\, \cos\psi.$$

Hierauf integrirt man nach ψ, so kommt

$$L = 2\pi l \,.\, \sin\psi + \text{Const},$$

und setzt man hierin statt $\sin\psi$ seinen Werth

$$\sin\psi = \frac{rr + ff - aa}{2fr},$$

so wird

$$L = \pi l \cdot \frac{rr + ff - aa}{fr} + \text{Const}.$$

Nimmt man an, daſs für den Werth $r = r'$ das Integral anfange, also das Kugelstück von einem Parallelkreise begrenzt werde, dessen Entfernung vom leuchtenden Punkte $= r'$ ist, so hat man

$$\text{Const} = -\pi l \cdot \frac{r'r' + ff - aa}{fr'},$$

und da das Integral seinen vollen Werth erreicht, sobald $r = f - a$ ist, so kommt ebenfalls

$$L = \frac{\pi l}{f} \cdot \left[\frac{(f-a)^2 + ff - aa}{f - a} - \frac{r'r' + ff - aa}{r'}\right].$$

Setzt man noch $f - a = k$, wo also k die Entfernung des leuchtenden Punktes vom Pol des Parallelkreises bedeutet, so kommt

$$L = \frac{\pi l}{a + k} \cdot \left[2(k + a) - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'}\right].$$

Will man die Lichtmenge für den ganzen erleuchteten Theil der Kugel haben, so braucht man nur zu bemerken, daſs der letzte Werth von

$$r' = \sqrt{ff - aa} = \sqrt{kk + 2ak}$$

ist. Substituirt man also diesen Werth in vorige Gleichung, so wird

$$L' = 2\pi l \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{kk + 2ak}}{a + k}\right].$$

§. 183.

Um die mittlere Dichtigkeit auf dem erleuchteten Theil der Kugel zu haben, müssen wir die Gröſse desselben kennen; nun ist (§. 175.)

$$S = \int \frac{rrd\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

und nach §. 180.

$$\cos\theta = \sin\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}}.$$

Differentiirt man die im vorigen Paragraph gegebene Gleichung der Oberfläche der Kugel

$$aa = rr + ff - 2fr \,.\, \sin\psi,$$

so erhält man

$$o = rdr - fdr \,.\, \sin\psi - fr \,.\, \cos\psi d\psi,$$

folglich werden die partiellen Differentiale

$$\left(\frac{dr}{d\psi}\right) = \frac{fr \,.\, \cos\psi}{r - f \,.\, \sin\psi}, \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = o.$$

Hierdurch wird nun

$$rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2$$

$$= rr + \frac{ffrr \,.\, \cos\psi^2}{(r - f \,.\, \sin\psi)^2}$$

$$= \frac{rr - 2fr \,.\, \sin\psi + ff}{(r - f \,.\, \sin\psi)^2} \cdot rr$$

$$= \frac{aarr}{(r - f \,.\, \sin\psi)^2};$$

folglich kommt auch

$$\cos\theta = \frac{r - f \,.\, \sin\psi}{a} = \sin\varepsilon.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck von S, so erhält man

$$S = a \int \frac{rrd\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos \psi}{r - f \,.\, \sin \psi},$$

oder, wenn man nach φ von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ integrirt,

$$S = 2a\pi \int \frac{rrd\psi \,.\, \cos \psi}{r - f \,.\, \sin \psi}.$$

Aus diesem Ausdruck mufs nun erst ψ eliminirt werden, wenn man integriren will. Man erhält:

$$\sin \psi = \frac{rr + ff - aa}{2fr}$$

$$d\psi \,.\, \cos \psi = \frac{rr + aa - ff}{2fr^2} \,.\, dr$$

$$r - f \,.\, \sin \psi = \frac{rr + aa - ff}{2r}$$

$$\frac{d\psi \,.\, \cos \psi}{r - f \,.\, \sin \psi} = \frac{dr}{f \,.\, r},$$

folglich, wenn man diese Gröfse in den Ausdruck von S substituirt:

$$S = 2a\pi \cdot \frac{1}{f} \int rdr$$

$$= \frac{a\pi}{f} \cdot rr.$$

Dies Integral mufs von $r = f - a$ bis $r = r'$ genommen werden, und wenn man, wie §. 182., $f - a = k$ setzt, so kommt

$$S = a\pi \cdot \frac{r'r' - kk}{a + k}.$$

Da ferner ϱ^0 oder die mittlere Dichtigkeit des Lichts durch

$$\varrho^0 = \frac{L}{S}$$

ausgedrückt wurde, so hat man, wenn man den in §. 182. entwickelten Werth von L einführt,

$$\varrho^0 = \frac{l}{a} \cdot \left[\frac{2(k + a)}{r'r' - kk} - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'(r'r' - kk)} \right]$$

$$= \frac{l}{a} \cdot \frac{2a + k - r'}{r'(r' + k)}.$$

Ferner findet sich noch die Dichtigkeit ϱ des Lichts an

jeder gegebenen Stelle der erleuchteten Kugelfläche durch die Formel:

$$\varrho = \frac{l \,.\, \sin \varepsilon}{rr},$$

also, wenn man den Werth von $\sin \varepsilon$ hier substituirt,

$$\varrho = \frac{l\,(r - f \,.\, \sin \psi)}{arr}$$

$$= \frac{l}{2a} \,.\, \frac{rr + aa - ff}{r^3}.$$

Dieser Ausdruck würde negativ werden, da $ff > rr + aa$ ist, man kann ihn daher so schreiben:

$$\varrho = \frac{l}{2a} \,.\, \frac{ff - aa - rr}{r^3}.$$

Man sieht leicht, dafs der negative Ausdruck von der Ausziehung der Wurzel im Werthe von $\cos \theta$ oder $\sin \varepsilon$ herrührt. Setzt man statt f seinen Werth $a + k$, so kommt

$$\varrho = \frac{l}{2a} \,.\, \frac{2ak + kk - rr}{r^3},$$

und wenn man die Dichtigkeit des Lichts, welche in dem Punkte Statt findet, wo die nach dem Mittelpunkt vom leuchtenden Punkt gezogene Linie die Kugeloberfläche schneidet, durch ϱ' bezeichnet, so hat man, da für diesen Punkt der Werth von $r = k$ wird,

$$\varrho' = \frac{l}{kk},$$

folglich wird, indem man l eliminirt,

$$\varrho = \varrho' \,.\, \frac{kk}{2ar} \,.\, \frac{2ak + kk - rr}{rr}.$$

§. 184.

Wird der Radius a der Kugel unendlich grofs, so geht die Kugeloberfläche in eine Ebene über, und das von einem Parallelkreis eingeschlossene Stück der Kugelfläche verwandelt sich in eine ebene Kreisfläche. Bezeichnet man den Halbmesser dieses Kreises durch h, so sieht man leicht, dafs die Gröfse $r' = \sqrt{kk + hh}$,

wird, und man kann aus den vorigen Formeln für die Kugel die Erleuchtung eines Kreises finden, über dessen Mittelpunkt in der Höhe $= k$ sich ein leuchtender Punkt befindet. Wir haben (§. 182.)

$$L = \frac{\pi l}{a+k} \cdot \left[2(k+a) - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'}\right]$$

$$= \frac{\pi l}{r'} \cdot \left[\frac{2(r'-k)(a+k) + kk - r'r'}{a+k}\right],$$

und dieser Ausdruck wird für die Annahme, daſs $a = \infty$ ist,

$$L = 2\pi l . \left(1 - \frac{k}{r'}\right),$$

da das Glied $\frac{r'r' - kk}{a+k}$ Null wird. Setzt man statt r' seinen Werth $\sqrt{kk + hh}$, so erhält man

$$L = 2\pi l . \left(1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}}\right),$$

und da die Fläche des Kreises $= hh\pi$ ist, so kommt die mittlere Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho^0 = \frac{2l}{hh} \cdot \left(1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}}\right).$$

Um die Dichtigkeit des Lichts in einem Punkte, dessen Abstand vom Centro des Kreises $= u$ ist, zu finden, braucht man nur in der Formel

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{r^3}$$

die Gröſse $a = \infty$ und $r = \sqrt{kk + uu}$ zu setzen, dann kommt

$$\varrho = \frac{lk}{\sqrt{(kk+uu)^3}}.$$

Will man die Stelle des Kreises finden, wo die Dichtigkeit des Lichts der mittlern Dichtigkeit gleich kommt, so hat man die Gleichung $\varrho^0 = \varrho$, oder

$$1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{khh}{\sqrt{(kk+uu)^3}}.$$

Um diese Gleichung bequem aufzulösen, setze man

$$h = k \, . \, \text{tang}\, \varepsilon, \quad u = k \, . \, \text{tang}\, \psi,$$

wo ε und ψ die scheinbaren Gröſsen der Halbmesser h und u, aus dem leuchtenden Punkt gesehen, sind, so kommt

$$\cos \psi^3 \, . \, \text{tang}\, \varepsilon^2 = 2\,(1 - \cos \varepsilon)$$
$$= 4 \sin \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2,$$

und da auch zugleich

$$\text{tang}\, \varepsilon^2 = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\, \varepsilon^2 \, . \cos \frac{1}{2}\, \varepsilon^2}{\cos \varepsilon^2},$$

so erhält man

$$\cos \psi = \sqrt[3]{\frac{\cos \varepsilon^2}{\cos \frac{1}{2}\, \varepsilon^2}}.$$

Hierdurch läſst sich der Winkel ψ und vermittelst desselben auch der Abstand u berechnen. Ist die Entfernung des leuchtenden Punktes k gegen den Halbmesser h sehr groſs, so wird der Winkel ε sehr klein, und man kann ohne merklichen Fehler

$$\cos \varepsilon = 1 - \tfrac{1}{2}\, \varepsilon^2, \quad \cos \tfrac{1}{2}\, \varepsilon = 1 - \tfrac{1}{8}\, \varepsilon^2$$

setzen. Dann erhält man, da ebenfalls $\cos \psi = 1 - \frac{1}{2}\psi^2$ wird, $\psi = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}}$.

§. 185.

Der Ausdruck der Dichtigkeit des Lichts auf einer bestimmten Stelle der Kreisfläche

$$\varrho = \frac{lk}{\sqrt{(kk + uu)^3}},$$

giebt zu einer zweiten Aufgabe Anlaſs. Indem nämlich der Abstand u derselbe bleibt, kann man fragen, wie groſs k werden müsse, damit die Dichtigkeit ihren gröſsten Werth erhalte. Daſs wirklich ein gröſster Werth vorhanden ist, sieht man daraus, daſs für $k = o$ und $k = \infty$ beidemal $\varrho = o$ wird, folglich muſs dazwischen wenigstens ein Werth von k liegen, der für ϱ den möglichst gröſsten Werth giebt. Differentiirt man obigen Ausdruck, so kommt

$$\frac{d\varrho}{dk} = l \cdot \frac{uu - 2kk}{\sqrt{(kk + uu)^5}}.$$

Man mufs bekanntlich, um das Maximum von ϱ zu finden, den Differentialcoefficienten $\frac{d\varrho}{dk} = o$ setzen, dann bleibt

$$uu - 2kk = o, \quad u = k\sqrt{2}.$$

Soll also der Rand des Kreises am meisten erleuchtet werden, so mufs die Höhe der Lichtflamme so angenommen werden, dafs dieselbe dem Halbmesser des Kreises, dividirt durch die Quadratwurzel aus 2, gleich ist, oder überhaupt wird die Stelle am besten erleuchtet, auf welche das Licht unter einem Winkel von $35^0\, 15'\, 52''$, dessen Tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, einfällt.

§. 186.

So wie wir im §. 184. den Ort der Kreisfläche bestimmten, wo die Dichtigkeit des Lichts der mittlern Dichtigkeit gleich kam, so läfst sich auch der Ort der Kugelfläche aufsuchen, wo dieser Umstand Statt findet. Aus §. 183. hat man die mittlere Dichtigkeit

$$\varrho^0 = \frac{l}{a} \cdot \frac{2a - r' + k}{r'\,(r' + k)},$$

und die Dichtigkeit an einer Stelle, die den Abstand r von dem leuchtenden Punkt besitzt,

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{r^3},$$

folglich hat man zur Bestimmung von r die Gleichung:

$$\frac{2ak + kk - rr}{2\,r^3} = \frac{2a - r' + k}{r'\,(r' + k)},$$

welche vom dritten Grade ist. Bezeichnet man durch θ den Winkel, welchen der Halbmesser der Kugel, der nach demPunkte gezogen ist, welchen der Radius vector r trifft, mit der vom Mittelpunkt der Kugel nach dem leuchtenden Punkt gezogenen Linie macht, so hat man die Gleichung

$$rr = (a + k)^2 + aa - 2a\,(a + k)\cos\theta,$$

und bedeutet α den scheinbaren Halbmesser der Ku-

gel, vom leuchtenden Punkt aus gesehen, so ist $\frac{a}{a+k} = \sin\alpha$, folglich auch

$$rr = (a+k)^2 (1 - 2.\sin\alpha.\cos\theta + \sin\alpha^2),$$

und wenn man den Winkel am Mittelpunkt der Kugel, welcher dem Radius r' zugehört, durch θ' bezeichnet, so ist ebenfalls

$$r'r' = (a+k)^2 (1 - 2.\sin\alpha.\cos\theta' + \sin\alpha^2).$$

Man erhält also, wenn man die erleuchtete Kugel als sehr entfernt vom leuchtenden Punkt ansieht, unter welcher Annahme die höhern Potenzen von $\sin\alpha$ vernachlässigt werden können,

$$r = (a+k)(1 - \sin\alpha.\cos\theta)$$
$$r' = (a+k)(1 - \sin\alpha.\cos\theta'),$$

oder auch, wenn statt a sein Werth aus der Gleichung $\frac{a}{a+k} = \sin\alpha$ gesetzt wird,

$$r = k(1 + 2.\sin\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)$$
$$r' = k(1 + 2.\sin\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\theta'^2).$$

Substituirt man diese Werthe in die vorige Gleichung

$$\frac{2ak + kk - rr}{2r^3} = \frac{2a - r' + k}{r'(r'+k)},$$

so kommt mit Vernachlässigung der Potenzen von $\sin\alpha$, nachdem alle gehörige Zusammenziehungen geschehen sind,

$$\cos\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta'^2.$$

Betrachtet man hierbei die ganze erleuchtete Halbkugel, so wird $\theta' = 90^0$, $\cos\frac{1}{2}\theta' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich $\cos\theta = \frac{1}{2}$, und der Winkel $\theta = 60^0$. Es wird daher die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf einer Kugel, die von einem sehr weit entfernten Punkt erleuchtet wird, derjenigen Dichtigkeit gleich seyn, welche ein Punkt der Kugeloberfläche besitzt, der sechszig Grad von dem Punkt entfernt liegt, wo die nach dem leuchtenden Punkt aus dem Centrum der Kugel gezogene Linie die Kugeloberfläche schneidet.

§. 187.

Es sey ferner ADB eine Ellipse, AB ihre groſse Axe, C ihr Mittelpunkt (Fig. 28 b.). L sey der leuchtende Punkt, der eine solche Lage hat, daſs ein auf die verlängerte Ebene der Ellipse gefälltes Perpendikel LK die verlängerte Axe in K trifft. M sey ein beliebiges Element der Fläche, so wird, wenn man $MC = r$, $ACM = \varphi$ setzt, das Element $= rdrd\varphi$, folglich die Lichtmenge, die auf dasselbe fällt,

$$= \frac{l \, . \, rdrd\varphi \, . \sin LMK}{LM^2},$$

wo l eine von der Intensität des Lichts abhängende Constante ist. Setzt man

$$KC = m, \quad KL = h,$$

so erhält man leicht

$$KM^2 = mm + rr - 2mr \, . \cos\varphi$$
$$LM^2 = mm + rr + hh - 2mr \, . \cos\varphi$$
$$\sin LMK = \frac{h}{LM},$$

folglich wird die Lichtmenge, die auf das Element fällt,

$$\frac{hlrdrd\varphi}{\sqrt{(mm + rr + hh - 2mr \, . \cos\varphi)^3}}.$$

Man muſs hier zuerst nach r integriren. Zu diesem Ende schreiben wir die Gröſse unter dem Wurzelzeichen so:

$$hh + mm \, . \sin\varphi^2 + (m \, . \cos\varphi - r)^2,$$

und setzen der Kürze wegen:

$$m \, . \cos\varphi - r = \text{tang}\,\theta \, . \sqrt{hh + mm \, . \sin\varphi^2},$$

wo θ eine neue veränderliche Gröſse bedeutet, die sich aber bloſs auf r bezieht, und es wird hierdurch

$$\sqrt{(mm + rr + hh - 2mr \, . \cos\varphi)^3} = \frac{\sqrt{(mm . \sin\varphi^2 + hh)^3}}{\cos\theta^3}$$

$$r = m \, . \cos\varphi - \text{tang}\,\theta \, . \sqrt{mm \, . \sin\varphi^2 + hh}$$

$$dr = - \frac{d\theta}{\cos\theta^2} \, . \sqrt{mm \, . \sin\varphi^2 + hh}.$$

Substituirt man diese Werthe in vorigen Ausdruck, so wird derselbe

$$\frac{-hld\varphi d\theta}{mm.\sin\varphi^2+hh}.[m.\cos\varphi.\cos\theta-\sin\theta.\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}],$$

also, wenn man nach θ integrirt

$$\frac{hld\varphi}{mm.\sin\varphi^2+hh}.[\mathrm{Const}-m.\cos\varphi.\sin\theta-\cos\theta.\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}].$$

Dieser Ausdruck muſs für $r = o$ verschwinden; dann ist aber

$$\tang\theta = \frac{m.\cos\varphi}{\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}}{\sqrt{mm+hh}}$$

$$\sin\theta = \frac{m.\cos\varphi}{\sqrt{mm+hh}},$$

also erhält man die Constante $= \sqrt{mm+hh}$. Bezeichnet man die halbe groſse Axe der Ellipse durch a, die halbe kleine durch b, so ist die Gleichung derselben

$$r = \frac{ab}{\sqrt{aa.\sin\varphi^2+bb.\cos\varphi^2}},$$

und dies ist der letzte Werth von r. Für diesen Fall bestimmt sich tang θ durch

$$m.\cos\varphi-\frac{ab}{\sqrt{aa.\sin\varphi^2+bb.\cos\varphi^2}}=\tang\theta.\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}.$$

Behält man einstweilen statt $\frac{ab}{\sqrt{aa.\sin\varphi^2+bb.\cos\varphi^2}}$ den Buchstaben r, und setzt auſserdem der Kürze wegen

$$mm+hh+rr-2rm.\cos\varphi = RR,$$

so erhält man aus voriger Gleichung

$$\sin\theta = \frac{m.\cos\varphi-r}{R},$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{mm.\sin\varphi^2+hh}}{R},$$

und durch Substitution dieser Werthe in obige nach θ integrirte Gleichung erhält man die ganze Lichtmenge

$$hl\int\frac{\sqrt{mm+hh}}{mm.\sin\varphi^2+hh}\cdot d\varphi$$

$$-hl\int\frac{mm+hh-rm.\cos\varphi}{(mm.\sin\varphi^2+hh).R}\cdot d\varphi,$$

wo die Integrale von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen werden müssen. Das Integral des ersten Theils ist leicht gefunden. Man hat nämlich

$$\frac{d\varphi}{mm.\sin\varphi^2+hh}=\frac{1}{hh+(hh+mm).\text{tang}\,\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}$$

$$=\frac{du}{hh+(hh+mm).uu},$$

indem man tang $\varphi = u$ setzt, und hiervon ist das bekannte Integral

$$\frac{1}{h\sqrt{mm+hh}}\ \text{Arc. tang}\left(=u\cdot\frac{\sqrt{hh+mm}}{h}\right),$$

welches zwischen den besagten Grenzen $=\dfrac{2\pi}{h\sqrt{mm+hh}}$ wird, also ist der erste Theil $= 2\pi l$. Der zweite Theil ist aber nicht unter endlicher Form integrabel.

§. 188.

Die Dichtigkeit des Lichts auf einer beleuchteten Fläche bestimmt zugleich die Helligkeit derselben, unter welcher sie dem Auge erscheint. Man muſs aber auch hierbei die absolute Helligkeit der erleuchteten Fläche von der scheinbaren unterscheiden. Denn da das Licht von einem erleuchteten Körper zurückgeworfen wird, so muſs es sich nach denselben Gesetzen, wie von einem leuchtenden Punkte, ausbreiten, und die scheinbare Helligkeit der Oberfläche von der Lage des Auges gegen dieselbe abhängen, so daſs ein heller Punkt derselben bei verschiedenen Abständen des Auges eine Helligkeit zu haben scheint, die dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional seyn muſs.

§. 189.

Wenn zwei nebeneinander liegende erleuchtete Flächen, die gegen das Auge einerlei Lage haben, und um sie besser mit einander vergleichen zu können, auch zu gleicher Zeit von demselben übersehen werden, einerlei scheinbare Helligkeit besitzen, so muſs man auch schlieſsen, daſs ihre absolute Helligkeit dieselbe sey, und da kein Grund für uns vorhanden ist, warum wir zwischen der absoluten Helligkeit und der Dichtigkeit des Lichts eine andere Relation annehmen sollen, als die der Proportionalität beider Gröſsen, so wird unter diesen Umständen auch die Dichtigkeit des Lichts auf beiden gleich seyn. Freilich müssen wir hierbei das Licht, welches der Körper in sich aufnimmt, und nicht wieder zurückwirft, auſser Acht lassen; allein wenn die beiden erleuchteten Flächen Körpern von gleichartiger Materie zugehören, so wird auch dieses verschluckte Licht bei beiden eine gleiche Menge ausmachen, und die angegebene Proportionalität der Dichtigkeit des Lichts und der scheinbaren Helligkeit wird immer richtig bleiben. Wären die Körper, denen die erleuchteten Flächen zugehören, von ungleicher physischer Beschaffenheit, so würde ihre gleiche scheinbare Klarheit nicht auf gleiche Dichtigkeit der auf dieselbe fallenden Lichtmenge, sondern bloſs auf eine gleiche Dichtigkeit der zurückgeworfenen Lichtmenge schlieſsen lassen.

§. 190.

Die bisher vorgetragene Theorie der Erleuchtung bezieht sich bloſs auf den Fall, wo die Quelle des Lichts als ein leuchtender physischer Punkt angesehen werden kann, wie dies z. B. bei einer kleinen Lichtflamme geschehen darf, indem bei dieser das Licht nicht nur von der Oberfläche, sondern auch aus ihrem Innern ausströmt. Ist hingegen der strahlende Körper bloſs an seiner Oberfläche leuchtend, so muſs zu der vorigen Theorie noch eine Bedingung hinzugefügt werden, weil

dann nicht mehr von leuchtenden Punkten, sondern von leuchtenden Flächen die Rede ist.

Wir betrachten daher ein unendlich kleines Element der leuchtenden Fläche, das seiner geringen Ausdehnung wegen als eben angesehen werden kann, wenn die Oberfläche selbst auch gekrümmt seyn sollte, und ein Durchschnitt desselben werde durch die grade Linie *AB* (Fig. 29.) dargestellt. Von diesem Element fliefsen nach allen Seiten, so weit es möglich ist, Lichtstrahlen *CABD*, *EABF* aus, welche man als physische Linien betrachten kann, deren Durchschnitt parallel mit dem leuchtenden Element immer eine Figur giebt, die diesem völlig gleich ist. Alle diese physischen Lichtstrahlen werden nun aus Licht von gleicher Dichtigkeit bestehen, so dafs also auch jeder Durchschnitt, welcher senkrecht auf dem Strahl steht, gleiche Helligkeit haben wird, allein die Lichtmenge wird nicht für alle Strahlen dieselbe seyn.

§. 191.

Man sieht nämlich, dafs der mit *AB* parallel liegende Durchschnitt *GH* des Strahles *AEBF* nicht mehr Lichtmasse enthalten kann, als der senkrechte *HK*, folglich wird das auf *GH* fallende Licht weniger Dichtigkeit besitzen, als das auf *HK* fallende, und aus den in §. 171. angewandten Schlüssen ergiebt sich, dafs die Dichtigkeit in *KH* sich zu der des Elementes *AB* verhalte, wie der Sinus des Ausflufswinkels *BAE* zur Einheit, folglich wird bei einem leuchtenden Element die Dichtigkeit des ausfliefsenden Lichts im Verhältnifs des Sinus des Ausflufswinkels vermindert. Dafs übrigens die beiden andern für das Ausströmen des Lichts aus einem leuchtenden Punkt bewiesenen Sätze auch bei einer unendlich kleinen leuchtenden Fläche Statt finden müssen, ist von selbst klar.

§. 192.

Bemerken wir nun noch, dafs ein Element, welches *n* mal so grofs als ein anderes ist, auch eine *n* mal

gröfsere Menge Licht unter sonst gleichen Umständen ausströmt, so haben wir, indem alle bis jetzt vorgetragene Schlüsse vereinigt werden, folgenden allgemeinen Satz über die Erleuchtung:

Die Lichtmenge, welche ein Element einer leuchtenden Fläche dem Element einer dunkeln Fläche mittheilt, ist der Oberfläche beider Elemente, dem Sinus des Ausflufswinkels und dem Sinus des Einfallswinkels direct, dem Quadrat der Entfernung beider Elemente von einander aber umgekehrt proportional.

Bezeichnet man also die Lichtmenge durch ddL, das Element der erleuchteten Fläche durch ds, das der leuchtenden Fläche durch ds', den Ausflufswinkel durch α, den Einfallswinkel durch ε, die gegenseitige Entfernung der Elemente durch r, so wird

$$ddL = \frac{l \,.\, ds \,.\, ds' \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr}.$$

Die Dichtigkeit des Lichts auf dem Element des erleuchteten Körpers erhält man also, wenn die Lichtmenge durch die Gröfse dieses Elements getheilt wird. Auf gleiche Weise wird die mittlere Dichtigkeit einer ungleich stark erleuchteten Oberfläche gefunden, wenn man die ganze auf der Oberfläche befindliche Lichtmenge durch die Gröfse des erleuchteten Theils dividirt.

§. 193.

Wir müssen hierbei die Bemerkung machen, dafs der Satz, die Dichtigkeit der von einem Element ausfliefsenden Lichtmenge nehme wie der Sinus des Ausflufswinkels ab, zuerst von Lambert aufgestellt wurde, allein nicht von allen Mathematikern angenommen worden ist. So hat z. B. Euler in einer Abhandlung: *Réflexions sur les divers degrés de la lumière du soleil et des autres corps célestes* (*Histoire de l'Académie de Berlin A.* 1750.) die senkrechte Erleuchtung gesucht, welche eine überall gleich stark leuchtende Kugel

einer unendlich kleinen Ebene mittheilt, ohne dabei die Verminderung des Lichts wegen der Schiefe des Ausflufswinkels zu berücksichtigen. Sobald man aber annimmt, dafs das Licht keine Abnahme seiner Dichtigkeit erleidet, so ergiebt sich, dafs eine gleichförmig glänzende Kugel dem Auge gegen den Rand zu mit immer stärkerm Glanz, dem Sinus des Ausflufswinkels umgekehrt proportional erscheint, also am Rande, wo der Ausflufswinkel Null wird, müfste der Glanz unendlich seyn. Betrachtet man aber z. B. eine glühende Kugel, so wird man gewifs an keiner Stelle einen gröfsern Glanz zu erblicken glauben, sondern die Kugel wird dem Auge mit gleichförmigem Glanz erscheinen. Hieraus folgt aber, dafs die Dichtigkeit des nicht senkrecht ausfliefsenden Lichts sich in demselben Grade vermindert, in welchem das Element der Kugeloberfläche dem Auge verkleinert erscheint, d. h. im Verhältnifs des Sinus des Ausflufswinkels, durch welche Beobachtung wir also auf das von Lambert (*Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum, et umbrae*) aufgestellte Gesetz zurückkommen.

§. 194.

Bouguer, welcher sich schon vor Lambert mit den verschiedenen Abstufungen der Lichtstärke beschäftigte, und hierüber zwei Werke aufgesetzt hatte (*Essai d'Optique sur la Gradation de la lumière* und *Traité d'Optique sur la Gradation de la lumière*), meint zwar auch, dafs das Licht mit dem Ausflufswinkel abnähme, allein in einem noch stärkern Verhältnifs als dem des Sinus. Man begreift nämlich leicht, dafs, wenn die Dichtigkeit des Lichts in einem stärkern Verhältnifs als dem des Sinus des Ausflufswinkels abnimmt, der scheinbare Glanz einer sonst gleichförmig glänzenden Kugel vom Mittelpunkt nach dem Rande zu abnehmen mufs. Nun hatte Bouguer versucht, den Glanz der Sonne an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche zu bestimmen

(*Traité d'Optique sur la Gradation de la lumière pag.* 90.), und gefunden, daſs ihr scheinbarer Glanz in der Mitte zu dem, welcher in einem scheinbaren Abstand vom Mittelpunkt $= \frac{3}{4}$ des Halbmessers Statt findet, sich verhielt, wie 48 : 35. Dieser Punkt würde einem Ausfluſswinkel von $41^{0}\,24'$ entsprechen. Obwohl nun diese Beobachtung noch sehr in Zweifel zu ziehen ist, da so mancherlei Umstände vorkommen, die das Urtheil des Auges rücksichtlich der Helligkeit unsicher machen können, so würde sie doch nichts gegen das Lambertsche Gesetz beweisen, indem man sehr wohl annehmen könnte, die Sonne sey von einer Atmosphäre umgeben, in welcher das Licht, auf gleiche Art, wie in unserer Atmosphäre und allen andern durchsichtigen Materien, geschwächt würde, und da diejenigen Lichtstrahlen, welche von Punkten herkommen, die dem Rande der Sonne näher liegen, einen gröſsern Weg in dieser Atmosphäre zurücklegen müssen, so wird der Lichtstrahl mehr geschwächt, und unserm Auge daher diese Stelle mit geringerm Glanz erscheinen.

§. 195.

Um zu zeigen, wie man diese Schwächung des Lichts der Bouguerschen Beobachtung zufolge genau erklären könne, wollen wir folgende Untersuchung anstellen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre an irgend einer Stelle durch Δ, die Elasticität durch p, die Höhe, in welcher der zu betrachtende Punkt der Atmosphäre über der Sonnenfläche liegt, durch z, die auf denselben wirkende Anziehungskraft der Sonne durch Z, so hat man, den bekannten hydrostatischen Formeln zufolge, die Gleichung

$$dp = -\Delta . Z . dz,$$

und da, so viel unsere Versuche gezeigt haben, bei jeder elastischen Flüssigkeit, wenn wir die verschiedene Temperatur bei Seite setzen, die Dichtigkeit der Elasticität proportional ist, so hat man $p = k\Delta$, wo k eine

constante Grösse bedeutet, folglich auch $dp = kd\varDelta$, und wenn man hierdurch dp eliminirt, so wird

$$kd\varDelta = -\varDelta . Z . dz.$$

Nun nimmt die Anziehungskraft der Sonne umgekehrt wie das Quadrat der Entfernungen von ihrem Mittelpunkt ab; bezeichnen wir also die Anziehungskraft an der Oberfläche der Sonne durch g, ihren Halbmesser durch a, so wird die Anziehungskraft in der Höhe z über der Oberfläche der Sonne

$$= \frac{gaa}{(a+z)^2} = Z,$$

und vorige Gleichung läfst sich so schreiben:

$$\frac{kd\varDelta}{\varDelta} = -\frac{gaadz}{(a+z)^2}.$$

Hiervon ist das Integral

$$k . \log \varDelta = \frac{gaa}{a+z} + \text{Const.}$$

An der Oberfläche der Sonne, wo $z = o$, sey die Dichtigkeit der Atmosphäre $\varDelta'$, so wird zur Bestimmung der Constante

$$k . \log \varDelta' = ga + \text{Const},$$

und wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht,

$$k . \log \frac{\varDelta}{\varDelta'} = \frac{gaa}{a+z} - ga.$$

Nehmen wir ferner an, dafs die Höhen z, bis zu welchen die Dichtigkeit der Atmosphäre merklich genug ist, um das Licht zu schwächen, gegen die Halbmesser der Sonne a nur klein sind, so erhält man, mit Vernachlässigung der Potenzen von z,

$$k . \log \frac{\varDelta}{\varDelta'} = -gz$$

$$\varDelta = \varDelta' . e^{-\frac{gz}{k}}.$$

§. 196.

Was nun das Gesetz der Schwächung des Lichts betrifft, indem es durch durchsichtige Materien geht,

so sieht man leicht ein, daſs die Abnahme desselben der Dichtigkeit des Lichts selbst proportional seyn wird, indem, wenn wir zuerst die durchsichtige Materie in allen Theilen als das Licht gleichförmig schwächend betrachten, bei jedem durchlaufenen Wege ein gleich groſser aliquoter Theil des Lichts verloren geht. Bezeichnen wir also die Dichtigkeit des Lichts an irgend einer Stelle des durchlaufenen Weges durch ϱ, so wird der Verlust der Dichtigkeit, nachdem es die Masse dm der durchsichtigen Materie durchlaufen hat, $d\varrho$ seyn, und man hat die Gleichung

$$d\varrho = -n\varrho dm,$$

wo n eine constante Gröſse ist, die von der absoluten schwächenden Kraft der durchsichtigen Materie abhängt. Bezeichnen wir nun den durchlaufenen Weg durch s, so können wir allgemein $dm = n'\Delta ds$ setzen, und substituiren wir diesen Werth in vorige Gleichung, und nehmen $nn' = N$, so wird

$$d\varrho = -N\varrho\Delta . ds,$$

oder wenn wir den Werth von Δ

$$\Delta = \Delta' . e^{-\frac{gz}{k}}$$

aus voriger Gleichung einführen, und auf beiden Seiten durch ϱ dividiren,

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -N\Delta' . e^{-\frac{gz}{k}} . ds.$$

§. 197.

Nun sey (Fig. 24.) C der Mittelpunkt der Sonne, O ein Punkt ihrer Oberfläche, aus welchem ein Lichtstrahl OS unter dem Ausfluſswinkel $SOS' = \mu$ ausgeht, so hat man im Dreieck COS

$$SC^2 = OC^2 + OS^2 - 2\,OC . OS . \cos SOC.$$

Es ist aber $SC = a + z$, $OC = a$, $OS = s$, $SOC = 90^0 + \alpha$, folglich auch

$$(a + z)^2 = aa + ss + 2as . \sin \mu.$$

Hieraus ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Potenzen von z und s,

$$z = s \cdot \sin\mu, \quad ds = \frac{dz}{\sin\mu},$$

und wenn wir diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta' \cdot e^{-\frac{gz}{k}} \cdot ds$$

substituiren, so kommt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{N\Delta'}{\sin\mu} \cdot e^{-\frac{gz}{k}} \cdot dz.$$

Hiervon ist das Integral

$$\log\varrho = \frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin\mu} \cdot e^{-\frac{gz}{k}} + \text{Const.}$$

An der Oberfläche der Sonne sey die Dichtigkeit des ausfliefsenden Lichts ϱ', so gehören die Werthe $\varrho = \varrho'$, $z = o$ zusammen, es ist also zur Bestimmung der Constante

$$\log\varrho' = \frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin\mu} + \text{Const},$$

und man erhält, indem man die Constante eliminirt, und von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\varrho = \varrho' \cdot e^{-\frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin\mu}\left(1 - e^{-\frac{gz}{k}}\right)}$$

Ist nun z' der Werth, welcher der Grenze der Atmosphäre entspricht, und ϱ^0 der zugehörige Werth von ϱ, setzt man ferner der Kürze wegen

$$\frac{kN\Delta'}{g}\left(1 - e^{-\frac{gz'}{k}}\right) = \lambda,$$

so erhält man

$$\varrho^0 = \varrho' \cdot e^{-\frac{\lambda}{\sin\mu}}.$$

Bezeichnet man nun die Dichtigkeit des Lichts, welches aus der Mitte der Sonnenscheibe ausgeflossen ist, durch

R, die Dichtigkeit des Lichts, welches von einem Punkt herkommt, der um $\frac{3}{4}$ des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt liegt, durch R', so ist

$$R = \varrho' . e^{-\lambda}$$

$$R' = \varrho' . e^{-\frac{4\lambda}{3}},$$

und da nach Bouguer's Beobachtungen (§. 194.)

$$R : R' = 48 : 35,$$

so folgt aus der Verbindung dieser Proportion mit den beiden Gleichungen

$$48 : 35 = e^{-\lambda} : e^{-\frac{4\lambda}{3}},$$

und hieraus erhält man, wenn man sich der natürlichen Logarithmen bedient,

$$\frac{\lambda}{3} = \log 48 - \log 35$$

$$\log 48 = 3 . 8712010$$

$$\log 35 = 3 . 5553481$$

$$\frac{\lambda}{3} = 0,3158529$$

$$\lambda = 0,9475587,$$

also sehr nahe der Einheit gleich.

§. 198.

Diese Formel läſst sich jedoch nicht bis ganz zum Rande der Sonne ausdehnen, denn daselbst erhielte man, da $\sin \mu = o$ wird,

$$\varrho = \varrho' . e^{-\infty} = o.$$

Dies Resultat rührt daher, daſs wir uns erlaubten, in der Gleichung, welche die Relation zwischen s und z ausdrückt, die Potenzen von s und z zu vernachlässigen. Dies ist aber nur so lange gestattet, als das Product $a . \sin \mu$, gegen s oder z als hinreichend groſs betrachtet werden kann, welches aber für den Fall $\sin \mu = o$ nicht mehr Statt findet. Dann giebt die Gleichung

$$(a + z)^2 = aa + ss + 2as . \sin \mu,$$

mit Vernachlässigung von zz,

$$2az = ss, \quad ds = \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \varDelta' N \,.\, e^{-\frac{gz}{k}} \,.\, ds,$$

so erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \varDelta' N \,.\, \sqrt{\frac{a}{2}} \,.\, e^{-\frac{gz}{k}} \,.\, \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Nach §. 195. drückt die Exponentialgröſse $e^{-\frac{gz}{k}}$ das Verhältniſs der Dichtigkeit der Atmosphäre $\frac{\varDelta}{\varDelta'}$ aus, und da für die Höhe, wo die Schwächung des Lichts nicht mehr bedeutend seyn soll, auch $\varDelta$ unbedeutend seyn muſs, so folgt, daſs $\frac{gz}{k}$ eine sehr groſse Zahl für diese Grenze wird. Setzen wir nun

$$\frac{gz}{k} = uu, \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot du,$$

so wird ebenfalls u für diese Grenze bedeutend seyn. Substituirt man den angenommenen Werth von z in die vorige Gleichung, so wird

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - 2\varDelta' N \,.\, \sqrt{\frac{ak}{2g}} \,.\, e^{-uu} \,.\, du,$$

also, wenn man integrirt,

$$\log \varrho = - 2\varDelta' N \,.\, \sqrt{\frac{ak}{2g}} \cdot \int e^{-uu} \,.\, du + \text{Const.}$$

Nehmen wir an, daſs das Integral für $u = o$ oder $z = o$ verschwinden soll, so wird zugleich $\varrho = \varrho'$, und die Constante erhält man $= \log \varrho'$. Um nun den Werth von ϱ zu erhalten, der der Grenze von $z = z'$ entspricht, muſs das Integral bis $u = \sqrt{\frac{gz}{k}}$ ausgedehnt werden, allein da wir bemerkt haben, daſs diese Grenze

eine bedeutende Zahl ist, so wird man das Integral ohne merklichen Fehler bis $u = \infty$ ausdehnen können. Man weiſs aber, daſs das Integral $\int e^{-uu} . du$, zwischen den Grenzen $u = o$, $u = \infty$ genommen, $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist, folglich erhält man

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - \varDelta' N . \sqrt{\frac{ka\pi}{2g}}.$$

Ferner hatten wir angenommen

$$\frac{kN\varDelta'}{g} \cdot \left(1 - e^{-\frac{gz'}{k}}\right) = \lambda,$$

und da $e^{-\frac{gz'}{k}}$ beinahe Null seyn muſs, so kann man kurz $\frac{kN\varDelta'}{g} = \lambda$ setzen, aus welcher Gleichung sich

$$N\varDelta' = \frac{g\lambda}{k}$$

ergiebt. Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von $\log \frac{\varrho}{\varrho'}$, so hat man

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - \lambda . \sqrt{\frac{ag\pi}{2k}}$$

$$\varrho = \varrho' . e^{-\lambda . \sqrt{\frac{ag\pi}{2k}}},$$

also erhält der scheinbare Glanz des Randes der Sonnenscheibe einen endlichen Werth. Obgleich wir nun freilich nicht den wirklichen numerischen Werth von ϱ hieraus ableiten können, da uns die Gröſse k völlig unbekannt ist, so können wir doch so viel behaupten, daſs, wenn der scheinbare Glanz nach dem Rand zu immer mehr abnimmt, $\sqrt{\frac{ag\pi}{2k}} > \frac{4}{3}$ seyn muſs, wie sich aus der Gleichung (§. 197.)

$$R' = \varrho' . e^{-\frac{4\lambda}{3}}$$

ergiebt, wo R' der scheinbare Glanz einer Stelle der

Sonnenscheibe ist, die um $\frac{3}{4}$ des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt liegt.

§. 199.

Wie dem nun auch sey, so werden wir in unseren folgenden Untersuchungen immer das von Lambert angegebene Gesetz, nach welchem die Strahlenmenge wie der Sinus des Ausflufswinkels abnimmt, zum Grunde legen, und wenn eine Schwächung des Lichts bei seinem Wege durch durchsichtige Materien Statt findet, dieselbe besonders in Betracht ziehen.

Wir nehmen zuerst den Fall vor, wo eine unendlich kleine Ebene von einer leuchtenden Kugel ihr Licht erhält. Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugel senkrecht auf die zu erleuchtende Fläche eine Ebene, so können wir den Durchschnitt dieser Ebene mit der Verlängerung der Fläche als die Axe der x betrachten; die Axe der z setzen wir senkrecht auf die zu erleuchtende unendlich kleine Fläche. Bezeichnen wir dann die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel parallel mit der Axen den x, y, z durch α, o, γ, und den Halbmesser der Kugel durch a, so wird die Gleichung der Kugel

$$(\alpha - x)^2 + yy + (\gamma - z)^2 = aa.$$

Man setze nun, wie gewöhnlich,

$$x = r \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$y = r \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$z = r \,.\, \sin\psi,$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - 2\alpha r \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi - 2\gamma r \,.\, \sin\psi = aa.$$

Die Lichtmenge, welche das unendlich kleine Element ds empfängt, ist nach §. 192.

$$= \frac{lds \,.\, ds' \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr},$$

und der Factor lds, der hierbei constant ist, kann vorerst aufser Acht gelassen werden. Nun ist bekanntlich

$$ds' = \frac{rrd\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

wo θ den Winkel bedeutet, den der Radius vector oder der ausfahrende Strahl mit der Normale macht; dieser ist aber auch zugleich das Complement des Ausflußwinkels, d. h. es wird $\cos\theta = \sin\alpha$, und hierdurch bleibt die Erleuchtung, die das Element empfängt,

$$ddL = d\varphi . d\psi . \cos\psi . \sin\varepsilon.$$

Der Einfallswinkel ε ist aber derjenige, welchen der Radius vector oder der Lichtstrahl mit der Ebene der x, y bildet; man hat also $\sin\varepsilon = \sin\psi$, folglich

$$ddL = d\varphi . d\psi . \cos\psi . \sin\psi.$$

Die Gleichung der Kugel giebt, wenn man sie nach r auflöst,

$$r - (\alpha . \cos\varphi . \cos\psi + \gamma . \sin\psi)$$
$$= \pm \sqrt{(aa - \alpha\alpha - \gamma\gamma . \cos\psi^2 + \alpha^2 . \cos\varphi^2 . \cos\psi^2 + 2\alpha\gamma . \cos\psi . \sin\psi . \cos\varphi)}.$$

An der Erleuchtungsgrenze berührt der Radius r die Kugel; es kann also daselbst nur ein Werth von r Statt finden, und hierzu ist nöthig, daſs dort zwischen den Winkeln ψ und φ die Gleichung

$$aa - \alpha\alpha - \gamma\gamma . \cos\psi^2 + \alpha^2 . \cos\varphi^2 . \cos\psi^2 + 2\alpha\gamma . \cos\psi . \sin\psi . \cos\varphi = o$$

bestehe, welche, wie man leicht sieht, daraus entsteht, daſs das Radical Null gesetzt wird. Diese letztere Gleichung läſst sich auch so schreiben:

$$(\alpha . \cos\varphi . \cos\psi + \gamma . \sin\psi) = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} \;{}^{*})$$

also $\alpha . \cos\varphi . \cos\psi = \sqrt{\gamma\gamma - aa + \alpha\alpha} - \gamma . \sin\psi$,

*) Es muſs hier die Radicalgröſse $\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}$ positiv genommen werden, wenn, wie dies wohl immer der Fall seyn wird, die erleuchtete Fläche auſserhalb der Kugel liegt. Denn die Gleichung der Kugel

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - 2\alpha r . \cos\varphi . \cos\psi - 2\gamma r . \sin\psi = aa$$

giebt $\alpha . \cos\varphi . \cos\psi + \gamma . \sin\psi = \dfrac{\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - aa}{2r}$,

und liegt der Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. das erleuchtete Element, auſserhalb der Kugel, so wird $\dfrac{\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - aa}{2r}$ positiv, also auch $\alpha . \cos\varphi . \cos\psi + \gamma . \sin\psi$. G.

oder, wenn man quadrirt,

$$a^2 . \cos\varphi^2 - \alpha^2 . \cos\varphi^2 . \sin\psi^2 = \gamma\gamma - aa + \gamma^2 . \sin\psi^2 + \alpha\alpha - 2\gamma . \sin\psi . \sqrt{\gamma\gamma - aa + \alpha\alpha}.$$

Hieraus folgt

$$\sin\psi = \frac{\gamma . \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}}{\gamma\gamma + \alpha\alpha . \cos\varphi^2} \pm \frac{\alpha . \cos\varphi . \sqrt{aa - \alpha\alpha . \sin\varphi^2}}{\gamma\gamma + \alpha\alpha . \cos\varphi^2}.$$

Einem jeden Werth von φ gehören also zwei Werthe von ψ zu, und wenn wir diese besondern Werthe von ψ durch ψ' und ψ'' bezeichnen, wo $\psi' < \psi''$ ist, so erhält man

$$\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2 = \frac{4\alpha\gamma . \cos\varphi . \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} . \sqrt{aa - \alpha\alpha . \sin\varphi^2}}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha . \cos\varphi^2)^2}.$$

§. 200.

Integrirt man die Gleichung

$$ddL = d\varphi d\psi . \cos\psi . \sin\psi$$

nach ψ, so kommt

$$dL = \tfrac{1}{2}\, d\varphi . (\sin\psi^2 + C),$$

und da das Integral von $\psi = \psi'$ bis $\psi = \psi''$ genommen werden muſs, so erhält man

$$dL = \tfrac{1}{2}\, d\varphi . (\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2),$$

oder, wenn man den im vorigen §. gegebenen Werth von $\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2$ substituirt, so kommt

$$dL = 2\alpha\gamma . \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} . \frac{\sqrt{aa - \alpha\alpha . \sin\varphi^2} . d\varphi . \cos\varphi}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha . \cos\varphi^2)^2}.$$

Man setze der Kürze wegen

$$2\alpha\gamma . \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} = k^3,$$

so wie $\alpha . \sin\varphi = a . \sin\theta$, so läſst sich voriger Ausdruck so schreiben:

$$dL = k^3 . \frac{aa}{\alpha} . \frac{\cos\theta^2 . d\theta}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa . \sin\theta^2)^2}$$

$$= k^3 . \frac{aa}{\alpha} . \frac{1}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha + (\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa) . \tang\theta^2)^2} . \frac{d\theta}{\cos\theta^2}.$$

Man nehme nun

$$\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa)} . \tang\theta = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha} . \tang\lambda,$$

und man erhält durch Substitution dieses Werthes

$$dL = \frac{2aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}} \cdot d\lambda . \cos\lambda^2$$

$$L = \frac{aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}} \cdot [\mathrm{Const} + \lambda + \sin\lambda . \cos\lambda].$$

Was nun die Grenzen von λ betrifft, so müssen dieselben aus den Grenzen von φ abgeleitet werden. Diese letztern ergeben sich aus der Gleichung für $\sin\psi$ des vorigen §.; denn da an den Grenzen jeder Werth von φ nur einen Werth von ψ hervorbringen darf, so wird natürlicherweise in der angegebenen Gleichung das Glied mit dem doppelten Vorzeichen Null werden müssen, d. h. es ist $aa = \alpha\alpha . \sin\varphi^2$. Man hat also für die äufsersten Werthe von φ, $\sin\varphi = -\frac{a}{\alpha}$, $\sin\varphi = +\frac{a}{\alpha}$, und da wir aufserdem $\alpha . \sin\varphi = a . \sin\theta$ setzten, so werden die Werthe von $\sin\theta$, -1 und $+1$ seyn, d. h. θ ist zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten. Aus der Gleichung

$$\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} . \operatorname{tang}\theta = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha} . \operatorname{tang}\lambda$$

ergiebt sich aber, dafs λ zwischen denselben Grenzen, als θ, enthalten seyn mufs, folglich ist

$$L = \frac{\pi aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunkts der leuchtenden Kugel vom erleuchteten Element durch R, den Winkel, welchen die nach dem Mittelpunkt gezogene Linie mit demselben Element bildet, durch H, so hat man

$$\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha} = R, \quad \gamma = R . \sin H,$$

und hieraus ergiebt sich die Lichtmenge, welche das erleuchtete Element empfängt, indem man den früher vernachlässigten constanten Factor lds wieder hinzufügt,

$$= lds . \pi aa . \frac{\sin H}{RR}.$$

Also steht die Erleuchtung im directen Verhältnifs der Oberfläche der leuchtenden Kugel und des Sinus ihrer

Höhe über dem Horizont, und im umgekehrten quadratischen Verhältnifs der Entfernung.

§. 201.

Stellt die leuchtende Kugel die Sonne vor, und ist das erleuchtete Element ein Punkt der Oberfläche der Erde, so kann man noch fragen, wie grofs die Lichtmenge ist, welche innerhalb eines Tages auf diesen Punkt der Erdoberfläche fällt. Man mufs dann den vorigen Ausdruck

$$Ids\,.\,\pi aa\,.\,\frac{\sin H}{RR}$$

noch mit dem Element dt der Zeit multipliciren, und das Product zwischen den Grenzen der Zeit, während welcher die Sonne über dem Horizont steht, integriren. Wir berücksichtigen hierbei weder die Schwächung des Lichts in der Atmosphäre, noch die Zunahme oder Abnahme der Entfernung R, noch die Veränderung der Declination der Sonne während eines Tages, da die beiden letzten Argumente nur sehr geringe Einwirkung haben können, und der erste Umstand späterhin genauer betrachtet werden wird. Es sey (Fig. 27 b.) Z das Zenith des Orts, P der Pol, in S die Sonne, und wir bezeichnen

die Polhöhe des Orts durch p,
die Declination der Sonne - δ,
die Höhe der Sonne - H,
den Stundenwinkel ZPS - T,

so ist $ZP = 90^0 - p$, $SP = 90^0 - \delta$, $SZ = 90^0 - H$, und man erhält im Dreieck ZSP

$$\sin H = \sin p\,.\,\sin\delta + \cos p\,.\,\cos\delta\,.\,\cos T.$$

Da nun der Stundenwinkel so wie die Zeit gleichförmig wächst und abnimmt, so wird man den obern Ausdruck statt mit dt, auch mit dT multipliciren können, und man hat daher das Integral $\int \sin H\,.\,dT$, oder

$$\int(\sin\delta\,.\,\sin p\,.\,dT + \cos\delta\,.\,\cos p\,.\,\cos T\,.\,dT)$$

zu suchen. Dies giebt integrirt

$$\sin\delta\,.\,\sin p\,.\,T + \cos\delta\,.\,\cos p\,.\,\sin T.$$

Bezeichnet man durch T' den Stundenwinkel, welcher dann Statt findet, wenn die Sonne im Aufgang oder im Untergang begriffen ist, so muſs das vorige Integral zwischen den Grenzen $T = - T'$ und $T = + T'$ genommen werden, und man erhält die Lichtmenge, welche während eines Tages auf den Punkt der Erdoberfläche fällt,

$$= 2lds \cdot \frac{\pi aa}{RR} \cdot [\sin\delta . \sin p . T' + \cos\delta . \cos p . \sin T'].$$

Um den Winkel T' zu bestimmen, muſs man bemerken, daſs bei dem Aufgang und Untergang der Sonne die Höhe $H =$ Null wird; man erhält also aus der Gleichung

$$\sin H = \sin p . \sin\delta + \cos p . \cos\delta . \cos T$$

$$\cos T' = - \operatorname{tang}\delta . \operatorname{tang} p.$$

Setzt man die Lichtmenge für einen bestimmten Ort, die während des Tages auf denselben fällt, wo die Sonne im Aequator steht, $= L'$, so ist für diese Stellung der Sonne $T' = \frac{1}{2}\pi$, und man erhält allgemein die Lichtmenge:

$$= \frac{\sin\delta . \sin p . T' + \cos\delta . \cos p . \sin T'}{\cos p} \cdot L'.$$

Um eine Vergleichung in Zahlen zu haben, wollen wir das Verhältniſs der Lichtmengen für den längsten und den kürzesten Tag in Göttingen bestimmen. Die Declination der Sonne am längsten Tage sey $= + \varepsilon = 23^\circ 28'$, so ist sie am kürzesten $= - \varepsilon$, und setzen wir den Werth von T'

für den längsten Tag $= T''$

- - kürzesten - $= T^0$,

so wird das Verhältniſs beider Lichtmengen durch den Bruch

$$\frac{\cos\varepsilon . \cos p . \sin T'' + \sin\varepsilon . \sin p . T''}{\cos\varepsilon . \cos p . \sin T^0 - \sin\varepsilon . \sin p . T^0}$$

$$= \frac{\sin T'' + \operatorname{tang}\varepsilon . \operatorname{tang} p . T''}{\sin T^0 - \operatorname{tang}\varepsilon . \operatorname{tang} p . T^0}$$

ausgedrückt, und man erhält auſserdem:

$$\cos T'' = - \operatorname{tang} p . \operatorname{tang}\varepsilon$$

$$\cos T^0 = + \operatorname{tang} p . \operatorname{tang}\varepsilon.$$

Hieraus sieht man, daſs, wenn $T'' = \frac{1}{2}\pi + \xi$ gefunden wird, $T^0 = \frac{1}{2}\pi - \xi$ seyn muſs, und durch Substitution dieser Werthe wird obiges Verhältniſs

$$= \frac{\cot \xi + \frac{1}{2}\pi + \xi}{\cot \xi - \frac{1}{2}\pi + \xi}.$$

Man hat nun für Göttingen $p = 51^0\,32'$, und hieraus

$$\xi = 33^0\,7'\,20'' = 0{,}578092.$$

Der Werth des Verhältnisses ergiebt sich dann $= 6{,}818$.

§. 202.

Nehmen wir den Ausdruck (§. 192.) wieder vor, welcher die Lichtmenge angiebt, die von einem Element ds' einer leuchtenden Fläche auf das Element ds einer dunkeln Fläche fällt, nämlich:

$$ddL = \frac{lds\,.\,ds'\,.\sin\alpha\,.\sin\varepsilon}{rr},$$

wo α den Ausfluſswinkel und ε den Einfallswinkel des Strahls bedeutet, r die gegenseitige Entfernung beider Elemente von einander ist, so läſst sich diese Formel folgendermaſsen transformiren. Wenn wir die Lage des leuchtenden Elements durch Polarcoordinaten r, φ, ψ, die ihren Anfangspunkt in dem erleuchteten Element haben, bestimmen, so ist bekanntlich

$$ds' = \frac{rrd\varphi d\psi\,.\cos\psi}{\cos\theta},$$

wo θ der Winkel ist, welchen der Radius vector r mit der im leuchtenden Element errichteten Normale bildet; auſserdem haben wir schon gezeigt, daſs $\theta + \alpha = 90^0$ wird, also $\cos\theta = \sin\alpha$ ist, und hierdurch wird

$$ddL = lds\,.\,d\varphi\,.\,d\psi\,.\cos\psi\,.\sin\varepsilon.$$

Das Product $d\varphi\,.\,d\psi\,.\cos\psi$ ist aber nichts anders, als das Element der Oberfläche einer Kugel, die um das zu erleuchtende Element als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, welcher der Einheit gleich ist, beschrieben wird. Folglich wird das dunkle Element so erleuchtet, als ob der leuchtende Körper auf diese Kugel, vom dunklen Element aus gesehen, als bloſse Fläche projicirt wäre,

und daselbst jedes correspondirende Element mit demselben Glanz l, als der leuchtende Körper selbst, Licht ausstrahlte. Durch diesen Satz werden die Berechnungen der Lichtmengen sehr erleichtert.

Die Gleichung dieser Projection läfst sich nach §. 163. auffinden. Man sucht nämlich zuerst, wenn die Gleichung der leuchtenden Oberfläche zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegeben ist, die Gleichung desjenigen Kegels auf, welcher die leuchtende Fläche berührt, und dessen Spitze in dem dunkeln Element liegt. Dies geschieht dadurch, dafs man aus den drei Gleichungen (§. 163.)

$$Z = px + qy$$
$$xY = yX$$
$$xZ = zX,$$

in denen die Coordinaten der Spitze des Kegels ξ, η, ζ, für unsern besondern Fall, Null gesetzt worden sind, die Gröfsen x, y, z bestimmt, und sie in die Gleichung der Oberfläche des Körpers substituirt. Hierdurch erhält man die Gleichung des gedachten Kegels zwischen den Coordinaten X, Y, Z; dieser wird dann durch eine aus dem Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Kugeloberfläche geschnitten, d. h. man mufs die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

mit der vorigen verbinden, so erhält man die Gleichungen der Curve doppelter Krümmung, die sich auf der Kugeloberfläche bildet. Man sieht aber leicht, dafs derselbe Zweck erreicht wird, indem man statt der Coordinaten des Kegels X, Y, Z in seiner Gleichung die Werthe $X = \cos\varphi . \cos\psi$, $Y = \sin\varphi . \cos\psi$, $Z = \sin\psi$ substituirt, wodurch man die Gleichung der Projection auf die Kugeloberfläche zwischen den Polarcoordinaten φ, ψ erhält.

Ist z. B. der leuchtende Körper eine Kugel vom Halbmesser a, und sind α, β, γ die Coordinaten des Mittelpunkts parallel mit den drei Axen der x, y, z, so hat man

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = aa,$$

und wenn man differentiirt

$$dx.(x-\alpha) + dy.(y-\beta) + dz.(z-\gamma) = o$$

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$$

$$q = \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{y-\beta}{z-\gamma},$$

also erhält man die drei Gleichungen

$$z + \frac{x-\alpha}{z-\gamma}.x + \frac{y-\beta}{z-\gamma}.y = o,$$

$$xY = yX, \quad xZ = zX.$$

Zieht man die erste von der ursprünglichen Gleichung der Kugel ab, so bleibt

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - aa = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - aa = kk,$$

so erhält man aus diesen drei Gleichungen die Werthe von

$$x = \frac{kkX}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z}$$

$$y = \frac{kkY}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z}$$

$$z = \frac{kkZ}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z},$$

und substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Kugel, die sich auch so schreiben läſst:

$$xx + yy + zz - 2.(\alpha x + \beta y + \gamma z) = -kk,$$

so erhält man den Ausdruck

$$\frac{kk.(XX + YY + ZZ)}{(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2} = 1.$$

Substituirt man hierin statt X, Y, Z ihre Werthe $\cos\varphi.\cos\psi$, $\sin\varphi.\cos\psi$, $\sin\psi$, und setzt zugleich

$$\alpha = R.\cos\varphi'.\cos\psi'$$

$$\beta = R.\sin\varphi'.\cos\psi'$$

$$\gamma = R.\sin\psi'$$

$$a = R.\sin\omega,$$

wo R den Abstand des Mittelpunkts der leuchtenden

Kugel vom Anfangspunkt der Coordinaten, und ω ihren scheinbaren Durchmesser bedeutet; so erhält man

$$\cos\omega = \sin\psi . \sin\psi' + \cos\psi . \cos\psi' . \cos(\varphi - \varphi').$$

Da nun ω eine constante Gröfse ist, so folgt hieraus, dafs alle Punkte der Grenze der Projection einer Kugel gleich weit von einem Punkte entfernt sind, dessen Lage durch die Winkel ψ', φ' bestimmt wird. Die Projection ist also ein kleinerer Kreis, dessen Pol in dem besagten Punkte liegt.

§. 203.

Die in §. 200. angegebene Stärke der Erleuchtung eines dunkeln Elements von einer leuchtenden Kugel, $Idsaa \cdot \frac{\sin H}{RR}$, ist nur so lange anwendbar, als die ganze Kugel im Stande ist, Licht auf das dunkle Element zu werfen, oder, wenn wir die Sonne für die leuchtende Kugel substituiren, so lange der untere Sonnenrand den Horizont noch nicht erreicht hat. Dafs späterhin die Formel keine richtige Resultate mehr liefert, sieht man schon aus der Betrachtung eines besondern Falles. Denn setzt man z. B. $H = o$, so wird voriger Ausdruck Null, d. h. wenn der Mittelpunkt der Sonne im Horizont steht, sollte sie gar kein Licht mehr auf die Oberfläche des Orts der Erde werfen; allein dies ist unrichtig, weil diese Stelle noch von der halben über dem Horizont stehenden Sonnenscheibe erleuchtet werden kann. Es ist daher nöthig, zu untersuchen, wie sich in dem Fall das Gesetz der Erleuchtung verhält, wo ein Theil der Sonnenscheibe schon unter dem Horizont sich befindet. Zu diesem Zweck sey APB (Fig. 30.) die um das dunkle Element mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Kugelfläche, AB ein gröfster Kreis, der durch den Durchschnitt der Ebene des verlängerten dunkeln Elements entsteht, P sein Pol, C der Mittelpunkt des kleinen Kreises, welcher die Projection der Sonnenscheibe vorstellt, M irgend ein Element dieses leuch-

tenden Kreises, dessen Lage wir durch den Winkel $MCD = \varphi$ und den Bogen $MC = \psi$ bestimmen. Dann ist das Element der Fläche $= d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \sin\psi$. Durch C und M und den Pol P lege man die beiden gröſsten Kreise PD, PN, so wird MN den Einfallswinkel des vom Punkt M herkommenden Strahls bezeichnen, und setzt man $MN = \alpha$, $CD = H$, so hat man im sphärischen Dreieck MPC die Gleichung

$$\sin\alpha = \cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \cos\varphi.$$

Folglich ist die von dem leuchtenden Element auf das dunkle fallende Lichtmenge

$$= lds' . d\varphi . d\psi . \sin\psi . (\cos\psi . \sin H - \sin\psi . \cos H . \cos\varphi).$$

§. 204.

Man integrire diesen Ausdruck zuerst nach φ, so erhält man die Lichtmenge, welche von einem mit dem Halbmesser MC beschriebenen unendlich schmalen Ringe auf das Element fällt,

$$= lds' . d\psi . \sin\psi . [\varphi . \cos\psi . \sin H - \sin\psi . \cos H . \sin\varphi].$$

Um die Grenzen zu finden, zwischen welchen dies Integral genommen werden soll, bedenke man, daſs der Ring im Allgemeinen den Horizont AB zweimal schneidet, sich also zwei Werthe von φ ergeben, die sich aus der Gleichung

$$\sin\alpha = \cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \cos\varphi$$

ableiten lassen, indem man $\alpha = o$ setzt; dies giebt

$$\cos\varphi = \cot\psi \,.\, \tang H.$$

Bezeichnet man den aus dieser Gleichung sich ergebenden Werth von φ, durch φ', so muſs obiges Integral zwischen den Grenzen $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = 2\pi - \varphi'$ genommen werden. Hierdurch wird dasselbe

$$= 2lds' . d\psi . \sin\psi . [(\pi - \varphi') . \cos\psi . \sin H + \sin\psi . \cos H . \sin\varphi'].$$

Läſst man den Factor lds' vorerst unberücksichtigt, so hat man die Gröſse

$$2 . \sin H \int d\psi . \cos\psi . \sin\psi . (\pi - \varphi')$$
$$+ 2 . \cos H \int d\psi . \sin\psi^2 . \sin\varphi'$$

zu integriren, oder, wenn man den ersten Theil theilweise integrirt

$$\sin H . \sin \psi^2 . (\pi - \varphi') + \sin H \int \sin \psi^2 . d\varphi'$$
$$+ 2 . \cos H \int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi'.$$

§. 205.

Aus der Gleichung $\cos \varphi' = \cot \psi . \operatorname{tang} H$ erhält man ferner

$$\sin \varphi' = \sqrt{1 - \cot \psi^2 . \operatorname{tang} H^2}$$
$$d\varphi' = \frac{d\psi . \operatorname{tang} H}{\sin \psi^2 . \sqrt{1 - \cot \psi^2 . \operatorname{tang} H^2}}.$$

Man erhält durch Substitution dieser Werthe

$$\int \sin \psi^2 . d\varphi' = \operatorname{tang} H \int \frac{d\psi . \sin \psi}{\sqrt{1 - \frac{\cos \psi^2}{\cos H^2}}}$$

$$\int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi' = \int \left(d\psi . \sin \psi . \sqrt{1 - \frac{\cos \psi^2}{\cos H^2}} \right),$$

und wenn man noch $\cos \psi = \cos H . \cos \nu$ nimmt,

$$\int \sin \psi^2 . d\varphi' = \sin H \int d\nu = \nu . \sin H$$
$$\int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi' = \cos H \int d\nu . \sin \nu^2$$
$$= \tfrac{1}{2} . \nu . \cos H - \tfrac{1}{2} . \cos H . \sin \nu . \cos \nu.$$

Hierdurch wird also das ganze Integral

$$\sin H . \sin \psi^2 . (\pi - \varphi') + \nu - \cos H^2 . \sin \nu . \cos \nu.$$

Um die Grenzen dieses Integrals zu finden, beschreibe man mit CD einen Kreis, so sind die Grenzen von ψ, $\psi = CD$ und $\psi = CF$, d. h. wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \omega$ setzt, so muſs das Integral von $\psi = H$ bis $\psi = \omega$ genommen werden. Für $\psi = \omega$ wird dasselbe

$$\sin H . \sin \omega^2 . (\pi - \text{Arc.} \cos (= \cot \omega . \operatorname{tang} H))$$
$$+ \text{Arc.} \cos \left(= \frac{\cos \omega}{\cos H} \right) - \cos \omega . \sqrt{\cos H^2 - \cos \omega^2},$$

und für $\psi = H$ erhält man $\sin H^3 . \pi$, also, wenn man dies von dem vorigen Werth abzieht, so bliebe die von dem Ringe $GFHE$ herkommende Erleuchtung. Hierzu muſs aber noch die von dem innern Kreise entstehende Erleuchtung addirt werden; diese ist nach §. 200., wenn

man bedenkt, dafs $\frac{a}{R}$ in der dortigen Formel der scheinbare Halbmesser der Kugel ist, $= \pi . \sin H^3$, also braucht man von obigem Ausdruck nichts abzuziehen. Setzt man $H = o$, so bleibt

$$\omega - \sin \omega . \cos \omega,$$

welches die Erleuchtung ist, wenn die Sonne noch halb über dem Horizont sich befindet. Da der Winkel ω bei der Sonne sehr klein ist, so kann man

$$\omega = \sin \omega + \tfrac{1}{6} . \sin \omega^3$$

$$\sin \omega . \cos \omega = \sin \omega - \tfrac{1}{2} . \sin \omega^3$$

setzen, wodurch die von der über dem Horizont stehenden Halbkugel der Sonne hervorgebrachte Erleuchtung $= \frac{2}{3} . \sin \omega^3$ gefunden wird. Da nun die von der ganzen Sonne herkommende Erleuchtung $= \pi . \sin \omega^3$ ist, so verhalten sich beide, wie $\pi : \frac{2}{3} = 1 : 0{,}212$.

§. 206.

Das Licht, welches auf eine dunkle Fläche fällt, erleidet bei diesem Auftreffen mancherlei Modificationen. Ein Theil des Lichts wird wieder zurückgeworfen, und der andere dringt in den Körper ein. Ist die Oberfläche selbst polirt, so mufs das zurückgeworfene Licht wieder in zwei Klassen getheilt werden, nämlich in das regelmäfsig zurückgeworfene oder katoptrische Licht, welches uns die Bilder der Gegenstände zeigt, und in das unregelmäfsig zurückgeworfene oder zerstreute Licht, welches uns die Oberfläche der Körper sichtbar macht. Je weniger polirt die Oberfläche der Körper ist, desto gröfser ist das Verhältnifs des letztern zurückgeworfenen Lichts zum erstern. Das in den Körper eingedrungene Licht läfst sich bei durchsichtigen Körpern ebenfalls in zwei Klassen zerlegen, indem ein Theil desselben nach regelmäfsigen Gesetzen durch den Körper hindurchgeht, das sogenannte dioptrische Licht, ein anderer hingegen im Körper selbst gleichsam verschluckt und für unsere Sinne verloren geht.

Hier, wo wir uns blofs mit der Erleuchtung im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf das regelmäfsig zurückgeworfene und durchgelassene Licht, welches in die Katoptrik und die Dioptrik gehört, beschäftigen, kann uns nur das Licht interessiren, welches von unpolirten Oberflächen zurückgeworfen wird. Dafs sich dieses Licht nach allen Seiten hin von einem Element aus verbreitet, sieht man leicht ein, indem die Oberfläche eines Körpers von jedem Standpunkt aus sichtbar ist, wo sich auch der Körper, von welchem sie erleuchtet wird, befinden mag. Dafs ferner ein solcher erleuchteter Körper auch wieder Erleuchtung hervorbringen kann, zeigt uns am deutlichsten der Mond, welcher, als eine dunkle Kugel, sein Licht von der Sonne erhält; auch die Atmosphäre giebt uns ein Beispiel der Erleuchtung durch zerstreutes Licht, indem die Lufttheilchen einen Theil des einfallenden Sonnenlichts nach allen Seiten hin zerstreuen, und hierdurch auch an den Stellen der Erdoberfläche, wo die Sonne nicht gradezu hinscheinen kann, eine ziemlich bedeutende Helligkeit hervorbringen.

§. 207.

Wir wollen nun näher untersuchen, nach welchen Gesetzen die Erleuchtung von einem an sich dunkeln Körper vermittelst des zerstreuten Lichts vor sich geht. Zuerst können wir als Grundsatz aufstellen, dafs das Licht von jedem Element aus nach allen Seiten hin ausströmt, und dafs die Dichtigkeit dieses Lichts ebenfalls sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Element verhält. Zweitens dürfen wir wohl annehmen, dafs, wenn ein Element m mal mehr Licht empfängt, als ein anderes, selbiges auch nach derselben Richtung m mal mehr zerstreutes Licht zurückwerfen wird, vorausgesetzt, dafs beide Elemente Oberflächen von gleicher physischer Beschaffenheit zugehören, so dafs also auch hierbei die ausströmende Lichtmenge dem absoluten

Glanze proportional gesetzt werden mufs. Endlich mufs man noch berücksichtigen, nach welchem Gesetze das Ausströmen des Lichts unter verschiedenen Ausflufswinkeln Statt findet. Dies läfst sich durch folgenden Versuch, den man leicht anstellen kann, entscheiden. Man nehme eine kleine Fläche, z. B. ein Stückchen weifses Papier, welches von irgend einem Körper beleuchtet wird, und betrachte dasselbe unter verschiedenen Winkeln, indem das Auge senkt und erhebt, so wird man finden, dafs die scheinbare Klarheit des Papiers unter jedem Winkel dieselbe bleibt. Nun sey AB (Fig. 29.) dieses Stück Papier, $ABCD$, $ABEF$ zwei Lichtbündel, von denen das erste unter einem rechten Winkel, das zweite unter dem Winkel BHE ausströmt, ϱ die Dichtigkeit des Lichts in $ABCD$, ϱ' die Dichtigkeit des Lichts in $ABEF$, so verhalten sich die Lichtmengen in diesen beiden Strahlenbündeln, die wir durch L, L' bezeichnen, wie

$$L : L' = AB \,.\, \varrho : AB \,.\, \varrho'$$
$$= AB \,.\, \varrho : GH \,.\, \varrho'.$$

Dem Auge erscheint die Fläche AB, in der Richtung EA gesehen, unter der Gröfse KH, und zwar mit demselben scheinbaren Glanze als AB, also ist die Lichtmenge, welche KH zu haben scheint, $= KH \,.\, \varrho$, und da der Durchschnitt KH dieselbe Lichtmenge hat, als GH, so wird $KH \,.\, \varrho = GH \,.\, \varrho'$, und obige Proportion wird

$$L : L' = AB : KH$$
$$= GH : KH$$
$$= 1 : \sin BAE,$$

folglich findet auch hier dasselbe Gesetz Statt, wie bei selbstleuchtenden Körpern, dafs die Lichtmenge mit dem Sinus des Ausflufswinkels abnimmt.

Wir sehen hieraus, dafs bei der Berechnung der Erleuchtung, welche dunkle Körper geben, die mit erborgtem Licht glänzen, dieselben Formeln angewendet werden können, die für selbstleuchtende Körper gebraucht werden.

§. 208.

Als ein hierher gehöriges Beispiel wollen wir die Erleuchtung berechnen, welche der Mond einem bestimmten unendlich kleinen Stück der Erdoberfläche mittheilt. Der Mond ist eine dunkle Kugel, welche ihr Licht von der Sonne erhält; folglich wird die Lichtmenge, welche einem Element seiner Oberfläche von der Sonne mitgetheilt wird, durch die Formel (§. 200.)

$$lds\,.\,\pi aa\cdot\frac{\sin H}{RR}$$

ausgedrückt werden, wo ds das Element der Mondsoberfläche, H die Höhe des Mittelpunkts der Sonne über dem Horizont des Elements, a den Halbmesser der Sonne, und R den Abstand des Elements vom Mittelpunkt der Sonne bedeutet. Setzt man, wie schon öfter geschehen ist, den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \omega$, so ist $a = R\,.\sin\omega$, und die Lichtmenge

$$= l\pi\,.\sin\omega^2\,.\sin H\,.\,ds.$$

Nun ist freilich der Winkel ω, streng genommen, für alle Elemente der Mondsoberfläche nicht von einerlei Werth, allein wegen der ungeheuern Entfernung der Sonne in Vergleich mit den Dimensionen des Mondes, dürfen wir uns ohne merklichen Fehler erlauben, denselben als völlig constant anzusehen. Die Gröfse $l\pi\,.\sin\omega^2\,.\sin H\,.\,ds$, würde nun die absolute Lichtmenge seyn, welche das Element ds empfängt, und dieser wiederum die senkrecht ausfliefsende Lichtmenge gleich gesetzt werden müssen, wenn kein Licht von der Materie des Mondes verschluckt würde. Da nun aber dieser letzte Umstand jedenfalls eintritt, so müssen wir noch eine Gröfse n als Factor hinzufügen, so dafs die senkrecht ausfliefsende Lichtmenge durch

$$nl\pi\,.\sin\omega^2\,.\sin H\,.\,ds$$

ausgedrückt wird. Obgleich nun wohl die Gröfse n von der physischen Beschaffenheit der Materie des Mondes, wo das Element ds grade liegt, abhängt, und wie man leicht sieht, desto kleiner wird, je mehr die Materie

zum Lichtverschlucken geneigt ist, und wirklich eine solche Verschiedenheit an der Mondsoberfläche Statt findet, wie man aus den hellern und dunklern Stellen desselben erkennt, so betrachten wir dieselbe doch als constant, da sich diese Gröſse schwerlich als eine Function der Coordinaten der Mondsoberfläche wird ausdrücken lassen.

§. 209.

Wir bezeichnen ferner die Gröſse des Elements der Erdoberfläche durch $d\sigma$, den Ausfluſswinkel des Strahls durch α, den Einfallswinkel durch ε, die Entfernung des Elements der Mondsoberfläche von dem zu erleuchtenden durch r, den Abstand des letzten Elements vom Mittelpunkt des Monds durch A, so hat man für die auf das Element fallende Lichtmenge den Ausdruck

$$nld\sigma \,.\, \pi \,.\, \sin \omega^2 \cdot \frac{\sin H \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \varepsilon}{rr} \cdot ds,$$

welcher zwischen den gehörigen Grenzen für den ganzen erleuchteten Theil des Mondes integrirt werden muſs.

Es sey (Fig. 31.) APB die Mondskugel, C ihr Mittelpunkt. Man lege durch den Mittelpunkt des Mondes, den Mittelpunkt der Sonne und das Element der Erdoberfläche eine Ebene, die die Mondskugel in dem gröſsten Kreise AB schneidet, so wird die vom Mittelpunkt des Mondes nach dem Mittelpunkt der Sonne gezogene Gesichtslinie die Mondsoberfläche in diesem gröſsten Kreise, z. B. im Punkt S, treffen. Für ein Element der Mondsoberfläche, welches in diesem Punkt sich befindet, würde die Höhe $H = 90^0$ werden.

§. 210.

Da die Sonne eine so groſse Entfernung vom Monde besitzt, so werden wir ferner ohne merklichen Fehler zur groſsen Erleichterung der Rechnung annehmen dürfen, es werde immer genau die Halbkugel des Mondes erleuchtet. Nimmt man dann $SD = 90^0$ und zieht den gröſsten Kreis PDQ, so ist PDQ die Erleuchtungsgrenze, und für alle auf diesem Kreise liegende

Elemente erscheint die Sonne im Horizont, also wird für sie die Höhe $H = o$. Die Fläche $PBDQ$ ist dann der erleuchtete Theil des Mondes auf der Halbkugel $APBQ$, und nehmen wir an, daſs $APBQ$ derjenige gröſste Kreis ist, welcher entsteht, indem die Mondskugel durch eine senkrecht auf der vom Erdoberflächen-Element nach dem Mittelpunkt des Monds gezogenen Gesichtslinie stehende Ebene geschnitten wird, so ist $PBDQ$ die von der Erde aus gesehene Mondsphase. Halbirt man AB in E, so wird die zuletzt erwähnte Gesichtslinie die Oberfläche des Mondes in E treffen. Es ist zu bemerken, daſs wir uns hierbei die Voraussetzung gestatten, man könne von der Erde aus die Halbkugel des Mondes übersehen, welches zwar nicht genau richtig, allein wegen der bedeutenden Entfernung der Erde vom Monde gegen den Halbmesser des Mondes doch zulässig ist.

§. 211.

Es sey M irgend ein Element der erleuchteten Fläche des Mondes, so sieht man leicht, daſs für diesen Punkt die Höhe der Sonne $= NM$ wird, welchen Bogen man findet, indem man durch S und M einen Bogen eines gröſsten Kreises bis zur Erleuchtungsgrenze legt. Man ziehe den Bogen PMR, so hat man

$$\cos MS = \cos RS . \cos MR.$$

Bestimmt man nun die Lage des Punktes M durch die Bogen $MR = \psi$, $BR = \varphi$, und die Gröſse der Mondesphase durch den Bogen $SB = \gamma$, bemerkt man ferner, daſs $NM + MS = H + MS = 90^0$, so hat man

$$\sin H = \cos \psi . \cos (\varphi - \gamma)$$

$$= a' a' d\varphi . d\psi . \cos \psi,$$

wo a' den Halbmesser des Mondes bedeutet. Ist ferner in T die Erde, so hat man $CMT = 90^0 + \alpha$. Nun ist, mit Vernachlässigung der geringen Parallaxe, $MCT = 180^0 - CMT = 90^0 - \alpha$. Verbindet man M und E durch den Bogen eines gröſsesten Kreises ME, so ist auch $ME = 90^0 - \alpha$. Das Dreieck

MRE giebt nun $\cos ME = \cos MR \,.\, \cos RE$, und da $RE = 90^0 - BR = 90^0 - \varphi$, $MR = \psi$, so kommt

$$\sin \alpha = \sin \varphi \,.\, \cos \psi.$$

Was nun endlich den Einfallswinkel ε betrifft, so können wir denselben als constant betrachten, und zwar dem Einfallswinkel gleich setzen, den ein Strahl besitzt, welcher vom Mittelpunkt des Mondes herkommt, so daſs also dieser Einfallswinkel ε nichts anders ist, als die Höhe des Mittelpunkts des Mondes über dem Horizont des Orts der Erdoberfläche.

§. 212.

Substituiren wir alle diese Werthe in den Ausdruck (§. 209.)

$$n l d\sigma \,.\, \pi \,.\, \sin \omega^2 \cdot \frac{\sin H \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \varepsilon}{rr} \cdot ds,$$

so erhält man

$$k d\sigma \,.\, \cos \psi^3 \,.\, \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi d\psi,$$

indem man der Kürze wegen

$$n l \pi \,.\, \sin \omega^2 \,.\, \sin \varepsilon \cdot \frac{a'a'}{AA} = k$$

setzt. Integrirt man zuerst nach ψ, so ist

$$\int d\psi \,.\, \cos \psi^3 = \sin \psi - \tfrac{1}{3} \,.\, \sin \psi^3,$$

und wie man aus der Figur sieht, muſs dies Integral von $\psi = -\tfrac{1}{2} \,.\, \pi$ bis $\psi = +\tfrac{1}{2} \,.\, \pi$ ausgedehnt werden. Dies giebt

$$\sin \psi - \tfrac{1}{3} \,.\, \sin \psi^3 = \tfrac{4}{3},$$

folglich wird obige Formel nach der ersten Integration

$$\tfrac{4}{3} \,.\, k d\sigma \,.\, \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi.$$

Nun wird aber

$$\int \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi$$
$$= \cos \gamma \int \cos \varphi \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi + \sin \gamma \int \sin \varphi^2 \,.\, d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \cos \gamma \,.\, \sin \varphi^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, \sin \gamma \,.\, (\varphi - \sin \varphi \,.\, \cos \varphi).$$

Die Grenzen der Integration sind hierbei, wenn B den westlichen Mondsrand bedeutet, und der Mond im Zunehmen ist, $\varphi = o$ und $\varphi = \tfrac{1}{2} \,.\, \pi + \gamma$, und zwischen diesen Grenzen wird das Integral

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \sin \gamma \,.\, (\tfrac{1}{2} \,.\, \pi + \gamma) + \tfrac{1}{2} \,.\, \cos \gamma,$$

also haben wir die ganze Erleuchtung

1) $L = \frac{2}{3} . kd\sigma . [(\frac{1}{2} . \pi + \gamma) . \sin \gamma + \cos \gamma]$.

Für den Neumond ist $\gamma = - \frac{1}{2} . \pi$, also $L = o$,

- das erste Viertel - $\gamma = o$, - $L = \frac{2}{3} . kd\sigma$,

- den Vollmond - $\gamma = + \frac{1}{2} . \pi$; - $L = \frac{2}{3} . kd\sigma\pi$.

Nach dem Vollmond ist aber die Formel nicht richtig, weil dann die Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = (\frac{1}{2} . \pi + \gamma)$ nicht mehr gelten, indem von $\varphi = o$ bis zu $\gamma - \frac{1}{2} . \pi$ die Mondsoberfläche dunkel ist. Man mufs dann das Integral

$$\frac{1}{2} . \cos \gamma . \sin \varphi^2 + \frac{1}{2} . \sin \gamma . (\varphi - \sin \varphi . \cos \varphi)$$

zwischen den Grenzen $\varphi = \gamma - \frac{1}{2} . \pi$ und $\varphi = \pi$ nehmen. Hierdurch wird selbiges

$$= \frac{1}{2} . \sin \gamma . (\frac{3}{2} . \pi - \gamma) - \frac{1}{2} . \cos \gamma,$$

folglich der Ausdruck der Erleuchtung

2) $L = \frac{2}{3} . kd\sigma . [\sin \gamma . (\frac{3}{2} . \pi - \gamma) - \cos \gamma]$.

Man sieht übrigens leicht, dafs $\gamma + \frac{1}{2} . \pi$ die Elongation des Mondes von der Sonne bedeutet. Bezeichnet man den scheinbaren Halbmesser des Monds durch ω', so wird $\frac{a'}{A} = \sin \omega'$, und der Werth von k läfst sich auch so schreiben:

$$k = nl\pi . \sin \varepsilon . \sin \omega^2 . \sin \omega'^2$$

§. 213.

Wir haben bisher immer nur von der Lichtmenge oder Erleuchtung gesprochen, die ein Körper von dem andern erhält, ohne weiter darauf zu achten, wie die Helligkeit und der Glanz der leuchtenden Körper unserm Auge erscheint, oder welchen scheinbaren Glanz die Körper besitzen, sie mögen selbstleuchtend oder erleuchtet seyn; im letztern Fall pflegt man statt scheinbaren Glanz auch scheinbare Klarheit zu setzen. Ohne uns hierbei auf eine genaue Berechnung des Weges der Strahlen durch die verschiedenen Flüssigkeiten, welche das Auge erhält, einzulassen, da diese in die Dioptrik gehört, brauchen wir bei vorliegenden Untersuchungen nur anzunehmen, dafs das Licht, welches

von einem Punkte ins Auge kommt, bloſs durch die Pupille oder den Stern in dasselbe gelangen kann, und daſs also unter sonst gleichen Umständen und gleicher Lage des Punkts, welcher Licht in das Auge schickt, die einfallende Lichtmenge und die daher rührende gröſsere oder mindere Klarheit mit der Gröſse der Pupille zu- und abnimmt. Ferner können wir als richtig voraussetzen, daſs die Gröſse des Bildes einer unendlich kleinen Linie auf der Netzhaut, dem Gesichtswinkel, unter welchem diese Linie erscheint, proportional ist.

§. 214.

Zuerst wollen wir untersuchen, in wie fern die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkt ins Auge gelangt, von der Entfernung desselben und von seiner Lage gegen die Gesichtsaxe abhängt (§. 40.). Hierbei betrachten wir die Pupille als einen Kreis, dessen Halbmesser $= a$ gesetzt wird, und aus §. 187. haben wir die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkt auf das Element einer ebenen Fläche fällt,

$$= \frac{lh \,.\, r dr d\varphi}{\sqrt{(mm + hh + rr - 2mr \,.\, \cos\varphi)^3}},$$

wo die Integrationen von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$, und von $r = o$ bis $r = a$ ausgeführt werden müssen. Die Länge des Perpendikels, welches vom leuchtenden Punkt auf die Ebene gefällt ist, wird durch h, und der Abstand des Fuſspunkts des Perpendikels vom Mittelpunkt des Kreises wird durch m ausgedrückt. Setzt man also die Entfernung des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt der Pupille $= R$, und die Neigung dieser Linie gegen die Gesichtsaxe $= \theta$, so hat man

$$m = R \,.\, \sin\theta, \quad h = R \,.\, \cos\theta,$$

und voriger Ausdruck läſst sich auch so schreiben:

$$l \,.\, R \,.\, \cos\theta \cdot \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{(RR + rr - 2Rr \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta)^3}}.$$

Da nun im Allgemeinen R gegen r als sehr groſs betrachtet werden kann, so dürfen wir das Radical in

eine Reihe entwickeln, in welcher alle Potenzen von $\frac{r}{R}$, welche die zweite übersteigen, vernachlässigt werden können. Man hat dann

$$(RR + rr - 2Rr \cdot \cos\varphi \cdot \sin 6)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3}$$

$$+ \frac{1}{R^3} \cdot \left(3 \cdot \frac{r}{R} \cdot \cos\varphi \cdot \sin 6 - \tfrac{3}{2} \cdot \frac{rr}{RR}\right) + \tfrac{15}{2} \cdot \frac{rr}{R^5} \cdot \sin 6^2 \cdot \cos\varphi^2.$$

Multiplicirt man dies mit $d\varphi$ und integrirt von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$, so kommt

$$\frac{2\pi}{R^3} - \frac{3rr}{R^5} \cdot \pi + \tfrac{15}{2} \cdot \frac{rr}{R^5} \cdot \pi \cdot \sin 6^3.$$

Dieser Ausdruck mit rdr multiplicirt und integrirt giebt, da die Grenzen $r = o$ und $r = a$ sind,

$$\frac{\pi}{R^3} \cdot aa \cdot \left[1 - \tfrac{3}{4} \cdot \frac{aa}{RR} + \tfrac{15}{8} \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \sin 6^2\right].$$

Hierzu füge man noch den Factor $lR \cdot \cos 6$, so kommt die Lichtmenge, welche durch die Pupille einfällt,

$$L = l \cdot \cos 6 \cdot \frac{aa\pi}{RR} \cdot \left[1 - \tfrac{3}{4} \cdot \frac{aa}{RR} + \tfrac{15}{8} \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \sin 6^2\right].$$

§. 215.

Vernachlässigt man noch die beiden Glieder $-\tfrac{3}{4} \cdot \frac{aa}{RR} + \tfrac{15}{8} \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \sin 6^2$, von denen vorzüglich das letzte immer sehr klein ausfallen wird, da man gewöhnlich nur solche Punkte genau beachtet, welche der Gesichtsaxe nahe liegen, für die also 6 immer sehr klein ausfällt, so bleibt

$$L = l \cdot \cos 6 \cdot \frac{aa\pi}{RR}.$$

Nun ist aber $aa\pi$ die Fläche der Pupille, also wird die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkt ins Auge fällt, dem Cosinus des Winkels, den die nach dem leuchtenden Punkt gezogene Gesichtslinie mit der Gesichtsaxe bildet, so wie der Fläche der Oeffnung der Pupille direct, und dem Quadrat der Entfernung um-

gekehrt proportional. Dieser Satz findet bei allen leuchtenden Gegenständen Statt, von welchen wir einzelne Theile nicht mehr unterscheiden können, wie dies z. B. bei den Fixsternen Statt findet, deren scheinbarer Glanz umgekehrt, wie das Quadrat ihrer Entfernung vom Auge, abnimmt. Wir bemerken noch, daſs die in voriger Formel angegebene Lichtmenge zu groſs ist, weil wir keine Rücksicht darauf genommen haben, daſs nicht alles auf das Auge fallende Licht in dasselbe eindringt, indem ein Theil desselben, wie von allen andern Körpern, theils regelmäſsig zurückgeworfen, theils zerstreut wird. Dieser Umstand hat aber auf unsere Schlüsse keinen weitern Einfluſs, indem der Lichtverlust immer der einfallenden Lichtmenge proportional ist, wir also nur in den vorigen Ausdrücken statt l, nl zu setzen brauchen, wo n eine constante Gröſse und kleiner als 1 ist, mithin die Sache darauf hinaus kommt, als ob die absolute Intensität des Lichts, das vom leuchtenden Punkt ausgeht, statt l, nl gewesen, also im Verhältniſs des Lichtverlustes vermindert wäre.

§. 216.

Ist der leuchtende Gegenstand eine ausgedehnte Fläche, so ist nach §. 192. die Lichtmenge, welche von einem Element ds' des leuchtenden Körpers auf ein Element ds der Oberfläche der Pupille fällt,

$$= \frac{lds \,.\, ds' \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \varepsilon}{rr}.$$

Da die Dimensionen der Pupille sehr klein sind, so wird es ohne merklichen Fehler erlaubt seyn, anzunehmen, der Ausfluſswinkel α sey für alle von einem Punkte der leuchtenden Fläche auf die Pupille fallende Strahlen gleich groſs, und zwar demjenigen gleich, welchen ein auf die Mitte der Pupille fallender Strahl bildet. Wir dürfen also für ein bestimmtes Element des leuchtenden Gegenstandes α als constant betrachten, und die ganze vom Element ds' auf die Pupille fallende Lichtmenge wird durch

$$lds' . \sin \alpha . \int \frac{ds . \sin \varepsilon}{rr}$$

angegeben. Statt des Integrals können wir die im vorigen Paragraph entwickelte Gröſse

$$\cos \beta \cdot \frac{aa\pi}{RR}$$

setzen, wodurch die Lichtmenge

$$= lds' . \sin \alpha . \cos \beta . \pi . \frac{aa}{RR}$$

wird. Die Gröſse des Bildes, welches von dem Element auf der Netzhaut entsteht, sey $= d\Sigma$, so findet man die Dichtigkeit des Lichts, indem die gesammte Lichtmenge durch die Gröſse dieses Elements dividirt wird,

$$= l . \sin \alpha . \cos \beta . \pi \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \frac{ds'}{d\Sigma},$$

und diese Dichtigkeit des Lichts auf einer bestimmten Stelle der Netzhaut ist nothwendig der Ausdruck des scheinbaren Glanzes des leuchtenden Elements. Es kommt nun bloſs noch darauf an, das Verhältniſs $\frac{ds'}{d\Sigma}$ auszudrücken. Hierzu sey L der Mittelpunkt der Pupille (Fig. 28.), CB ein Element $= ds'$, $AB = d\sigma$ ein unendlich kleines Element einer Kugeloberfläche, welches mit CB zwischen gleichen Gesichtsgrenzen eingeschlossen ist; da ferner unserer vorigen Bezeichnung zufolge $AL = LB = R$, so wird der Gesichtswinkel jeder Linie $d\lambda$, die in diesem Kugelstück gezogen werden kann, gleich $\frac{d\lambda}{R}$ seyn, und die Gröſse der Linie auf der Netzhaut läſst sich durch $\frac{fd\lambda}{R}$ (§. 213.) ausdrücken, wo f eine Gröſse ist, die für alle Aenderungen von $d\lambda$ und R gleich bleibt und nur von β abhängt. Da sich nun bekanntlich die Flächen verhalten, wie die Quadrate homologer Linien, so folgt hieraus, daſs

$$d\sigma : d\Sigma = d\lambda^2 : f^2 \cdot \frac{d\lambda^2}{R^2}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$d\Sigma = \frac{d\sigma \, . \, ff}{RR}.$$

Aus der Lehre der Projectionen ist aber bekannt, daſs $CB . \sin ACB = AB$, oder $ds' . \sin \alpha = d\sigma$, folglich wird

$$d\Sigma = \frac{ff}{RR} \cdot ds' \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{ds'}{d\Sigma} = \frac{RR}{ff} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Setzt man diesen Werth des Verhältnisses in den Ausdruck

$$l . \sin \alpha . \cos \beta . \pi \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \frac{ds'}{d\Sigma},$$

so erhält man den scheinbaren Glanz des Elements

$$= l . \cos \beta . \pi \cdot \frac{aa}{ff},$$

also eine Gröſse, die von der Entfernung R ganz unabhängig ist. Würde daher z. B. die Sonne zweimal weiter von der Erde entfernt, so würde sie doch ein eben so blendendes Licht besitzen, als sie bei der einfachen Entfernung hat. Hierbei wird freilich vorausgesetzt, daſs das Licht auf seinem Wege keine Schwächung erleidet, die davon abhängt, daſs dasselbe sich durch einen nicht vollkommen durchsichtigen Körper bewegt. Findet dieser Umstand Statt, so tritt eine wirkliche Abnahme des scheinbaren Glanzes ein, wie man dies z. B. bei irdischen Gegenständen bemerkt, die in der Entfernung minder klar, als in der Nähe, erscheinen.

§. 217.

Sieht man durch eine dünne Glasplatte einen Gegenstand, so erscheint derselbe, wenn das Glas rein ist, nur unmerklich weniger klar, als mit dem bloſsen Auge; allein vermehrt man die Anzahl der Glasplatten, so bemerkt man augenscheinlich eine bedeutende Verminderung in der Stärke des Lichts, die bei einer hinreichenden Dicke des Glases so weit gehen kann, daſs das Auge gegen das geringe übrig bleibende Licht ganz

unempfindlich wird, und das Glas als undurchsichtiger Körper wirkt. Diese allmälige Schwächung des Lichts können wir nur daraus erklären, dafs wir annehmen, die einzelnen Körpertheilchen ziehen theils das Licht an sich und vernichten es gleichsam, theils zerstreuen sie dasselbe unregelmäfsig. Gesetzt nun, ein Lichtstrahl durchlaufe in einem solchen nicht vollkommen durchsichtigen Körper einen unendlich kleinen Weg $= ds$, so wird er desto mehr an Stärke verlieren, je mehr Körpertheilchen derselbe auf diesem Wege antrifft, und wir sind jedenfalls berechtigt, anzunehmen, dafs der Lichtverlust der Anzahl der angetroffenen Körpertheilchen direct proportional sey, so dafs eine n mal gröfsere Anzahl auch einen n mal gröfsern Verlust hervorbringt. Enthält aber ein Körper in demselben Raum eine n mal so grofse Anzahl Körpertheilchen, als ein anderer, so legen wir demselben auch eine n mal so grofse Dichtigkeit bei. Wir können also annehmen, der Lichtverlust beim Durchgange durch Körper von übrigens gleicher chemischer Constitution sey der Dichtigkeit proportional. Wenn nun aber statt des Weges ds der Weg $m.ds$ betrachtet wird, so sieht man leicht, dafs unter sonst gleichen Umständen die Lichtschwächungen auf den Wegen ds und $m.ds$ sich wie $1 : m$ verhalten müssen, d. h. der Lichtverlust ist auch dem Wege proportional. Ferner ist noch zu bemerken, dafs eine p fache Lichtmenge auch den p fachen Verlust der einfachen Lichtmenge erleiden mufs, folglich ist der Lichtverlust auch noch der Lichtmenge proportional, und da die Dichtigkeit des Lichts mit der Lichtmenge bei gleichem Durchschnitt des Lichtstrahls auch in gleichem Verhältnifs steht, so dürfen wir statt der Lichtmenge auch die Dichtigkeit des Lichts setzen. Bezeichnen wir also

die Dichtigkeit des Lichts durch ϱ,
die Dichtigkeit des Körpers - Δ,
das Element des Weges - ds,

so wird die Gleichung

$$d\varrho = - N\varrho\Delta ds$$

Statt finden, wo N eine Constante ist, die für jeden lichtverschluckenden Körper aus Beobachtungen bestimmt werden muſs. Aus voriger Gleichung wird

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds,$$

und ist Δ in der ganzen Ausdehnung des Weges constant, so wird die Gleichung integrabel, und sie giebt, wenn man durch ϱ' die anfängliche Dichtigkeit des Lichts für $s = o$ bezeichnet,

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - N\Delta s$$

$$\varrho = \varrho' . e^{- N\Delta s.}$$

§. 218.

Die Gröſse $N\Delta$ giebt zugleich ein Maaſs der Durchsichtigkeit an; sagen wir z. B., ein Körper sey p mal durchsichtiger, als ein anderer, wenn ein Lichtstrahl den p fachen Weg durchlaufen hat, ehe er in demselben Maaſse geschwächt ist, so muſs der Factor $N\Delta$ für den p mal so durchsichtigen Körper p mal kleiner seyn. So wird z. B. im Meerwasser das Licht nach einem Wege von 1,6 Toisen im Verhältniſs von 3 : 2 vermindert, und hieraus findet sich

für Meerwasser, $N\Delta = 0{,}2535$.

In der Luft von der Dichtigkeit, wie sie an der Oberfläche der Erde Statt findet, kann das Licht einen Weg von 4000 Toisen durchlaufen, ehe es in dem Verhältniſs von 5 : 4 vermindert wird; man erhält also

für Luft, $N\Delta = 0{,}0000558$.

Die Luft wäre also hiernach $\frac{0{,}2535}{0{,}0000558} = 4543$ mal durchsichtiger als das Meerwasser.

§. 219.

Das auf diese Art gefundene Durchsichtigkeitsverhältniſs richtet sich aber, selbst bei Körpern, die aus

einerlei Materie bestehen, nach der verschiedenen Dichtigkeit, die der Körper vielleicht zufälligerweise hat, bezieht sich also auf den so eben Statt findenden Zustand der verglichenen Körper, weswegen man dasselbe das relative Durchsichtigkeitsverhältniſs nennen kann. Man kann nun aber eben so nach dem absoluten oder specifischen Durchsichtigkeitsverhältniſs fragen, welches bloſs von der Kraft der Körpertheilchen, das Licht zu binden und im Innern des Körpers zu zerstreuen, abhängt. Man muſs dann die gefundenen Werthe von $N\Delta$ durch die bekannte Dichtigkeit oder das specifische Gewicht des untersuchten Körpers dividiren, wodurch man den Werth von N erhält, dem die specifische Durchsichtigkeit umgekehrt proportional ist. Nimmt man das specifische Gewicht des destillirten Wassers als Einheit an, so erhält man für das specifische Gewicht

des Meerwassers $= 1{,}03$,
der Luft $= 0{,}00128$,

also, wenn man die im vorigen §. gefundenen Werthe von $N\Delta$ nimmt,

für Meerwasser, $N = 0{,}246$;
für Luft, $N = 0{,}0435$;

hieraus folgt, daſs die specifische Durchsichtigkeit der Luft $\frac{0{,}246}{0{,}0435} = 5{,}651$ mal gröſser ist, als die des Meerwassers. Würde man also die Luft bis zu der Dichtigkeit des Meerwassers zusammenpressen, so könnte das Licht in der so verdichteten Luft, vorausgesetzt, daſs ihre chemische Constitution sich nicht änderte, einen ungefähr fünf und zwei Drittel mal gröſsern Weg zurücklegen, als im Meerwasser, ehe es in gleichem Grade geschwächt würde.

§. 220.

Geht das Licht nicht durch eine continuirliche durchsichtige Masse, sondern durch eine Anzahl auf einander gelegter Platten, wie z. B. durch Glasscheiben, so muſs

rücksichtlich der Verminderung des Lichts noch eine andere Verbesserung angebracht werden, indem aufser der im Innern des Körpers verlorenen und zerstreuten Lichtmasse noch ein Theil des Lichts beim Eintritt und Austritt aus den Tafeln verloren geht, der ebenfalls einen aliquoten Theil der vorhandenen Lichtmenge ausmacht. Es wird also nicht einerlei seyn, ob man das Licht durch 6 aufeinander gelegte Glasscheiben, jede von 2 Linien Dicke, oder durch eine Glasplatte von einem Zoll Dicke gehen läfst, und wir wollen die Veränderungen untersuchen, die aus diesem Umstand hervorgehen. Was nun die Formel $\varrho = \varrho' . e^{-N\Delta s}$ betrifft, so sieht man leicht, dafs unter diesen Bedingungen ϱ' die Dichtigkeit des Lichts, nachdem es so eben die vordere Fläche durchdrungen hat, und ϱ diejenige bedeutet, wenn es so eben aus der hintern Fläche heraustreten will. Statt des Factors $N\Delta$ setzen wir n, und s bedeutet die Dicke der Glasscheibe, indem wir annehmen, dafs das einfallende Licht senkrecht durchgehe.

§. 221.

Die anfängliche Dichtigkeit des Lichts sey R, und der Theil, welcher jedesmal bei dem Antreffen einer Oberfläche verloren geht, werde durch m bezeichnet, so tritt das Licht in die erste Glasplatte mit der Dichtigkeit $(1 - m) . R$, also wird die Dichtigkeit, ehe die Hinterfläche erreicht wird,

$$\varrho = (1 - m) . R . e^{-ns},$$

und die Dichtigkeit des durch die Oberfläche austretenden Lichts

$$\varrho' = (1 - m)^2 . R . e^{-ns}.$$

Mit derselben Dichtigkeit kommt es an der Vorderfläche der zweiten Scheibe an, wo wieder der mte Theil verloren geht; es tritt also in die zweite Scheibe mit der Dichtigkeit

$$\varrho'' = (1 - m)^3 . R . e^{-ns},$$

und wenn die Dicke der zweiten Platte durch s' bezeichnet wird, so kommt an ihre Hinterfläche das Licht mit einer Dichtigkeit

$$= (1 - m)^3 . R . e^{-ns - ns'}.$$

Hiervon geht wieder der mte Theil verloren, also tritt das Licht aus der zweiten Scheibe mit einer Dichtigkeit

$$= (1 - m)^4 . R . e^{-ns - ns'}.$$

Geht man in diesen Schlüssen weiter fort, so ergiebt sich leicht die Dichtigkeit des Lichts nach seinem Austritt aus der dritten Scheibe

$$= (1 - m)^6 . R . e^{-n.(s + s' + s'')},$$

nach seinem Austritt aus der vierten Scheibe

$$= (1 - m)^8 . R . e^{-n.(s + s' + s'' + s''')}$$

u. s. w. fort, also allgemein nach seinem Austritt aus der pten Scheibe, wenn die Dicke aller Scheiben zusammengenommen

$$s + s' + s'' + \ldots\ldots = \Sigma$$

gesetzt wird, ergiebt sich die Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma}.$$

§. 222.

Nach einem von **Bouguer** angestellten Versuch, wurde das Licht, wenn es durch sechs auf einander gelegte Spiegelglasscheiben gegangen war, im Verhältnifs von 10 : 3 vermindert; die Dicke aller Glasplatten zusammen betrug $11\frac{1}{2}$ Linien. Wir haben also, um die Formel

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma}$$

anwenden zu können, die Werthe $\frac{R}{\varrho} = \frac{10}{3}$, $p = 6$, $\Sigma = 11\frac{1}{2}$. Aus andern Beobachtungen war ferner gefunden, dafs für Spiegelglas bei senkrechtem Einfall des Lichts, $m = \frac{1}{40}$ genommen werden könne. Es wird also

$$(1 - m)^{2p} = (\tfrac{39}{40})^{12}$$

und wenn man in voriger Formel die natürlichen Logarithmen nimmt, so erhält man

$$n\Sigma = 12.(\log 39 - \log 40) + \log 10 - \log 3$$

$$\begin{array}{rl} \log 39 = & 3.6635616 \\ \log 40 = & 3.6888795 \\ \hline & -0.0253179 \times 12 \\ \hline & -0.3038148 \\ \log 10 = & 2.3025851 \\ \hline & 1.9987703 \\ \log 3 = & 1.0986123 \\ \hline & 0.9001580 = n\Sigma, \end{array}$$

also $n = 0{,}078274$, wenn der vom Licht durchlaufene Weg in pariser Linien ausgedrückt wird. Hätte man die Zurückwerfung des Lichts an den Vorderflächen und Hinterflächen der Gläser nicht mit berücksichtigt, so würde man $n = 0.1047$ gefunden haben. Uebrigens ist aber bei diesem Resultat zu bemerken, daſs der Werth von n ungewöhnlich groſs zu seyn scheint, so daſs das Glas ziemlich undurchsichtig gewesen seyn muſs.

Einem andern Versuche zufolge, verminderte ein 36 par. Linien dickes Glas das Licht nur bis zur Hälfte, und hieraus würde man für dieses Glas $n = 0{,}0178475$ finden.

§. 223.

Um die Grenze der Schwächung des Lichts rücksichtlich der Sichtbarkeit desselben ausfindig zu machen, legte Bouguer 16 Scheiben aus gemeinem Fensterglase über einander, und fand, daſs das Sonnenlicht 247 mal geschwächt wurde. Die vorhin entwickelte Formel

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma},$$

giebt dann

$$\tfrac{1}{247} = (1 - m)^{32} . e^{-n\Sigma}.$$

Bei 76 bis 77 Scheiben war auch nicht das geringste Sonnenlicht mehr zu sehen (Bouguer *traité pag.* 262.), sondern das Glas verhielt sich, wie ein dunkler Körper.

Nimmt man statt dessen 80 Scheiben, und bezeichnet die Zahl, welche die Schwächung des Lichts durch 80 Scheiben ausdrückt, durch q, so hat man

$$\frac{1}{q} = (1-m)^{160} \cdot e^{-5n\Sigma},$$

indem wir wohl annehmen dürfen, daſs 80 Scheiben fünf mal so dick waren, als 16. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $q = 247^5$, und das in diesem Maaſse verminderte Sonnenlicht wird also dem Auge völlig unempfindbar seyn. Man findet leicht, daſs, um eine in diesem Maaſse geschwächte Erleuchtung hervorzubringen, die Sonne 958832 mal so weit von der Erde entfernt seyn muſs, als sie es jetzt ist *). Für Meerwasser fanden wir die Gleichung

$$e^{0,2535 \cdot s} = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

und wenn das Licht der Sonne unsichtbar werden soll, so findet sich $s = 108,7$ Toisen. In dieser Tiefe würde man also die Sonne nicht mehr sehen können.

Für atmosphärische Luft hat man

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = e^{0,0000558 \cdot s}$$

und es findet sich daher für Luft von der Dichtigkeit, wie sie an der Oberfläche der Erde Statt findet, der zu durchlaufende Raum 4543 mal gröſser, als für Meerwasser, also $s = 493824$ Toisen oder 130 geographische Meilen.

§. 224.

In so fern das Mittel, welches das Licht durchläuft, nicht gleichförmig dicht ist, läſst sich die für die Lichtschwächung gefundene Gleichung (§. 217.)

*) Für 76 Scheiben, welche der Versuch gab, erhält man $q = 247^{\frac{19}{4}}$ und um eine so geschwächte Erleuchtung hervorzubringen, müſste die Sonne 481533 mal so weit von uns entfernt seyn, als sie wirklich ist. Es möchten indessen nach **Bouguer's** Meinung für sehr empfindliche Augen doch 80 Scheiben nöthig seyn. G.

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds$$

nicht direct integriren, weil man erst die Relation kennen muſs, welche zwischen der Dichtigkeit Δ und dem Wege s Statt findet. Ein Beispiel hierzu giebt das Licht, welches von den Himmelskörpern unsere Atmosphäre durchdringt. Bezeichnet man durch b die Höhe der Atmosphäre, durch z die Höhe des Punktes über der Erdoberfläche, wo die Dichtigkeit der Luft $= \Delta$ Statt findet, so hat man, wenn der Kürze wegen $\frac{z}{b} = x$ gesetzt wird, sehr nahe

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = (1 - x)^5,$$

wo Δ' die Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde bedeutet. Verbindet man diese Gleichung mit der vorigen

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds,$$

so ergiebt sich, indem Δ eliminirt wird,

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = - N\Delta' . (1 - x)^5 . ds.$$

§. 225.

Es sey (Fig. 32.) C der Mittelpunkt der Erde, der innere Kreis die Oberfläche der Erde, der äuſsere die Oberfläche der Atmosphäre, DA ein in der Atmosphäre sich bewegender Lichtstrahl, wobei wir die Krümmung desselben, welche durch die Brechung hervorgebracht wird, nothwendig bei Seite setzen müssen. AT sey eine Berührungslinie an der Erdoberfläche in A, wo dieselbe zuletzt vom Lichtstrahl getroffen wird, so ist der Winkel DAT der Höhe des Gestirns, von welchem das Licht herkommt, über dem Horizont gleich, und wir bezeichnen denselben durch μ. Man setze ferner den Halbmesser der Erde $AC = a$, so ist

$$DC = a + b, \quad MC = a + z,$$

und man hat in den beiden Dreiecken MAC, DAC,

wenn man bemerkt, dafs der Winkel $MAC = DAC = 90^0 + \mu$ wird, die Gleichungen

$$(a + z)^2 = aa + MA^2 + 2a \,.\, MA \,.\, \sin \mu$$
$$(a + b)^2 = aa + DA^2 + 2a \,.\, DA \,.\, \sin \mu.$$

Hieraus erhält man sogleich

$$MA + a \,.\, \sin \mu = \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2az + zz}$$
$$DA + a \,.\, \sin \mu = \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2ab + bb},$$

und da $DA - MA = MD = s$ ist, so kommt

$$s = \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2ab + bb} - \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2az + zz}.$$

§. 226.

Der Ausdruck für s läfst sich aber für diejenigen Fälle, wo die Höhe μ nicht gar zu klein ist, noch vereinfachen; da nämlich die Höhe der Atmosphäre, gegen den Halbmesser der Erde genommen, sehr klein ist, so wird man die Radicalgröfsen, welche im Ausdruck von s vorkommen, so entwickeln können, dafs alle Potenzen der Verhältnisse $\frac{b}{a \,.\, \sin \mu}$, $\frac{z}{a \,.\, \sin \mu}$ vernachlässigt werden; dann bleibt blofs

$$s = \frac{b - z}{\sin \mu},$$

und da wir allgemein $z = bx$ setzten (§. 224.), so wird auch

$$s = \frac{b}{\sin \mu} \cdot (1 - x)$$
$$ds = - \frac{b}{\sin \mu} \cdot dx,$$

folglich, wenn man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta' \,.\, (1 - x)^5 \,.\, ds$$

substituirt, so kommt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = + N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot (1 - x)^5 \,.\, dx.$$

Hiervon ist das Integral

$$\log \varrho = - N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot \frac{(1 - x)^6}{6} + C.$$

An der Grenze der Atmosphäre sey $\varrho = \varrho'$, und da daselbst $z = b$, also $x = 1$ wird, so ist $C = \log \varrho'$, und man erhält

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot \frac{(1-x)^6}{6}.$$

Ist das Licht an der Oberfläche der Erde angelangt, so sey seine Dichtigkeit $\varrho = \varrho^0$, und man hat zugleich $x = o$, also

$$\log \frac{\varrho^0}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu}.$$

§. 227.

Nun sey für zwei bestimmte Höhen μ', μ'', die Dichtigkeit des Lichts an der Oberfläche der Erde R', R'', so hat man die beiden Gleichungen

$$\log \frac{R'}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu'},$$

$$\log \frac{R''}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu''}.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so bleibt

$$\log R' - \log R'' = \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' b \cdot \left(\frac{1}{\sin \mu''} - \frac{1}{\sin \mu'}\right).$$

Hieraus sieht man, daſs bloſs das Verhältniſs $\frac{R'}{R''}$ der bei den Höhen μ', μ'' beobachteten Lichtstärken bekannt zu seyn braucht, um daraus die Gröſse $N\Delta'$ berechnen zu können, sobald man den Werth von b weiſs.

§. 228.

Bouguer beobachtete das Licht des Vollmonds, als er 19° 16′ Höhe über dem Horizont hatte, und fand, daſs er eine weiſse Fläche eben so hell erleuchtete, als vier Wachskerzen in einer Entfernung von 50 Fuſs. Bei einer andern Beobachtung, wo der Mond 66° 11′ hoch stand, fand sich die Erleuchtung so groſs, wie die derselben vier Wachskerzen in der Entfernung von 41 Fuſs. Bezeichnen wir also die Dichtigkeit des Lichts

bei der ersten Beobachtung durch R', bei der zweiten durch R'', und bemerken, dafs die Erleuchtungen der weifsen Fläche sich umgekehrt, wie das Quadrat der Entfernung der Lichter, verhalten, so hat man die Proportion

$$R' : R'' = \frac{1}{50^2} : \frac{1}{41^2}.$$

Zugleich finden die Werthe

$$\mu' = 19^0\,16', \quad \mu'' = 66^0\,11'$$

Statt, und wenn man alle diese Zahlen in die Gleichung

$$\log R'' - \log R' = \tfrac{1}{6} \cdot N\varDelta' b \cdot \left(\frac{1}{\sin \mu'} - \frac{1}{\sin \mu''}\right)$$

substituirt, so kommt

$$0{,}396902 = \tfrac{1}{6} \,.\, N\varDelta' b \,.\, 1{,}93754.$$

Nimmt man nun die Höhe der Atmosphäre, mit Rücksicht auf die in derselben Statt findende Temperaturabnahme, zu 49100 Meter an, so findet sich, da

$$1 \text{ Meter} = 0{,}513074 \text{ Toisen},$$

$$\frac{b}{6} = 4200 \text{ Toisen},$$

und hieraus ergiebt sich

$$N\varDelta' = 0{,}0000488,$$

fast derselbe Werth, welcher §. 218. gefunden wurde.

§. 229.

Fällt das Licht horizontal ein, in der Richtung TA, so ist $\mu = o$, und der allgemeine Ausdruck

$$s = \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2ab + bb} - \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2az + zz}$$

wird dann, wenn wir auch hier die höhern Potenzen von z und b weglassen,

$$s = \sqrt{2ab} - \sqrt{2az}$$

$$ds = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{2a} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2ab}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (§. 224.)

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -N\varDelta' \,.\, (1 - x)^5 \,.\, ds,$$

so erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = N\Delta' \cdot \sqrt{\frac{ab}{2}} \cdot (1-x)^5 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Man findet nun aber leicht, daſs zwischen den Grenzen $x = 1$ bis $x = o$ genommen, das Integral

$$\int (1-x)^5 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2 \cdot \frac{2.4.6.8.10}{3.5.7.9.11},$$

und da zugleich, wenn ϱ' die Dichtigkeit des eintretenden Lichts und ϱ^0 die Dichtigkeit des an der Erdoberfläche ankommenden Lichts ist, $\int \frac{d\varrho}{\varrho} = \log \frac{\varrho^0}{\varrho'}$ wird, so hat man die Gleichung

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = N\Delta' . \sqrt{2ab} . \tfrac{256}{693}.$$

Man hat nun die Zahlenwerthe

$$2a = 6543700 \text{ Toisen},$$
$$b = 25200 \text{ Toisen},$$
$$N\Delta' = 0{,}0000488,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\log.\text{nat} \frac{\varrho'}{\varrho^0} = 7{,}320445.$$

Hierzu gehört die Zahl 1511; also wird das Licht der Himmelskörper im Horizont etwa 1500 mal geschwächt.

§. 230.

Die in §. 226. entwickelte Formel für die Schwächung des Lichts in verschiedenen Höhen

$$\log \frac{\varrho^0}{\varrho'} = -\tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' b \cdot \frac{1}{\sin \mu}$$

läſst sich in Zahlen so ausdrücken:

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = \frac{0{,}20496}{\sin \mu},$$

wobei man die natürlichen Logarithmen erhält; will man die gewöhnlichen Tafellogarithmen haben, so muſs der Zahlencoefficient noch mit dem Modulus 0,4342944 der briggschen Logarithmen multiplicirt werden, und dann kommt

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = \frac{0,08899}{\sin \mu}.$$

Nach dieser Formel ist, der bessern Uebersicht wegen, folgende Tafel berechnet:

μ	$\frac{\varrho'}{\varrho^0}$
$\mu = 90^0$;	$\frac{\varrho'}{\varrho^0} = 1,23$
80^0 ;	1,23
70^0 ;	1,24
60^0 ;	1,27
50^0 ;	1,31
40^0 ;	1,38
30^0 ;	1,51
20^0 ;	1,82
10^0 ;	3,25
5^0 ;	10,49.

Weiter als 5 Grad darf man die Berechnung nach dieser Formel nicht ausdehnen, da sie bekanntlich nur so lange als ziemlich richtig betrachtet werden darf, als $a . \sin \mu$ gegen b bedeutend erscheint, und bei 5^0 Höhe wird das Verhältniſs $\frac{b}{a . \sin \mu} = \frac{1}{11}$, also nicht mehr ganz klein.

Wenn man also genau die Erleuchtung haben will, welche ein Element der Erdoberfläche von der Sonne empfängt, so muſs man in der Formel (§. 200.)

$$lds . \pi aa \cdot \frac{\sin H}{RR}$$

für den absoluten Glanz l, der ohne die Lichtschwächung in der Atmosphäre Statt finden würde, den geschwächten $l \cdot \frac{\varrho'}{\varrho^0}$ setzen, und man sieht leicht, daſs, wenn das erleuchtete Element auf der Kugelfläche der Erde liegt, die Winkel H und μ gleichbedeutend sind.

§. 231.

In allen vorigen Untersuchungen über die Schwächung des Lichts in durchsichtigen Mitteln, haben wir den Umstand vernachlässigt, daſs das Licht auſserdem noch im umgekehrten Verhältniſs des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Punkt abnimmt. Diese Vernachlässigung war deswegen immer zulässig, weil der leuchtende Punkt immer als sehr weit vom durchsichtigen Mittel entfernt angenommen wurde, so daſs also ohne die

Schwächung des Lichts, wegen der Undurchsichtigkeit, das Licht innerhalb des durchsichtigen Mittels merklich einerlei Dichtigkeit besessen haben würde. Allein, wenn ein leuchtender Punkt innerhalb des durchsichtigen Mittels sich befindet, so darf man die Abnahme des Lichts wegen zunehmender Entfernung nicht vernachlässigen. Bezeichnen wir die Abnahme des Lichts, wegen der Undurchsichtigkeit, durch $d\varrho'$, und die wegen der zunehmenden Entfernung durch $d\varrho''$, so wird der vollkommene Werth von $d\varrho$ durch die Summe $d\varrho' + d\varrho''$ ausgedrückt werden. Ist nun in der Entfernung $= s$ die Dichtigkeit des Lichts $= \varrho$, in der Entfernung $= s + ds$ die Dichtigkeit $= \varrho + d\varrho''$, so wird

$$\varrho \,.\, ss = (\varrho + d\varrho'') \,.\, (s + ds)^2,$$

und hieraus ergiebt sich $d\varrho'' = -2 \cdot \frac{ds}{s} \cdot \varrho$. Nun haben wir früher schon

$$d\varrho' = - N\Delta\varrho ds$$

gefunden, also ergiebt sich $d\varrho' + d\varrho'' =$

$$d\varrho = - N\Delta\varrho ds - 2 \cdot \frac{ds}{s} \cdot \varrho.$$

Ist die Dichtigkeit der durchsichtigen Materie gleichförmig, d. h. Δ eine constante Gröſse, so erhält man durch Integration

$$\log \varrho = - N\Delta s - 2 \,.\, \log s + \text{Const};$$

für $s = 6$ sey $\varrho = \varrho'$, so wird

$$\log \varrho' = - N\Delta 6 - 2 \,.\, \log 6 + \text{Const},$$

also, wenn man die Constante eliminirt,

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - N\Delta \,.\, (s - 6) - \log \frac{66}{ss}$$

$$\varrho = \varrho' \,.\, e^{-N\Delta\,(s-6)} \cdot \frac{66}{ss}.$$

Vermittelst dieser Formel lassen sich z. B. die Lichtmengen vergleichen, die von einem an der Erdoberfläche befindlichen Gegenstand in verschiedenen Entfernungen ausflieſsen. Das Verhältniſs der Klarheit des Gegenstandes in verschiedenen Entfernungen hängt aber, den in §§. 215. 216. entwickelten Grundsätzen zufolge, bloſs von der Gröſse $e^{-N\Delta s}$ ab.

Catoptrik.

§. 232.

Es ist schon früher erwähnt worden, dafs das Licht, welches auf einen dunkeln Körper fällt, sich auf verschiedene Arten vertheilt (§. 206.). Ist die Oberfläche des Körpers polirt, d. h. so viel als möglich von Unebenheiten befreit, oder bietet der Körper von Natur eine ebene Fläche dar, wie dies z. B. bei den tropfbaren Flüssigkeiten Statt findet, so wird ein bedeutender Theil des Lichts nach regelmäfsigen Gesetzen zurückgeworfen, und mit den Erscheinungen des auf diese Art regelmäfsig zurückgeworfenen Lichts beschäftigt sich die Catoptrik. Oberflächen, welche das Licht regelmäfsig zurückwerfen, nennt man spiegelnde Oberflächen oder blofs Spiegel. Die über die Zurückwerfung des Lichts angestellten Beobachtungen haben nun gelehrt, dafs immer folgende zwei Gesetze gelten, wie auch die Gestalt des Spiegels beschaffen seyn mag. Fällt ein Lichtstrahl auf einen bestimmten Punkt einer Oberfläche, und errichtet man in diesem Punkt eine Normale, das Einfallsloth, so ist der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Normale bildet, der Einfallswinkel, so grofs als der Winkel, welchen der zurückgeworfene Strahl mit der Normale macht, der Zurückwerfungswinkel. Das erste Gesetz läfst sich also auch so aussprechen: der Einfallswinkel

des Strahls ist dem Zurückwerfungswinkel gleich. Das zweite Gesetz erfordert, daſs der einfallende Strahl, die Normale und der zurückgeworfene Strahl in einer und derselben Ebene befindlich seyn müssen.

§. 233.

Es seyen die Coordinaten des leuchtenden Punktes parallel mit den drei Coordinaten der x, y, z resp. a, b, c, die Coordinaten des Einfallspunktes auf der spiegelnden Fläche x, y, z, so werden die Gleichungen des einfallenden Strahls

$$Y - y = \frac{b - y}{a - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{c - z}{a - x} \cdot (X - x).$$

Bezeichnet man ferner die partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ durch p, q, so werden die Gleichungen der Normale

$$Y - y = \frac{q}{p} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = -\frac{1}{p} \cdot (X - x).$$

Der zurückgeworfene Strahl geht durch den Einfallspunkt, dessen Coordinaten x, y, z sind; nimmt man in demselben noch einen zweiten Punkt an, dessen unbekannte Coordinaten ξ, η, ζ sind, so werden die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x} \cdot (X - x).$$

Bezeichnet man ferner den Einfallswinkel durch α, den Zurückwerfungswinkel durch β, so hat man nach den

bekannten Regeln der analytischen Geometrie aus den gegebenen Gleichungen der drei Linien

$$\cos\alpha = \frac{p.(a-x) + q.(b-y) - (c-z)}{\sqrt{1+pp+qq}.\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{p.(\xi-x) + q.(\eta-y) - (\zeta-z)}{\sqrt{1+pp+qq}.\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}},$$

und da dem ersten Gesetz zufolge die beiden Winkel gleich sind, so hat man

$$\frac{p.(a-x) + q.(b-y) - (c-z)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$
$$= \frac{p.(\xi-x) + q.(\eta-y) - (\zeta-z)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}},$$

welches die erste Gleichung zur Bestimmung der unbekannten ξ, η, ζ ist.

§. 234.

Die Gleichung der Ebene, welche durch diese drei Linien geht, läfst sich bekanntlich unter der Form

$$Z = AX + BY + C$$

darstellen, und da in derselben auch der Einfallspunkt liegt, dessen Coordinaten x, y, z sind, so hat man auch

$$z = Ax + By + C,$$

oder, wenn man beide Gleichungen von einander abzieht,

$$Z - z = A.(X - x) + B.(Y - y).$$

Setzt man hierin nach und nach statt der Verhältnisse $\frac{Z-z}{X-x}$, $\frac{Y-y}{X-x}$ ihre Werthe aus den Gleichungen der drei Linien, so erhält man

$$(c-z) = A.(a-x) + B.(b-y)$$
$$-1 = Ap + Bq$$
$$(\zeta - z) = A.(\xi - x) + B.(\eta - y).$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen A und B, so bleibt

$$[(c-z).p + (a-x)].(\eta-y)$$
$$+ [(a-x).q - (b-y).p].(\zeta-z)$$
$$- [(c-z).q + (b-y)].(\xi-x) = o,$$

welches die zweite Gleichung zur Bestimmung von ξ, η, ζ ist, und durch welche die Bedingung ausgedrückt ist, dafs der einfallende Strahl, die Normale und der zurückgeworfene Strahl in einerlei Ebene liegen.

§. 235.

Eine dritte Bedingungsgleichung läfst sich aus der Aufgabe selbst nicht weiter ableiten, wie schon in der Natur der Sache liegt, indem der Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ seyn sollen, beliebig in der Linie, die den ausfahrenden Strahl bildet, gewählt werden kann, und daher die absoluten Werthe von ξ, η, ζ unbestimmt bleiben; es ist daher hinreichend, nur die Verhältnisse

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x}, \quad \frac{\eta - y}{\xi - x}$$

gefunden zu haben. Setzt man daher

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x} = \zeta', \quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$$

$$\frac{c - z}{a - x} = c', \quad \frac{b - y}{a - x} = b',$$

so lassen sich die beiden entwickelten Gleichungen so schreiben:

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}}$$

$$(c'p + 1) . \eta' + (q - b'p) . \zeta' = c'q + b',$$

aus welchen Gleichungen sich η', ζ' bestimmen lassen.

§. 236.

Setzt man der Kürze wegen

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = rr$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r'r',$$

so ist der Weg eines Lichttheilchens, welches durch Zurückwerfung von einem Punkte, dessen Coordinaten a, b, c sind, bis zu einem andern Punkt geht, dessen Coordinaten durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden,

$$s = r + r'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$-ds = \frac{\xi - x}{r'} \cdot dx + \frac{\eta - y}{r'} \cdot dy + \frac{\zeta - z}{r'} \cdot dz$$
$$+ \frac{a - x}{r} \cdot dx + \frac{b - y}{r} \cdot dy + \frac{c - z}{r} \cdot dz.$$

Um nun die Werthe von x, y, z zu bestimmen, welche $ds = o$ geben, mufs man bedenken, dafs der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, auf einer Oberfläche liegt, deren Gleichung durch das Differential

$$dz = pdx + qdy$$

ausgedrückt wird. Man mufs also diesen Werth von dz in die vorige Gleichung substituiren, und dann den Coefficienten von dx sowohl, als den von dy Null setzen. Hierdurch ergeben sich folgende zwei Gleichungen

$$\frac{(\xi - x) + p.(\zeta - z)}{r'} + \frac{(a - x) + p.(c - z)}{r} = o$$
$$\frac{(\eta - y) + q.(\zeta - z)}{r'} + \frac{(b - y) + q.(c - z)}{r} = o,$$

oder, wenn wir die vorhin angenommenen Werthe b', c', η', ζ' substituiren,

$$\frac{1 + p\zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}} = - \frac{1 + pc'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}}$$
$$\frac{\eta' + q\zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}} = - \frac{b' + qc'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man zuerst

$$(1 + p\zeta').(b' + qc') = (1 + c'p).(\eta' + q\zeta'),$$

oder, wenn man die Producte entwickelt, und die sich aufhebenden Glieder wegläfst,

$$(c'p + 1).\eta' + (q - b'p).\zeta' = c'q + b',$$

welche dieselbe Gleichung ist, die im vorigen §. entwickelt wurde.

§. 237.

Setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'} = R$$
$$\sqrt{1 + b'b' + c'c'} = A.$$

so gehen die beiden obern Gleichungen über in:

$$p = -\frac{A + R}{A\zeta' + Rc'}$$

$$q = -\frac{A\eta' + Rb'}{A\zeta' + Rc'},$$

und hieraus erhält man sogleich

$$\frac{p + qb' - c'}{A} = -\frac{(1 + b'\eta' + c'\zeta') + RA}{A\zeta' + Rc'}.$$

Der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Ausdruck läſst sich auch so schreiben:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{A\zeta' + Rc'} + \frac{\eta'}{R}\cdot\frac{b'R}{A\zeta' + Rc'} + \frac{RA + c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}.$$

Nun ist aber aus den Gleichungen für p und q

$$\frac{R}{A\zeta' + Rc'} = -p - \frac{A}{A\zeta' + Rc'}$$

$$\frac{b'R}{A\zeta' + Rc'} = -q - \frac{A\eta'}{A\zeta' + Rc'},$$

folglich erhält man durch Substitution dieser Werthe jenen Ausdruck

$$= -\frac{p}{R} - \frac{A}{R.(A\zeta' + Rc')} - \frac{q\eta'}{R} - \frac{A\eta'\eta'}{R.(A\zeta' + Rc')}$$
$$+ \frac{RA + c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}$$

$$= -\frac{p + q\eta'}{R} - \frac{A}{R}\cdot\frac{1 + \eta'\eta' - RR}{A\zeta' + Rc'} + \frac{c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}.$$

Es ist ferner $1 + \eta'\eta' - RR = -\zeta\zeta$, also wird vorige Gröſse auch

$$= -\frac{p + q\eta'}{R} + \frac{A\zeta'\zeta' + Rc'\zeta'}{R.(A\zeta' + Rc')}$$

$$= -\frac{p + q\eta' - \zeta'}{R}.$$

Man hat daher

$$\frac{p + qb' - c'}{A} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{R},$$

welche Gleichung ebenfalls im §. 235. entwickelt worden ist.

§. 238.

Die beiden Gleichungen, welche die Gesetze der Zurückwerfung des Lichts enthalten, lassen sich also auch aus einem andern Gesichtspunkte entwickeln. Wir fanden dieselben dadurch wieder, daſs wir den Weg berechneten, welchen das Licht zwischen zwei Punkten, vermittelst der Zurückwerfung zu durchlaufen hat, und das Differential des Weges Null setzten, d. h. wir suchten den Einfallspunkt der spiegelnden Fläche auf, für welche der ganze Weg ein Minimum wird. Hieraus schlieſsen wir, daſs, wenn ein Lichttheilchen aus einem Punkt nach einem andern gegebenen zurückgeworfen werden soll, es von einer solchen Stelle des Spiegels zurückgeworfen wird, für welche die Länge des einfallenden Strahls nebst der Länge des ausfahrenden Strahls ein Minimum ist. Der Punkt der spiegelnden Fläche wird dann eine solche Lage haben müssen, daſs erstlich die daselbst errichtete Normale den Winkel des einfallenden mit dem zurückgeworfenen Strahl halbirt, und daſs zweitens der einfallende Strahl, die Normale und der zurückgeworfene Strahl in einer und derselben Ebene liegen.

§. 239.

Was die Erklärung dieser regelmäſsigen Zurückwerfung des Lichts betrifft, so hat man verschiedene Hypothesen darüber aufgestellt, und wir wollen die hauptsächlichsten derselben hier kurz anführen, obgleich dieser Gegenstand eigentlich mehr in den physischen Theil der Optik, als in den analytischen gehört. Nach der ältesten Meinung nahm man an, die Lichttheilchen würden von den festen Körpertheilchen mechanisch, wie elastische Kügelchen, zurückgeworfen, und diese Annahme scheint auf den ersten Anblick viel Wahrscheinlichkeit für sich zu haben, da wir sehr wohl wissen, daſs eine elastische Kugel, welche gegen eine Ebene unter einem gewissen Winkel geworfen wird, unter demselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite ab-

springt, und daſs auch der ganze Weg der Kugel in einerlei Ebene liegt. Allein betrachtet man die Sache genauer, so sieht man, daſs diese Erklärungsweise wohl nur dann als genügend angenommen werden könnte, wenn die Oberflächen der Körper Flächen von regelmäſsiger Krümmung wären. Nun ist aber bekannt, daſs durch die beste Politur nur die merklichen Rauhigkeiten und Unebenheiten an der Oberfläche der Körper weggenommen werden, allein keinesweges eine regelmäſsige Fläche hervorgebracht wird, so daſs die spiegelnden Flächen für die so kleinen Lichttheilchen immer noch die gröſsten Unebenheiten darbieten, in welchem Fall, wie man leicht begreift, der bei weitem gröſste Theil des einfallenden Lichts unregelmäſsig zerstreut werden, und das regelmäſsig zurückgeworfene Licht so unbedeutend seyn würde, daſs man es kaum bemerkte. Dieses widerspricht aber der Erfahrung, denn wir sehen, daſs Oberflächen, die nur einigermaſsen polirt sind, schon einen bedeutenden Theil des einfallenden Lichts nach regelmäſsigen Gesetzen zurückwerfen, und daher als Spiegel dienen können.

§. 240.

Nach Newton's Ansichten wird die Zurückwerfung durch eine abstoſsende Kraft hervorgebracht, welche die Körpertheilchen auf das Licht ausüben, und daher gelangen die Lichttheilchen gar nicht bis zur Oberfläche der spiegelnden Körper selbst, sondern wenden sich schon vorher in einer krummlinigen Bahn von dem Körper ab, wodurch also die geringern Unebenheiten der spiegelnden Fläche weniger Einfluſs haben. Man muſs freilich hierbei voraussetzen, daſs die abstoſsende Kraft ein solches Gesetz befolgt, vermöge dessen die Wirkung derselben in jeder merklichen Entfernung von der Oberfläche unmerklich ist, weil sonst die Bahn des Lichts nicht als aus graden Linien bestehend erscheinen könnte. Wie nun auch die Kraft, welche die Licht-

theilchen abstöſst, beschaffen seyn mag, so muſs man doch immer annehmen, sie sey eine Function des Abstandes des Lichttheilchens von der spiegelnden Fläche, und senkrecht gegen dieselbe gerichtet. Nimmt man nun der Kürze wegen an, die spiegelnde Fläche sey eine horizontale Ebene, und zerlegt die Geschwindigkeit des Lichts in zwei andere, eine horizontale, parallel mit dem Spiegel, und eine verticale, senkrecht gegen den Spiegel, so sieht man ohne weitere Rechnung sogleich ein, daſs die horizontale Geschwindigkeit, in deren Richtung keine Kraft wirkt, immer denselben Werth behalten muſs, während die verticale durch die entgegenwirkende abstoſsende Kraft immer mehr verringert wird, bis sie den Werth Null erreicht. Da die Kraft immer zu wirken fortfährt, so wird das Lichttheilchen nach und nach in entgegengesetzter Richtung seine frühere Geschwindigkeit wieder erlangen, und da die Kraft bloſs eine Function der Entfernung ist, so sieht man ein, daſs in gleichen Entfernungen von dem Spiegel auch die senkrechte Geschwindigkeit, sowohl beim Einfallen der Lichttheilchen, als beim Zurückgehen einerlei Werth, nur im entgegengesetzten Sinne, hat. Indem ferner die horizontale Geschwindigkeit gleich groſs blieb, so wird auch die Geschwindigkeit des Lichttheilchens in seiner Bahn in gleichen Entfernungen vom Spiegel, sowohl im einfallenden als im zurückgeworfenen Strahl, gleich groſs seyn, und die Richtung der Bewegung vor und nach dem Einfall gleiche Winkel mit der Ebene des Spiegels, oder dem im Einfallspunkt errichteten Perpendikel bilden. Unter Einfallspunkt muſs man hier denjenigen Punkt der Bahn verstehen, in welchem das Lichttheilchen dem Spiegel am nächsten ist, wo also seine verticale Geschwindigkeit Null wird, und es sich während eines Augenblicks parallel mit dem Spiegel bewegt.

§. 241.

Nach der Vibrationstheorie würden sich die angegebenen Gesetze der Reflexion des Lichts folgender-

maſsen erklären lassen. Es sey in L (Fig. 33.) ein leuchtender Punkt, so setzt dieser den Aether nach jeder Richtung hin in Vibrationen, die sich also kugelförmig auf den Radien LM, LN fort verbreiten. Nun sey $LM = r$, die Zeit, welche das Licht gebraucht, um diesen Raum zu durchlaufen, $= t$, die Geschwindigkeit des Lichts $= c$, so hat man $t = \frac{r}{c}$; ferner sey LN dem ersten Radius LM unendlich nahe, und $= r + dr$, so ist die Zeit $t + dt$, nach welcher dieser Lichtstrahl an der Oberfläche des Spiegels auftrifft, $= \frac{r + dr}{c}$. Die Punkte M, N lassen sich nun wiederum als gleichsam leuchtende Punkte betrachten, von denen aus nach allen Seiten Vibrationen ausgehen, und hierdurch die in der Undulationstheorie sogenannten secundären Wellen bilden. Zur Zeit t' wird nun die kreisförmige Welle von M um eine Entfernung fortgeschritten seyn, die man findet, indem die Zeit $t' - t$ mit der Geschwindigkeit c des Lichts multiplicirt, d. h. der Halbmesser der kreisförmigen Welle ist,

$$= (t' - t) . c = t'c - r,$$

indem wir annehmen müssen, daſs das zurückgeworfene Licht sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt, als das einfallende, da die Fortpflanzung in Aether von gleicher Dichtigkeit geschieht. Setzen wir nun $BM = \alpha$, und betrachten BA als die Abscissenlinie, indem in B der Anfangspunkt der Abscissen angenommen wird, so hat man die Gleichung der kreisförmigen Welle, die zur Zeit t' Statt findet:

$$yy + (x - \alpha)^2 = (t'c - r)^2.$$

Eben so geht aus dem Punkte N eine kreisförmige Welle aus, die aber zu der Zeit t' noch keinen so groſsen Abstand von N haben wird, als die aus M ausgehende, weil der Punkt N um die Zeit $dt = \frac{dr}{c}$ später in Vibration gesetzt wurde, und man findet leicht,

dafs zur Zeit t' der Halbmesser der von N ausgehenden Welle

$$= (t' - t - dt) . c = t'c - r - dr$$

seyn wird. Die Gleichung dieses Kreises ist also, wenn wir $NM = d\alpha$ setzen:

$$yy + (x - \alpha - d\alpha)^2 = (t'c - r - dr)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Potenzen von $d\alpha$ und dr, den Regeln der Differenzialrechnung zufolge, vernachlässigt:

$$yy + (x - \alpha)^2 - 2.(x - \alpha).d\alpha = (t'c - r)^2 - 2.(t'c - r).dr.$$

Beschreibt man aus L mit dem Halbmesser LM den unendlich kleinen Kreisbogen PM, so ist $NP = dr$, und setzt man den Winkel $LNB = \varepsilon$, so hat man in dem bei P rechtwinkligen Dreieck PNM, $NP = NM . \cos\varepsilon$, oder $dr = d\alpha . \cos\varepsilon$, folglich läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$yy + (x - \alpha)^2 - 2.(x - \alpha).d\alpha = (t'c - r)^2 - 2.(t'c - r).d\alpha.\cos\varepsilon,$$

wo ε das Complement des Einfallswinkels ist.

§. 242.

Wir sehen hieraus, dafs der leuchtende Punkt L bei der Reflexion der aus ihm hervorgehenden Lichtwelle, eine unendliche Menge secundärer Wellen hervorbringt, deren Vibrationen sich aber meistentheils unter einander stören, und blofs diejenigen Vibrationen werden zu dem regelmäfsig reflectirten Licht gehören, die bei zwei auf einander folgenden secundären Wellen mit einander parallel fortgehen. Dies kann nun an keiner andern Stelle geschehen, als da, wo sich die beiden auf einander folgenden unendlich nahen secundären Wellen durchschneiden. Wir müssen also aus den beiden Gleichungen

$$yy + (x - \alpha)^2 = (t'c - r)^2$$

$$yy + (x - \alpha)^2 = (t'c - r)^2 + 2d\alpha.(x - \alpha) - 2d\alpha.(t'c - r).\cos\varepsilon$$

die Coordinaten x, y des Durchschnittspunktes bestimmen. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so bleibt

$$2d\alpha.(x - \alpha) = 2d\alpha.(t'c - r).\cos\varepsilon$$
$$x - \alpha = \cos\varepsilon.(t'c - r).$$

Substituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so erhält man

$$y = (t'c - r).\sin\varepsilon.$$

Nun sey G dieser Durchschnittspunkt, so hat man

$$MQ = x - \alpha,\quad GQ = y,$$
$$\text{tang}\, GMQ = \frac{GQ}{QM} = \frac{y}{x - \alpha} = \text{tang}\,\varepsilon.$$

Der Winkel GMQ wird also = dem Winkel LMB, d. h. der Einfallswinkel gleich dem Zurückwerfungswinkel.

§. 243.

Aus dem Gesagten folgt also, dafs die Zurückwerfung des Lichts, welche nach regelmäfsigen Gesetzen geschieht, durch jede der drei Hypothesen genügend erklärt wird, indem sich aus denselben die vermittelst der Beobachtung gefundenen Erscheinungen, welche §. 232. dargestellt wurden, erklären lassen. Nur bei der Emanationstheorie entsteht noch die Frage, wie es kommt, dafs bei der Wirkung einer abstofsenden Kraft auf das einfallende Licht nicht alles Licht zurückgeworfen wird. Hierbei mufs man sich mit der von Newton gegebenen Erklärung begnügen, nach welcher die Lichttheilchen an ihren verschiedenen Seiten auch verschiedene Relationen zu den Körpern besitzen, und nicht alle Lichttheilchen sich grade in der Stellung befinden, welche nöthig ist, damit die abstofsende Kraft des Körpers die verticale Geschwindigkeit des Lichttheilchens bis auf Null herabbringen könne. Aufserdem werden wir sehen, dafs den Körpern aufser den abstofsenden Kräften auch anziehende zugeschrieben werden müssen.

§. 244.

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall der Zurückwerfung des Lichts, nämlich den, wo die zurückwerfende Fläche eine Ebene bildet, also ein ebener Spiegel angenommen wird. Es sey L (Fig. 33.) der

leuchtende Punkt, AB der Durchschnitt des Spiegels, welcher entsteht, indem eine Ebene durch den leuchtenden Punkt senkrecht auf den Spiegel gelegt wird, die also zugleich die Einfallsebene und die Zurückwerfungsebene darstellt, da in ihr der einfallende Strahl, der zurückgeworfene Strahl und das Einfallsloth liegen müssen. Aus dem leuchtenden Punkt gehen die Strahlen LM, LN aus, die eine willkürliche Lage haben können, und einander nicht unendlich nahe zu seyn brauchen. Die Strahlen LM, LN werden nach den Richtungen MG, NH zurückgeworfen, und einem in der Gegend von GH befindlichen Auge werden diese Strahlen von Punkten hergekommen scheinen, die auf den graden Linien liegen, durch welche diese Strahlen vorgestellt werden. Man verlängere diese Strahlen, bis sie sich hinter dem Spiegel in R durchschneiden, so wird R ein Bild des Punktes L darstellen, indem man in der Catoptrik sowohl, als in der Dioptrik, unter dem Bild eines Punktes denjenigen Punkt versteht, in welchem sich zwei oder mehrere vom leuchtenden Punkt ausgegangene und dann durch Zurückwerfung oder Brechung zusammengebrachte Strahlen durchschneiden. Da nun dem catoptrischen Gesetze zufolge $LMB = GMQ$, $LNB = HNQ$, so sieht man, dafs die Dreiecke NLM, NRM sich decken; es wird also, wenn wir von L ein Perpendikel LT auf AB fällen, dasselbe verlängert durch R gehen, und zugleich $LT = RT$ seyn. Da nun dieser Satz gilt, wie auch die einfallenden Strahlen gezogen seyn mögen, so müssen wir hieraus schliefsen, dafs alle auf einen ebenen Spiegel fallende Strahlen so zurückgeworfen werden, dafs, wenn man sie rückwärts verlängert, sie sich alle in ein und demselben Punkte durchschneiden, der so weit hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor demselben sich befindet, und zwar wird eine durch den Vereinigungspunkt und den leuchtenden Punkt gezogene Linie senkrecht auf der Ebene des Spiegels stehen.

§. 245.

Um zu zeigen, wie man dasselbe Resultat aus den früher entwickelten allgemeinen Formeln ableiten könne, nehmen wir die Ebene des Spiegels selbst für die Ebene der x, y an, so wird die Gleichung der spiegelnden Oberfläche $z = o$, folglich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = o, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q = o.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (§. 235.)

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}}$$

$$(c'p + 1).\eta' + (q - b'p).\zeta' = c'q + b',$$

so erhält man ganz einfach

$$\eta' = b', \quad c'.\sqrt{1 + \eta'\eta' - \zeta'\zeta'} = \zeta'.\sqrt{1 + b'b' + c'c'},$$

und aus der letzten Gleichung ergiebt sich $c' = -\zeta'$. Nun waren die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls (§. 233.)

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x}\cdot(X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x}\cdot(X - x),$$

oder, da $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$, $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = \zeta'$ gesetzt wurde, und $\eta' = b'$, $\zeta' = -c'$ gefunden ist, und aufserdem noch (§. 235.)

$$b' = \frac{b - y}{a - x}, \quad c' = \frac{c - z}{a - x},$$

den angenommenen Bezeichnungen zufolge, war, so werden die Gleichungen eines von einem ebenen Spiegel zurückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{b - y}{a - x}\cdot(X - x)$$

$$Z = -\frac{c}{a - x}\cdot(X - x),$$

indem man bedenkt, dafs $z = o$ ist. Setzt man in diesen Gleichungen $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt

y, so erhält man die Gleichungen eines andern zurückgeworfenen Strahls, der von einem Punkte reflectirt wird, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ sind, während die vorigen Gleichungen sich auf einen Einfallspunkt beziehen, dessen Coordinaten durch x, y bezeichnet werden. Verbindet man diese zwei Paare von Gleichungen, so erhält man vier Gleichungen, aus denen der Durchschnittspunkt beider Strahlen, vermöge seiner Coordinaten X, Y, Z, bestimmt werden kann. Man sieht übrigens leicht, daſs die vierte Gleichung zugleich die Relation zwischen dx, dy enthält, d. h. in welcher Richtung man auf der Fläche des Spiegels fortschreiten muſs, damit beide reflectirte Strahlen wirklich einen Durchschnittspunkt besitzen. Man wird also zuerst das Differentialverhältniſs $\frac{dy}{dx}$ aus den vier Gleichungen fortschaffen, wonach drei Gleichungen übrig bleiben, die zur Bestimmung der drei Coordinaten X, Y, Z hinreichend sind. Es ist übrigens leicht einzusehen, daſs, anstatt für x und y die Gröſsen $x + dx$ und $y + dy$ zu substituiren, man nur die beiden vorigen Gleichungen zu differentiiren braucht, indem x und y als veränderlich angenommen werden. Man erhält dann

$$-dy = \frac{dx.(b-y) - dy.(a-x)}{(a-x)^2} \cdot (X-x) - \frac{b-y}{a-x} \cdot dx$$

$$o = \frac{dx}{(a-x)^2} \cdot (X-x) - \frac{dx}{a-x}.$$

Die letzte Gleichung giebt $X = a$; die andere wird identisch, d. h. man kann in jeder Richtung von einem Punkte zum andern auf der Oberfläche eines ebenen Spiegels fortgehen, die zurückgeworfenen Strahlen werden sich verlängert immer schneiden. Setzt man ferner diesen Werth von X in die beiden ursprünglichen Gleichungen, so kommt $Y = b$, $Z = -c$. Da nun a, b, c die Coordinaten des einfallenden Strahls waren, so ergiebt sich hieraus, daſs alle Strahlen einen einzigen Durchschnittspunkt haben, und daſs dieser Durchschnitts-

punkt, oder das Bild des leuchtenden Punkts, so weit hinter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor dem Spiegel, und zwar in der Verlängerung eines auf die Fläche des Spiegels vom leuchtenden Punkt gefällten Perpendikels.

§. 246.

Da wir bei dem ebenen Spiegel die merkwürdige Eigenschaft gefunden haben, dafs die aus einem leuchtenden Punkt ausfliefsenden Strahlen, welche den Spiegel treffen, von diesem so zurückgeworfen werden, dafs sie alle aus einem Punkt zu kommen scheinen, so ist es der Mühe werth, zu untersuchen, ob noch andere Flächen diese Eigenschaft besitzen, und von welcher Natur sie sind. Der Kürze wegen betrachten wir blofs solche Oberflächen, die durch Umdrehung entstanden sind, und hierbei ist es dann nur nöthig, einen Schnitt der krummen Oberfläche zu nehmen, der durch den Durchschnitt mit einer Ebene entsteht, die durch den leuchtenden Punkt und die Umdrehungsaxe des Körpers geht. Diese Ebene betrachten wir als die Ebene der x, y, so dafs also z, c, ζ Null werden, also auch die Gröfsen c', ζ' verschwinden (§. 234.). Nimmt man die Gleichung

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}},$$

so giebt dieselbe im vorliegenden Fall

$$\frac{1 + \frac{q}{p} \cdot b'}{\sqrt{1 + b'b'}} = \frac{1 + \frac{q}{p} \cdot \eta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta'}}.$$

Nun war die Gleichung der krummen Oberfläche im Allgemeinen $dz = pdx + qdy$, also wenn man $dz = o$ setzt, so wird

$$o = pdx + qdy, \quad \frac{q}{p} = -\frac{dx}{dy},$$

und indem wir das Differentialverhältnifs $\frac{dy}{dx}$ durch t

bezeichnen, so wird $p = - qt$, folglich geht vorige Gleichung in diese über

$$\frac{t - b'}{\sqrt{1 + b'b'}} = \frac{t - \eta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta'}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man quadrirt

$$\eta'\eta'.(tt - 2b't) - (2tb' - b'b')$$
$$= b'b'.(tt - 2t\eta') - (2t\eta' - \eta'\eta'),$$

welches sich auch so schreiben läſst:

$$(\eta'\eta' - b'b').(tt - 1) + 2t.(\eta' - b') - 2tb'\eta'.(\eta' - b') = o,$$

und man sieht leicht, daſs diese Gleichung durch $\eta' - b'$ theilbar ist. Führt man die Division wirklich aus, so kommt

$$(\eta' + b').(tt - 1) + 2t - 2tb'\eta' = o$$
$$\eta' = \frac{(1 - tt).b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'}.$$

§. 247.

Nach §. 233. sind die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x} \cdot (X - x),$$

und da die Coordinaten parallel mit der Axe der z Null sind, so bleibt bloſs

$$Y - y = \eta'.(X - x),$$

wenn wir bemerken, daſs $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$ gesetzt wurde. Da wir den Anfangspunkt der Coordinaten willkürlich wählen können, so können wir ihn in den Punkt verlegen, wo sich alle reflectirte Strahlen durchschneiden; dann müssen wir in vorige Gleichung $Y = o$, $X = o$ setzen, so daſs

$$\eta'.x = y$$

bleibt. In dem Ausdrucke von η', der im vorigen §. entwickelt wurde, kommt die Gröſse b' vor; diese ist nach unsern frühern Bezeichnungen §. 235. nichts anders,

als der Quotient $\frac{b-y}{a-x}$, wo a und b die Coordinaten des leuchtenden Punktes parallel mit den Axen der x und y sind. Da ferner die Lage der Abscissenlinie auch noch unserer Willkür überlassen ist, so dürfen wir dieselbe durch den leuchtenden Punkt legen; dies giebt $b = o$, und es bleibt $b' = -\frac{y}{a-x}$. Substituirt man diesen Werth in vorigen Ausdruck von η', so kommt

$$\eta' = \frac{(tt-1).y - 2t.(a-x)}{(tt-1).(a-x) + 2ty},$$

und da außerdem $\eta' = \frac{y}{x}$, so erhält man die Gleichung für die Curve, welche alles Licht, das aus einem Punkt ausgeht, wieder in einen vereinigt,

$$(tt-1).xy - 2tx.(a-x)$$
$$= (tt-1).(a-x).y + 2tyy.$$

Löst man diese quadratische Gleichung nach t auf, so kommt

$$ty.(a-2x) + yy + ax - xx$$
$$= \pm\sqrt{xx+yy}.\sqrt{xx+yy+a.(a-2x)}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man zuerst

$$yy = rr - xx,$$

wo r den aus dem Sammlungspunkt der zurückgeworfenen Strahlen nach irgend einem Punkt der Curve gezogenen Radius vector bedeutet. Differentiirt man, so kommt

$$r.\frac{dr}{dx} - x = y.\frac{dy}{dx} = ty,$$

da wir $\frac{dy}{dx}$ durch t bezeichnet haben. Setzt man diesen Werth von ty und von yy in vorige Gleichung, so erhält man, da außerdem die ganze Gleichung durch r theilbar wird, den Ausdruck:

$$\frac{dr}{dx}.(a-2x) + r = \pm\sqrt{rr + a.(a-2x)}.$$

Man setze ferner

$$r = u . \sqrt{a - 2x},$$

so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{du}{\sqrt{a + uu}} = \pm \frac{dx}{a - 2x},$$

und hiervon läſst sich das Integral nach den bekannten Regeln vermittelst der Logarithmen finden. Es ergiebt sich

$$\log \left[\frac{u}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{uu}{a} + 1}\right]$$

$$= \mp \log \sqrt{a - 2x} + \text{Const},$$

und wenn man den Werth von u durch r und x ausgedrückt wieder restituirt

$$\log \frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{\sqrt{aa - 2ax}}$$

$$= \mp \log \sqrt{a - 2x} + \text{Const}.$$

Um die Constante zu bestimmen, sey für $x = 0$, $r = k$, so kommt

$$\log \frac{k + \sqrt{kk + aa}}{a} = \mp \log \sqrt{a} + \text{Const},$$

folglich, wenn man die Constante aus beiden Gleichungen eliminirt

$$\log \frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{k + \sqrt{kk + aa}} . \frac{a}{\sqrt{aa - 2ax}}$$

$$= \mp \log . \sqrt{\frac{a - 2x}{a}}.$$

Nimmt man das obere Zeichen, so wird, indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, und der Kürze wegen $k + \sqrt{kk + aa} = b$ setzt,

$$r + \sqrt{rr + aa - 2ax} = b.$$

Setzt man r auf die andere Seite und quadrirt, so kommt

$$r - \frac{a}{b} . x = \frac{bb - aa}{2b}.$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnitts, in welcher r den aus dem Brennpunkt gezogenen Radius vector bedeutet, und die Abscissen x von demselben Brennpunkte ab auf der Axe gezählt werden. Errichtet man im Brennpunkte eine Ordinate und nennt ihre Länge p, so ist p der halbe Parameter, und da man die gleichzeitigen Werthe $r = p$, $x = o$ hat, so erhält man

$$p = \frac{\beta\beta - aa}{2\beta}.$$

Man findet leicht, indem der oben angegebene Werth von β substituirt wird, daſs $p = k$ ist. Bezeichnet man die Eccentricität durch $2e$, so sieht man leicht, daſs der Radius vector, welcher nach einem senkrecht über dem andern Brennpunkt liegenden Punkt gezogen ist, $= \sqrt{kk + 4ee}$ wird. Man hat also die gleichzeitigen Werthe

$$x = 2e, \quad r = \sqrt{kk + 4ee}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$r = \frac{a}{\beta} \cdot x + \frac{\beta\beta - aa}{2\beta},$$

und bemerkt, daſs $\beta\beta - aa = 2\beta k$ ist, so kommt

$$\sqrt{kk + 4ee} = 2 \cdot \frac{a}{\beta} \cdot e + k.$$

Quadrirt man, läſst die sich aufhebenden Glieder weg, und dividirt die ganze Gleichung durch $4e$, so erhält man

$$e = \frac{aa}{\beta\beta} \cdot e + \frac{a}{\beta} \cdot k$$

$$e = \frac{a\beta k}{\beta\beta - aa} = \frac{a\beta k}{2\beta k} = \tfrac{1}{2} \cdot a.$$

Die Gröſse a ist also nichts anders, als die doppelte Eccentricität, und hieraus sieht man, daſs, wenn die Strahlen aus dem einen Brennpunkt des Kegelschnittes ausgehen, sie zurückgeworfen sich im andern Brennpunkt vereinigen.

§. 248.

Nimmt man in der Gleichung

$$\log \frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{k + \sqrt{kk + aa}} \cdot \frac{a}{\sqrt{aa - 2ax}}$$

$$= \mp \log \sqrt{\frac{a - 2x}{a}}$$

das untere Vorzeichen, so erhält man

$$ar + a . \sqrt{rr + aa - 2ax} = b . (a - 2x),$$

und nach den gehörigen Reductionen kommt

$$r + \frac{b}{a} \cdot x = \frac{bb - aa}{2b}.$$

Diese Gleichung gilt ebenfalls für einen Kegelschnitt, und zwar für die Hyperbel, wenn erstere Gleichung für die Ellipse gilt, wobei man jedoch beobachten muſs, daſs die positiven Abscissen x immer von dem einen Brennpunkt nach dem andern hin gezählt werden müssen. Setzt man in der Gleichung

$$r - \frac{a}{b} \cdot x = \frac{bb - aa}{2b}$$

a unendlich groſs, so ist das Verhältniſs $\frac{a}{b} = 1$, und da $\frac{bb - aa}{2b} = p$, so bleibt

$$r - x = p$$

die Gleichung einer Parabel. Nimmt man $a = o$, d. h. sollen die zurückgeworfenen Strahlen sich in demselben Punkte vereinigen, aus welchem sie ausgingen, so wird $r = \frac{1}{2} \cdot b = k$, also die Curve ein Kreis, in dessen Mittelpunkt der leuchtende Punkt und der Sammlungspunkt der reflectirten Strahlen sich zugleich befinden.

§. 249.

Wir sehen aus dieser allgemeinen Auflösung, daſs die Kegelschnitte allein Flächen von der Beschaffenheit darbieten, daſs die von ihnen zurückgeworfenen Strahlen auch wieder genau in einen Punkt vereinigt werden,

und zwar findet dieses nur Statt, wenn der leuchtende Punkt und der Sammlungspunkt sich in den Brennpunkten des Kegelschnitts befinden. Ist die zurückwerfende Curve von anderer Beschaffenheit, so bilden die Durchschnitte der auf einander folgenden zurückgeworfenen Strahlen eine krumme Linie, die sogenannte, durch Zurückwerfung entstandene Brennlinie (Catacaustica). Diese läfst sich in jedem besondern Fall leicht finden, sobald die Natur der zurückwerfenden Curve bekannt ist. Die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls ist nämlich, insofern wir blofs die Strahlen betrachten, die in der Ebene der Curve liegen (§. 247.),

$$Y - y = \eta' . (X - x),$$

und der Werth von η' fand sich (§. 246.)

$$\eta' = \frac{(1 - tt) . b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'},$$

wo $t = \frac{dy}{dx}$, $b' = \frac{b - y}{a - x}$, x und y die Coordinaten der zurückwerfenden Curve, und a, b die Coordinaten des leuchtenden Punkts, auf dieselben Axen bezogen, bedeuten. Setzt man nun in der Gleichung

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$

$y + dy$ statt y, $x + dx$ statt x, so erhält man eine neue Gleichung

$$Y - y - dy = (\eta' + d\eta') . (X - x - dx),$$

welche für den Strahl gilt, der auf einen Punkt fällt, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ sind. Da nun die Natur der krummen Linie, welche das Licht zurückwirft, als bekannt angenommen wird, so hat man y als Function von x; es lassen sich also auch die Gröfsen $\frac{dy}{dx}$ oder t und η' durch x ausdrücken, so dafs in den beiden Gleichungen

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$

$$Y - y - dy = (\eta' + d\eta') . (X - x - dx),$$

die sich auch so schreiben lassen:

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$
$$- dy = d\eta' . (X - x) - \eta' dx,$$

aufser X, Y nur noch x vorkommt; eliminirt man dann aus beiden Gleichungen die Gröfse x, so bleibt eine Gleichung zwischen X und Y, welche die gesuchte Gleichung der Brennlinie ist.

§. 250.

Man findet aus den beiden vorigen Gleichungen

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$
$$- dy = d\eta' . (X - x) - \eta' dx$$

die Werthe von $X - x$, $Y - y$

$$X - x = \frac{\eta' - t}{\frac{d\eta'}{dx}}$$

$$Y - y = \frac{\eta' - t}{\frac{d\eta'}{dx}} . \eta'.$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\eta' = \frac{(1 - tt) . b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'},$$

und setzt der Kürze wegen $dt = v dx$, so dafs also t und v die ersten und zweiten Differentialcoefficienten von y darstellen, so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{d\eta'}{dx} = \frac{2v \cdot (1 + b'b') - \frac{db'}{dx} \cdot (1 + tt)}{[(tt - 1) - 2tb']^2} \cdot (1 + tt).$$

Eben so ergiebt sich auch

$$\eta' - t = \frac{(b' - t) . (1 + tt)}{(tt - 1) - 2tb'},$$

folglich hieraus

$$X - x = \frac{(b' - t) \cdot [(tt - 1) - 2tb']}{2v \cdot (1 + b'b') - \frac{db'}{dx} \cdot (1 + tt)}$$

$$Y - y = \frac{(b' - t)\cdot[(1 - tt)\cdot b' - 2t]}{2v\cdot(1 + b'b') - \frac{db'}{dx}\cdot(1 + tt)}.$$

Liegt der leuchtende Punkt in unendlicher Entfernung auf der Abscissenlinie, so ist $b' = o$, $\frac{db'}{dx} = o$, und in diesem Fall bleibt

$$X - x = -\frac{t.(tt - 1)}{2v}$$

$$Y - y = +\frac{tt}{v}.$$

Die Untersuchungen über die Brennlinien sind im Allgemeinen sehr verwickelt, und es würde überflüssig seyn, besondre Curven in dieser Rücksicht zu untersuchen, da die Gleichungen der Brennlinien in ihrer ganzen Ausdehnung in der Praxis nicht gebraucht werden, und theoretisch betrachtet ihre Untersuchung mehr in die Geometrie als in die Optik gehört.

§. 251.

Wir kehren jetzt wieder zu den ebenen Spiegeln zurück, und wollen einige Aufgaben vornehmen, die sich auf die Zurückwerfung des Lichts von denselben beziehen. Es sey ein leuchtender Punkt gegeben, und ein anderer Punkt, nach welchem hin reflectirtes Licht von einem gegebenen Punkte des Spiegels gebracht werden soll; es fragt sich, welche Lage soll man dem Spiegel geben, um dies zu bewerkstelligen. Man denke sich von der Stelle des Spiegels aus, wo das Einfallsloth errichtet werden muſs, die Richtungslinien nach dem leuchtenden und dem dunklen Punkt hin bis an die Himmelskugel verlängert, und sie mögen dieselbe in L und in D schneiden (Fig. 33 α.). AB sey der Horizont, P das Zenith; zieht man durch D und L die Bogen gröſster Kreise PD', PL', und legt durch L und D den gröſsten Kreis LD, so läſst sich die Lage der Punkte D und L durch die Bogen

$$BD' = \alpha,\quad DD' = \beta$$
$$BL' = A,\quad LL' = B$$

bestimmen. Verlängert man ebenfalls das Einfallsloth bis an die Himmelskugel, so wird es dieselbe in einem Punkt S schneiden, der in der Mitte des Bogens LD liegt. Man setze $BS' = \varphi$, $SS' = \psi$, so hat man in den beiden Dreiecken SPD, SPL

$$\cos SD = \sin\psi . \sin\beta + \cos\psi . \cos\beta . \cos(\varphi - \alpha)$$
$$\cos SL = \sin\psi . \sin B + \cos\psi . \cos B . \cos(A - \varphi),$$

und da $SD = SL$ seyn muſs, so kommt

$$\sin\psi . \sin\beta + \cos\psi . \cos\beta . \cos(\varphi - \alpha)$$
$$= \sin\psi . \sin B + \cos\psi . \cos B . \cos(A - \varphi).$$

Man hat ferner in denselben Dreiecken

$$\sin(\varphi - \alpha) : \sin SD = \sin PSD : \cos\beta$$
$$\sin(A - \varphi) : \sin SD = \sin PSL : \cos B.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich, da $\sin PSD = \sin PSL$ ist,

$$\sin(\varphi - \alpha) . \cos\beta = \sin(A - \varphi) . \cos B,$$

und wenn man die Gröſsen $\sin(\varphi - \alpha)$, $\sin(A - \varphi)$ entwickelt, und das Ganze durch $\cos\varphi$ dividirt, so erhält man

$$\tang\varphi = \frac{\sin A . \cos B + \sin\alpha . \cos\beta}{\cos\alpha . \cos\beta + \cos A . \cos B}.$$

Ist vermittelst dieses Ausdrucks φ bestimmt, so giebt die Gleichung

$$\tang\psi = \frac{\cos\beta . \cos(\varphi - \alpha) - \cos B . \cos(A - \varphi)}{\sin B - \sin\beta}$$

den Werth des Winkels ψ.

§. 252.

Ist auſserdem noch ein anderer leuchtender Punkt gegeben, dessen Lage durch die Winkel A', B' bestimmt wird, und soll man die Lage eines zweiten Spiegels aufsuchen, die so beschaffen ist, daſs die von diesem leuchtenden Punkt herkommenden Strahlen nach derselben Richtung reflectirt werden, als die vom ersten Spiegel, so hat man, wenn die Lage des Einfallsloths auf diesem Spiegel durch die Winkel ψ', φ' bestimmt wird, die Gleichungen

$$\tang \varphi' = \frac{\sin A' . \cos B' + \sin \alpha . \cos \beta}{\cos \alpha . \cos \beta + \cos A' . \cos B'}$$

$$\tang \psi' = \frac{\cos \beta . \cos(\varphi' - \alpha) - \cos B' . \cos(A' - \varphi)}{\sin B' - \sin \beta}$$

indem man nur in den beiden Gleichungen des vorigen §. statt A, B, φ, ψ, die Gröfsen A', B', φ', ψ' setzt.

§. 253.

Aus dem Gesetze, welches §. 244. entwickelt wurde, dafs nämlich das Bild eines jeden Punktes eben so weit hinter dem Spiegel erscheine, als der Punkt vor dem Spiegel liegt, lassen sich mehrere Erscheinungen erklären, die die Lage der Bilder ausgedehnter Gegenstände betreffen. Ist z. B. der Gegenstand eine grade Linie, die einen gewissen Winkel α mit der Ebene des Spiegels macht, so wird das Bild derselben nothwendig ebenfalls eine grade Linie seyn, die mit dem Spiegel einen Winkel $= \alpha$ bildet, folglich ist der Winkel, welchen der Gegenstand mit dem Bilde einschliefst, $= 2\alpha$. Wenn daher der Gegenstand senkrecht auf dem Spiegel steht, oder $\alpha = 90^0$ ist, so wird $2\alpha = 180^0$, also hat das Bild eine völlig verkehrte Lage. Diese Erscheinung sieht man ganz deutlich bei Gebäuden, Bäumen u. s. w., die am Rande des Wassers stehen, dessen ruhige Oberfläche als Spiegel wirkt, und die Bilder aller am Ufer befindlichen Gegenstände in umgekehrter Lage darstellt.

Macht die spiegelnde Fläche einen Winkel von 45 Grad mit dem Horizont, so zeigen sich die Bilder aller horizontalen Gegenstände in verticaler Lage, und umgekehrt.

§. 254.

Wenn ein Mensch aufrecht vor einem senkrecht hängenden Spiegel steht, so braucht der Spiegel nur halb so lang zu seyn, als der Mensch, wenn dieser sich völlig darin erblicken soll. Denn es sey AB der Spiegel (Fig. 34.), CD der Mensch, so wird FG sein

Bild seyn, wenn wir CF, DG senkrecht auf AB ziehen, und $C'F = CC'$, $D'G = DD'$ machen. Befindet sich ferner das Auge in E, und zieht man die Linien EF, EG, die den Spiegel in H und K durchschneiden, so ist bloſs das Stück HK des Spiegels wirksam. Man hat nun in den beiden Dreiecken EHK, EFG die Proportion

$$EH : EF = HK : FG,$$

und da $EH = \frac{1}{2} EF$, so wird auch $HK = \frac{1}{2} FG = \frac{1}{2} CD$ werden. Dasselbe, was über die Länge des Spiegels gesagt ist, gilt natürlich auch von der Breite desselben.

§. 255.

Läſst man das Sonnenlicht oder das Mondlicht auf einen Spiegel von beliebiger Gestalt fallen, und fängt das zurückgeworfene Licht vermittelst einer weiſsen Fläche auf, so zeigt das zurückgeworfene Licht auf der weiſsen Fläche, solange dieselbe dem Spiegel sehr nahe ist, eine helle Stelle, die die Gestalt des Spiegels besitzt, und erst, wenn man die Fläche weit genug vom Spiegel entfernt, giebt das reflectirte Licht ein kreisförmiges Bild. Diese Erscheinung ist derjenigen ganz analog, welche das durch Oeffnungen scheinende Sonnenlicht zeigt, indem hierbei das Bild der Sonne, welches so weit hinter dem Spiegel liegt, als die Sonne selbst vor demselben, als der Strahlen aussendende Gegenstand, und der Spiegel als die Oeffnung betrachtet werden kann, und wir haben hinreichend gezeigt, daſs bei gröſserer Nähe der auffangenden Fläche der Umkreis des Bildes ziemlich mit dem der Oeffnung übereinstimmt, bei gröſserer Entfernung der auffangenden Fläche hingegen das Bild sich mehr der Gestalt des strahlenden Gegenstandes nähert.

§. 256.

Hält man einen Gegenstand vor einen belegten Glasspiegel, und betrachtet das Bild in einer solchen

Lage des Auges, daſs die nach demselben gezogene Gesichtslinie nur einen kleinen Winkel mit der Ebene des Spiegels bildet, so erhält man auſser dem deutlichen Bilde noch ein schwächeres, welches das erste auf der einen Seite umgiebt, und die Entfernung der Ränder beider Bilder von einander wird desto gröſser seyn, je dicker das Glas des Spiegels ist. Das erste deutliche Bild entsteht durch die Zurückwerfung des Lichts von der hintern belegten Seite des Spiegels, die hier wie ein Metallspiegel wirkt, während das schwache Bild durch diejenigen Strahlen hervorgebracht wird, welche an der vordern Fläche des Glases, ehe sie in den durchsichtigen Körper eindringen, reflectirt werden. Man sieht hieraus, daſs, streng genommen, bloſs das schwache, und wegen seiner geringen Helligkeit unbrauchbare Bild, ein rein catoptrisches ist, während die zur Hervorbringung des eigentlich brauchbaren Bildes nöthigen Strahlen innerhalb des Glases eine Brechung erleiden, wodurch eine, wiewohl bei der gewöhnlich geringen Dicke des Glases unmerkliche, Verzerrung des Bildes hervorgebracht wird. Obgleich nun dieses dioptrisch catoptrische Bild eine für den gewöhnlichen Gebrauch hinreichende Aehnlichkeit mit dem Gegenstande hat, so darf man doch bei Gelegenheiten, wo starke Vergröſserungen eintreten, sich der Glasspiegel aus dem angeführten Grunde nicht bedienen, sondern muſs sie durch Metallspiegel, die nur ein einziges wirklich catoptrisches Bild geben, ersetzen. Um die beiden angeführten Bilder bei einem Glasspiegel deutlich zu sehen, muſs man deswegen das Auge in eine solche Lage bringen, daſs die Gesichtslinie nur einen geringen Winkel mit der Ebene des Spiegels macht, weil bei gröſsern Winkeln die Umrisse beider Bilder einander zu nahe kommen, und dann das schwächere Licht keinen hinreichenden Eindruck auf das Auge machen kann. Uebrigens werden die genauern Untersuchungen, welche die Veränderungen des Bildes

in Glasspiegeln wegen der Brechung des Lichts bestimmen, in der Dioptrik vorkommen.

§. 257.

Wenn alles Licht, welches auf einen Spiegel fällt, auch wieder von demselben zurückgeworfen würde, so müfste nothwendig das Bild eines Gegenstandes dieselbe scheinbare Klarheit oder denselben scheinbaren Glanz besitzen, als der Gegenstand selbst. Dieses ist aber niemals der Fall, indem alle reflectirende Oberflächen einen bedeutenden Theil des auffallenden Lichts verschlucken. Ferner wird es auch noch darauf ankommen, unter welchem Winkel die Gesichtslinie, welche nach dem Bilde gezogen wird, die Ebene des Spiegels schneidet, indem bei verschiedenen Einfallswinkeln die reflectirte Lichtmenge auch verschieden ausfällt, und zwar wächst die Lichtmenge mit dem Einfallswinkel, wenn die Benennung des Einfallswinkels in dem Sinne genommen wird, in welchem wir ihn bisher genommen haben, d. h. dafs unter dem Einfallswinkel der Winkel verstanden wird, welchen der einfallende Strahl mit der im Einfallspunkte errichteten Normale bildet. Diese Bemerkung war deswegen nothwendig, weil manche Schriftsteller unter Einfallswinkel auch den Winkel verstehen, den der einfallende Strahl mit der Ebene des Spiegels bildet.

Das Gesetz, nach welchem sich die reflectirte Lichtmenge in Bezug auf den Einfallswinkel richtet, ist noch unbekannt, und die empirischen Formeln, welche man aufzustellen gesucht hat, um die in dieser Rücksicht angestellten Beobachtungen zu umfassen, scheinen auch in mancher Hinsicht sich blofs auf besondere Fälle zu beziehen. So hat Bouguer aus seinen Versuchen über die Zurückwerfung des Lichts von den Oberflächen des Glases und des Wassers geschlossen, dafs sich die zurückgeworfene Lichtmenge l durch einen Ausdruck von der Form

$$l = a + b \, . \sin\frac{\varepsilon}{2}^{6} + c \, . \sin\frac{\varepsilon}{2}^{12}$$

darstellen liefse, wo ε den Einfallswinkel, und a, b, c unbestimmte Coefficienten bedeuten, die von der Natur der zurückwerfenden Materie abhängen.

Man erhält aus dieser Formel durch Differentiation

$$\frac{dl}{d\varepsilon} = 3 . \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}^{5} \cdot \left(b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^{6}\right),$$

und dies wird Null, wenn entweder $\cos \tfrac{1}{2} . \varepsilon = o$, $\sin \tfrac{1}{2} . \varepsilon = o$ oder $b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^{6} = o$ wäre. Ersterer Werth giebt $\varepsilon = 180^0$ und dies kann nicht mit zu unserer Betrachtung gezogen werden. Der zweite Werth giebt $\varepsilon = o$, und dies ist der Werth, welcher die Lichtmenge l zu einem Minimum macht, indem hierdurch $l = a$ wird, also a die bei senkrecht einfallendem Licht reflectirte Lichtmenge darstellt. Der dritte Werth giebt $\sin\frac{\varepsilon}{2}^{6} = -\frac{b}{2c}$, und dies erfordert, dafs b und c verschiedene Vorzeichen haben, und da ferner $\tfrac{1}{2} . \varepsilon$ nicht gröfser als 45^0 werden kann, dafs auch ohne Rücksicht auf die Vorzeichen $\frac{b}{c} < \tfrac{1}{4}$ sey. Nun wächst aber die Lichtmenge l mit dem Einfallswinkel ε immerfort, folglich wird die Gleichung

$$b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^{6} = o$$

keinen reellen Werth für ε geben, weil sonst für diesen Werth von ε ein Maximum oder Minimum für die Lichtmenge l Statt finden würde; es haben also b und c gleiche Zeichen, und wie man leicht sieht, müssen beide Gröfsen immer positiv ausfallen. Da nun bei Glasspiegeln sowohl, als bei Metallspiegeln, die Lichtmenge, welche bei senkrecht einfallendem Licht reflectirt wird, bedeutend ist, und wohl nicht viel kleiner, als $\tfrac{1}{2}$ gesetzt werden darf, so läfst sich leicht zeigen, dafs im Allgemeinen die zurückgeworfene Lichtmenge, selbst wenn der Einfallswinkel 10 bis 20 Grad betragen sollte, von der bei senkrecht einfallendem Licht reflectirten nicht merklich abweichen werde. Denn setzen wir

$\varepsilon = 90^0$, also $\sin \frac{1}{2} . \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so wird die zurückgeworfene Lichtmenge

$$= a + \tfrac{1}{8} . b + \tfrac{1}{64} . c.$$

Im vortheilhaftesten Fall wird nun höchstens das ganze einfallende Licht zurückgeworfen, welches wir als die Einheit betrachteten, also ist gewiſs

$$a + \tfrac{1}{8} . b + \tfrac{1}{64} . c < 1,$$

und da a ungefähr $= \frac{1}{2}$

$$b + \tfrac{1}{8} . c < 4,$$

also auch gewiſs b kleiner, als 4, da b und c beide positiv sind. Setzen wir nun $\varepsilon = 20^0$, so ist doch $b . \sin \frac{\varepsilon}{2}^6 < . 4 . (\frac{1}{6})^6$, also ganz unbedeutend. Ebenso zeigen auch die über diesen Gegenstand angestellten Versuche, daſs die reflectirte Lichtmenge in der Nähe der Normale nur unmerklich zunimmt. Da nun bei den Anwendungen, die wir in der Folge von diesem Gegenstand bei der Erleuchtung durch gekrümmte Spiegel machen müssen, das Licht fast immer nahe senkrecht einfällt und reflectirt wird, so können wir die Lichtmenge als vom Einfallswinkel unabhängig betrachten, und sie nur in dem Verhältniſse vermindert ansehen, in welchem das senkrecht einfallende Licht durch die Zurückwerfung vermindert wird.

§. 258.

Es ist bekannt, daſs, wenn man zwischen zwei Spiegel einen leuchtenden Gegenstand, z. B. eine Lichtflamme, bringt, man in denselben eine groſse Menge Lichter erblickt, die immer in gröſsern Entfernungen und mit schwächerm Licht auf einander folgen. Zuerst wollen wir den Fall betrachten, wo beide Spiegel einander parallel liegen; wir bezeichnen dieselben durch A und B, und setzen die Entfernung der Lichtflamme vom Spiegel $A = a$, vom Spiegel $B = b$, so daſs also die Entfernung der Spiegel von einander $a + b$ beträgt. Von der Lichtflamme entsteht ein Bild hinter A in der Entfernung $= a$; dies Bild hat die Entfer-

nung $2a + b$ von B, folglich entsteht ein Bild in der Entfernung $2a + b$ hinter B; von diesem entsteht ein Bild hinter A in der Entfernung $3a + 2b$, von diesem wieder hinter B in der Entfernung $4a + 3b$ u. s. w. fort. Folglich liegen, wenn die erste Zurückwerfung von A ausgeht, die Bilder

hinter A in den Entfernungen

a, $3a + 2b$, $5a + 4b$, $7a + 6b$ u. s. w.

hinter B in den Entfernungen

$2a + b$, $4a + 3b$, $6a + 5b$ u. s. w.

Ebenso findet man leicht, daſs, wenn die erste Reflexion vom Spiegel B ausgeht, so liegen die Bilder

hinter B in den Entfernungen

b, $3b + 2a$, $5b + 4a$, $7b + 6a$ u. s. w.

hinter A in den Entfernungen

$2b + a$, $4b + 3a$, $6b + 5a$ u. s. w.

§. 259.

Sind die Spiegel gegen einander geneigt, wie z. B. AB, AD (Fig. 35.), so muſs man folgendermaſsen verfahren, um die Bilderreihen zu erhalten. Durch den Durchschnitt der beiden Spiegelebenen A ziehe man die grade Linie FG, welche als Abscissenlinie betrachtet werden soll, setze den Winkel

$$BAG = \alpha, \quad DAG = 6.$$

In M sey der leuchtende Punkt, dessen Coordinaten $AP = a$, $PM = b$ sind, und M' sein Bild, dessen Coordinaten wir durch $AP' = a'$, $P'M' = b'$ bezeichnen. Die Gleichung der graden Linie AB ist, da in A der Anfangspunkt der Coordinaten angenommen wird, $y = \tang \alpha . x$. Da ferner die Coordinaten der beiden Punkte M und M' gegeben sind, so läſst sich die Gleichung der durch sie gelegten graden Linie finden; sie wird

$$y - b = \frac{b' - b}{a' - a} \cdot (x - a).$$

Nun steht aber die Linie MM' senkrecht auf der

Linie AB, folglich hat man, einem Lehrsatze der analytischen Geometrie zufolge

$$\frac{b' - b}{a' - a} = - \cot \alpha,$$

mithin läfst sich die Gleichung der Linie MM' auch so schreiben:

$$y - b = - \cot \alpha . (x - a).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der frühern $y = x . \text{tang}\, \alpha$, so erhält man, indem x und y gesucht wird, die Coordinaten des Durchschnitts N. Bezeichnen wir die hieraus sich ergebenden Werthe von x und y durch x' und y', so wird

$$MN^2 = (x' - a)^2 + (y' - b)^2$$
$$M'N^2 = (x' - a')^2 + (y' - b')^2,$$

und da $MN = M'N$ ist, so kommt

$$2x'.(a' - a) - (a'a' - aa) + 2y'.(b' - b) = (b'b' - bb),$$

und wenn man die ganze Gleichung durch $a' - a$ dividirt, und bedenkt, dafs $\frac{b' - b}{a' - a} = - \cot \alpha$, so erhält man

$$(2x' - a' - a) = (2y' - b' - b) . \cot \alpha.$$

Vermöge der Gleichung $y = x . \text{tang}\, \alpha$ ist aber auch $2y' . \cot \alpha = 2x'$, folglich, wenn man diesen Werth in vorige Gleichung setzt, so wird

$$a' + a = (b' + b) . \cot \alpha,$$

und wird diese Gleichung mit der vorigen

$$a' - a = - (b' - b) . \text{tang}\, \alpha$$

verbunden, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich a' und b' bestimmen lassen.

§. 260.

Führt man die Rechnung wirklich aus, so kommt, nach den gehörigen Reductionen,

$$a' = a . \cos 2\alpha + b . \sin 2\alpha$$
$$b' = a . \sin 2\alpha - b . \cos 2\alpha.$$

Man setze noch, um die Formeln einfacher zu machen,

$$a = r \,.\, \cos \mu, \quad b = r \,.\, \sin \mu;$$
$$a' = r' \,.\, \cos \mu', \quad b' = r' \,.\, \sin \mu',$$

so geben die vorigen Gleichungen

$$r' \,.\, \cos \mu' = r \,.\, \cos (2\alpha - \mu)$$
$$r' \,.\, \sin \mu' = r \,.\, \sin (2\alpha - \mu),$$

oder auch $r' = r$, $\mu' = 2\alpha - \mu$. Man sieht hieraus, daſs der Abstand des Bildes vom Anfangspunkt der Coordinaten so groſs ist, als der Abstand des Gegenstandes selbst, welches auch natürlicherweise bei allen folgenden Zurückwerfungen Statt finden muſs; wir brauchen uns also nur mit den Winkeln μ, μ', μ'' u. s. w. zu beschäftigen, die die aus A nach den Bildern gezogenen Linien mit der Abscissenlinie FG bilden. Das Bild M' giebt nun ein Bild hinter dem Spiegel AD, und wenn wir für dieses den Winkel durch μ'' bezeichnen, so findet man denselben aus der Gleichung $\mu' = 2\alpha - \mu$, wenn statt μ', α, μ die Winkel μ'', 6, μ' gesetzt werden, also wird

$$\mu'' = 26 - \mu'.$$

Dies Bild bringt wieder ein neues Bild hinter dem Spiegel AB hervor, und wenn für dieses der Winkel $= \mu'''$ gesetzt wird, so ist $\mu''' = 2\alpha - \mu''$. Man hat also folgende Reihe von Gleichungen

$$\mu' = 2\alpha - \mu$$
$$\mu'' = 26 - \mu'$$
$$\mu''' = 2\alpha - \mu''$$
$$\mu^{\text{IV}} = 26 - \mu''' \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergiebt sich auch

$$\mu' = 2\alpha - \mu$$
$$\mu'' = 26 - 2\alpha + \mu$$
$$\mu''' = 4\alpha - 26 - \mu$$
$$\mu^{\text{IV}} = 46 - 4\alpha + \mu$$
$$\mu^{\text{V}} = 6\alpha - 46 - \mu \text{ u. s. w.}$$

Es bilden daher die Bilder folgende Reihen von Winkeln

hinter dem Spiegel AB

$2\alpha - \mu$, $4\alpha - 26 - \mu$, $6\alpha - 46 - \mu$, u. s. w.

hinter dem Spiegel AD

$26 - 2\alpha + \mu$, $46 - 4\alpha + \mu$, $66 - 6\alpha + \mu$, u. s. w.

§. 261.

Geht die Reflexion zuerst vom Spiegel AD aus, so hat man die Reihe von Gleichungen, wenn man die zugehörigen Winkel durch $\mu_{,}, \mu_{,,}, \mu_{,,,} \ldots$ bezeichnet,

$$\mu_{,} = 2\beta - \mu$$
$$\mu_{,,} = 2\alpha - 2\beta + \mu$$
$$\mu_{,,,} = 4\beta - 2\alpha - \mu$$
$$\mu_{IV} = 4\alpha - 4\beta + \mu \text{ u. s. w.}$$

Es bilden daher diese Bilder folgende Reihen von Winkeln

hinter dem Spiegel AB

$$2\alpha - 2\beta + \mu,\quad 4\alpha - 4\beta + \mu,\quad 6\alpha - 6\beta + \mu \text{ u. s. w.}$$

hinter dem Spiegel AD

$$2\beta - \mu,\quad 4\beta - 2\alpha - \mu,\quad 6\beta - 4\alpha - \mu \ldots\ldots$$

Man sieht hieraus, dafs die Winkel immer um $\pm 2.(\beta - \alpha)$, d. h. um den doppelten Neigungswinkel der Spiegel gegen einander, wachsen, folglich wird, wenn die ganze Peripherie ein bestimmtes Vielfaches dieses Neigungswinkels ist, die Anzahl der im Kreise herumliegenden Bilder gleich der Zahl seyn, welche das besagte Vielfache ausdrückt, wobei der Gegenstand selbst als Bild gerechnet wird. Setzt man z. B. $\beta - \alpha = 30^0$, so wird die Reihe der Bilder

hinter dem Spiegel AB

$$\left.\begin{array}{ll} 2\alpha - \mu, & 2\alpha - 60^0 - \mu \\ 2\alpha - 120^0 - \mu, & 2\alpha - 180^0 - \mu \\ 2\alpha - 240^0 - \mu, & 2\alpha - 300^0 - \mu \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mu - 60^0, & \mu - 120^0 \\ \mu - 180^0, & \mu - 240^0 \\ \mu - 300^0, & \mu - 360^0 \end{array}\right\} (2)$$

hinter dem Spiegel AD

$$\left.\begin{array}{ll} 60^0 + \mu, & 120^0 + \mu \\ 180^0 + \mu, & 240^0 + \mu \\ 300^0 + \mu, & 360^0 + \mu \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 60^0 + 2\alpha - \mu, & 120^0 + 2\alpha - \mu \\ 180^0 + 2\alpha - \mu, & 240^0 + 2\alpha - \mu \\ 300^0 + 2\alpha - \mu, & 360^0 + 2\alpha - \mu \end{array}\right\} (2).$$

Da man nun aber einen jeden Winkel um 360^0 vermehren darf, ohne dafs dadurch die Richtung des

Objects, welches durch ihn bestimmt ist, verändert wird, so addire man zu der ersten Reihe von AB, 360°, dann kommt die zweite Reihe von AD. Addirt man zur zweiten Reihe von AB 360°, so erhält man die erste Reihe von AD, indem auch die Winkel μ und $360^0 + \mu$ identisch sind. Es bleiben also bloſs zwölf Bilder übrig, von denen das eine, welches dem Winkel μ oder $360^0 + \mu$ entspricht, mit dem Gegenstand zusammenfällt.

§. 262.

Nachdem wir im Vorhergehenden die Haupteigenschaften des ebenen Spiegels erläutert haben, gehen wir zu den Untersuchungen über die Eigenschaften der Spiegel mit gekrümmten Oberflächen über, unter denen vorzüglich der sogenannte sphärische Hohlspiegel oder hohle Kugelspiegel unsere Aufmerksamkeit verdient. Es sey BD (Fig. 36.) ein aus dem Mittelpunkt C mit dem Halbmesser AC beschriebener Kreisbogen, und $AB = AD$, so kann man sich diesen Bogen um die Linie AC gedreht vorstellen; dieser Bogen beschreibt dann ein Stück einer Kugeloberfläche, und wenn wir die hohle Seite derselben als polirt betrachten, so bietet diese den sphärischen Hohlspiegel dar. Die Linie AC und deren Verlängerung heiſst die Axe des Spiegels, BD die Breite oder der Durchmesser der Oeffnung des Spiegels, A sein Scheitel. Befindet sich nun in der Axe irgend ein leuchtender Punkt, der einen Lichtstrahl auf den Spiegel wirft, so giebt der nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser das Einfallsloth ab, und der zurückgeworfene Strahl befindet sich in der Ebene, welche durch den einfallenden Lichtstrahl und jenen Halbmesser gelegt ist; sie geht also auch durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt C der Kugel, folglich liegt die Axe des Spiegels ganz in der Zurückwerfungsebene, und der Durchschnitt des Spiegels mit dieser Ebene giebt einen Kreisbogen, der dem BAD gleich ist. Wir brauchen also, um den Weg der einfallenden und

zurückgeworfenen Strahlen zu untersuchen, bloſs den Durchschnitt *BAD* und die in dieser Ebene liegenden Strahlen zu betrachten, da für jeden andern Durchschnitt ganz dasselbe gilt.

§. 263.

Nun sey *L* (Fig. 36.) der leuchtende Punkt, *LM* der einfallende Strahl, *CM* der nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser oder das Einfallsloth, *MP* der zurückgeworfene Strahl, der die Axe in *P* schneidet, so werden alle Strahlen, die auf den Kugelspiegel in der Entfernung *AM* von der Axe auffallen, die Axe in *P* schneiden, und daselbst ein Bild des Punktes *L* darstellen. Man setze nun $CL = h$, $AC = r$, $CP = x$ und fälle das Perpendikel *MQ*. Die Lage des einfallenden Strahls ist durch den Winkel $MCA = \alpha$ bestimmt, und man hat

$$MQ = r \,.\, \sin\alpha, \quad CQ = r \,.\, \cos\alpha$$

$$\text{tang}\, MLQ = \frac{MQ}{QL} = \frac{r \,.\, \sin\alpha}{h + r \,.\, \cos\alpha} = \text{tang}\,\lambda,$$

indem wir $MLQ = \lambda$ setzen.

Ferner hat man $CML = CMP = \alpha - \lambda$, $MPQ = 2\alpha - \lambda$, folglich, da im Dreieck *MPC* die Proportion Statt findet

$$MC : PC = \sin MPQ : \sin CMP,$$

so erhält man, mit Einführung unserer Bezeichnungen,

$$r : x = \sin(2\alpha - \lambda) : \sin(\alpha - \lambda)$$

$$r \,.\, \sin(\alpha - \lambda) = x \,.\, \sin(2\alpha - \lambda).$$

Entwickelt man die Gröſsen $\sin(\alpha - \lambda)$, $\sin(2\alpha - \lambda)$, so wird

$$x = r \,.\, \frac{\sin\alpha - \cos\alpha \,.\, \text{tang}\,\lambda}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \,.\, \text{tang}\,\lambda},$$

oder, wenn man statt $\text{tang}\,\lambda$ seinen Werth $\dfrac{r \,.\, \sin\alpha}{h + r \,.\, \cos\alpha}$ setzt

$$x = r \,.\, \frac{\sin\alpha \,.\, (h + r \,.\, \cos\alpha) - r \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\sin 2\alpha \,.\, (h + r \,.\, \cos\alpha) - r \,.\, \cos 2\alpha \,.\, \sin\alpha},$$

und wenn man gehörig reducirt:

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}.$$

§. 264.

Der Nenner des Bruchs $2h \cdot \cos\alpha + r$ nimmt ab, während α wächst, also wird x immer gröfser, je gröfser α ist, und für einen bestimmten Spiegel ist x am gröfsten, sobald die Strahlen vom leuchtenden Punkt auf den Rand des Spiegels fallen. Bezeichnet man also den äufsersten Werth von α durch α', so wird der gröfste Werth von x

$$= \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha' + r},$$

und der kleinste, wenn man $\alpha = o$ nimmt, $= \frac{rh}{2h + r}$. Zwischen diesen beiden Abständen vom Mittelpunkt der Kugel aus liegt eine continuirliche Reihe von Bildern, die alle von dem einzigen Punkt L gebildet werden, und bezeichnet man diesen Raum durch l, so kommt

$$l = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha' + r} - \frac{rh}{2h + r}$$

$$= \frac{2rhh \cdot (1 - \cos\alpha')}{(2h + r) \cdot (2h \cdot \cos\alpha' + r)}.$$

Diese Gröfse wird die L ä n g e n a b w e i c h u n g des Spiegels genannt, und sie wird in zwei Fällen Null; entweder wenn $h = o$, oder wenn $1 - \cos\alpha' = o$, d. h. wenn entweder das Object im Mittelpunkt der Kugel sich befindet, oder wenn der Spiegel eine unendlich kleine Ausdehnung hat.

§. 265.

Fällt das Bild der von der Mitte des Spiegels A reflectirten Strahlen nach E, das Bild der vom Rande reflectirten Strahlen nach G, so ist EG die im vorigen §. angegebene Längenabweichung. Zieht man dann den vom Rande zurückgeworfenen Strahl BG und verlängert ihn, bis er ein in E auf der Axe AL errichtetes

Perpendikel EH in H trifft, so wird EH die Seitenabweichung des Spiegels angeben. Um diese zu finden, hat man

$$EH = EG \cdot \text{tang}\, EGH = EG \cdot \text{tang}\, BGK = EG \cdot \frac{BK}{KG}.$$

Man hat ferner $KG = CK - CG$, und da CG der gröfste Werth von x ist, so hat man den Ausdruck

$$KG = r \,.\, \cos\alpha' - \frac{rh}{2h \,.\, \cos\alpha' + r}$$

$$= r \cdot \frac{h \,.\, (2 \,.\, \cos\alpha'^2 - 1) + r \,.\, \cos\alpha'}{2h \,.\, \cos\alpha' + r}$$

$$BK = r \,.\, \sin\alpha'.$$

Bezeichnet man also die Seitenabweichung durch s, so wird

$$s = \frac{2rhh \,.\, (1 - \cos\alpha') \,.\, \sin\alpha'}{(2h + r) \,.\, (2h \,.\, \cos\alpha' + r)} \cdot \frac{(2h \,.\, \cos\alpha' + r)}{h \,.\, (2 \,.\, \cos\alpha'^2 - 1) + r \,.\, \cos\alpha'}$$

$$= \frac{2rhh \,.\, (1 - \cos\alpha') \,.\, \sin\alpha'}{(2h + r) \,.\, (h \,.\, \cos 2\alpha' + r \,.\, \cos\alpha')}.$$

Beide Abweichungen nennt man insgemein die Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt, weil, wenn z. B. der Spiegel BMD eine elliptische Krümmung besäfse und der Brennpunkt der Ellipse in L sich befände, gar keine Abweichung Statt finden würde, sondern alle reflectirte Strahlen sich im andern Brennpunkt durchschneiden müfsten. Für einen unendlich entfernten Gegenstand, oder überhaupt schon für einen solchen, für den $\frac{r}{h}$ sehr klein wird, hat man die Längenabweichung

$$l = \tfrac{1}{2} r \cdot \frac{1 - \cos\alpha'}{\cos\alpha'},$$

und die Seitenabweichung

$$s = r \cdot \frac{(1 - \cos\alpha') \,.\, \sin\alpha'}{\cos 2\alpha'}.$$

Da nun bei den im Gebrauch vorkommenden Hohlspiegeln der Winkel α' nur wenige Grade fafst, so sieht man hieraus, dafs die Längenabweichung sowohl als die Seitenabweichung immer sehr klein ausfallen werden.

§. 266.

Betrachtet man irgend einen reflectirten Strahl, z. B. MP, so läſst sich derselbe durch die Gleichung einer graden Linie darstellen; diese Gleichung sey

$$Y = mX + N,$$

wo wir die Abscissen vom Mittelpunkt C des Kreises aus rechnen. Die Linie geht durch den Punkt M, dessen Coordinaten $r . \cos\alpha$, $r . \sin\alpha$ sind; setzt man also diese Werthe statt X, Y in vorige Gleichung, so kommt

$$r . \sin\alpha = mr . \cos\alpha + N$$

$$Y - r . \sin\alpha = m . (X - r . \cos\alpha).$$

Es ist ferner $m = \operatorname{tang} MPQ$, und da (§. 263.) $MPQ = 2\alpha - \lambda$ gefunden ist, so kommt

$$m = \operatorname{tang}(2\alpha - \lambda) = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang} 2\alpha . \operatorname{tang}\lambda}.$$

Substituirt man hierin den Werth von $\operatorname{tang}\lambda = \frac{r . \sin\alpha}{h + \cos\alpha}$, so ergiebt sich

$$m = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha . (h + r . \cos\alpha) - r . \sin\alpha}{h + r . \cos\alpha + r . \operatorname{tang} 2\alpha . \sin\alpha}$$

$$= \frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin\alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos\alpha},$$

folglich wird die vollständige Gleichung des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - r . \sin\alpha = \frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin\alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos\alpha} \cdot (X - r . \cos\alpha).$$

Setzt man hierin $Y = o$, so erhält man $X = \frac{rh}{2h . \cos\alpha + r}$, wie im §. 263.

§. 267.

Die vorige Gleichung läſst sich auch so schreiben:

$$Y = \frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin\alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos\alpha} \cdot X$$

$$- \frac{r . \sin\alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos\alpha} \cdot h,$$

und setzt man hierin $\alpha = \alpha'$, so erhält man die Glei-

chung des Strahls BH (Fig. 36.), der vom Rande zurückgeworfen wird. Da nun G der Punkt ist, welcher unter allen dem Spiegel am nächsten liegt, so ist einleuchtend, dafs alle vom Spiegel AB zurückgeworfene Strahlen den Randstrahl BG zwischen B und G durchschneiden müssen. Ferner sieht man sogleich, dafs die Strahlen, welche von Stellen des Spiegels nahe bei A reflectirt werden, sehr nahe bei G den Randstrahl durchschneiden, und dasselbe geschieht auch für Strahlen, welche von Stellen des Spiegels zurückgeworfen werden, die sich nahe am Rande befinden. Es wird also einen gewissen Werth von α geben, für welchen der Durchschnitt am weitesten von G abliegt, und wir wollen denselben nach den bekannten Regeln bestimmen.

§. 268.

Es sey MP dieser Strahl, welcher die Eigenschaft besitzt, dafs NG am gröfsten wird, so mufs auch zugleich das Perpendikel NR ein Maximum werden. Bezeichnen wir die Gleichung dieses Strahls der Kürze wegen durch

$$Y = mX + N,$$

wo m, N die vorhin entwickelten Functionen von α sind, und bezeichnen ferner die Gleichung des Randstrahls durch

$$Y = m'X + N',$$

so kommt, wenn wir X eliminiren,

$$(m' - m) . Y = m'N - mN'$$

$$Y = \frac{m'N - mN'}{m' - m}.$$

Differentiirt man, so wird, wenn man bemerkt, dafs m', N' constante Gröfsen sind, m und N aber von der veränderlichen Gröfse α abhängen,

$$\frac{m'dN . (m' - m) - m'dm . (N' - N)}{(m' - m)^2} = dY,$$

und da bekanntlich, um das Maximum oder Minimum von Y zu finden, $dY = o$ gesetzt werden mufs, so bleibt, da m' nicht Null seyn kann,

$$dN.(m' - m) = dm.(N' - N)$$
$$Ndm - mdN = N'dm - m'dN.$$

Nun hat man aber

$$N = - \frac{hr.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}$$

$$m = + \frac{h.\sin 2\alpha + r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}$$

$$dN = -rh\cdot\frac{h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2}\cdot d\alpha$$

$$dm = \frac{2hh + 3hr.\cos\alpha + rr}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2}\cdot d\alpha$$

$$Ndm - mdN = \frac{2rhh.\sin\alpha^3}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2}\cdot d\alpha$$

$$N'dm - m'dN = \frac{2hhr.\sin\alpha' d\alpha}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2.(h.\cos 2\alpha' + r.\cos\alpha')}$$
$$\times[(h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r).\cos\alpha' - (h + r.\cos\alpha^3)].$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, so bleibt

$$\sin\alpha^3.(h.\cos 2\alpha' + r.\cos\alpha')$$
$$=(h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r).\sin\alpha'.\cos\alpha' - (h + r.\cos\alpha^3).\sin\alpha'.$$

§. 269.

Es würde nun eine überflüssige Arbeit seyn, durch eine vollständige Auflösung den Werth von α hieraus suchen zu wollen, da wir in allen Fällen, wie schon §. 265. erwähnt wurde, die Winkel α und α' als hinreichend klein betrachten können, so daſs die höhern Potenzen der Sinus von α, α' vernachlässigt werden dürfen, und hierdurch reducirt sich vorige Gleichung auf

$$h.\sin\alpha^3 = h.(\tfrac{3}{2}.\sin\alpha'.\sin\alpha^2 - \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'^3) + \tfrac{3}{2}.r.\sin\alpha'(\sin\alpha^2 - \sin\alpha'^2),$$

und nimmt man auſserdem an, daſs h in Vergleich mit r sehr groſs sey, so kommt

$$\sin\alpha^3 = \tfrac{3}{2}.\sin\alpha'.\sin\alpha^2 - \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'^3$$

oder

$$\sin\alpha^2.(\sin\alpha - \sin\alpha') = \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'.(\sin\alpha^2 - \sin\alpha'^2).$$

Theilt man diese Gleichung durch $\sin\alpha - \sin\alpha'$, so bleibt

$$\sin\alpha^2 = \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'.(\sin\alpha + \sin\alpha'),$$

und diese quadratische Gleichung giebt

$$\sin\alpha = \sin\alpha' \text{ und } \sin\alpha = -\tfrac{1}{2}.\sin\alpha',$$

wovon hier bloſs der letzte Werth in Betracht zu ziehen ist. Man hat nun, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\sin\alpha$,

$$m = \frac{2h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1 - \frac{h}{2h+r}\cdot\sin\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right]$$

$$N = -\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right],$$

woraus sich die Werthe von m', N' ergeben, wenn man α' statt α substituirt. Nun war (§. 268.)

$$Y = \frac{m'N - mN'}{m' - m},$$

und wenn man die hier angegebenen Werthe substituirt, so kommt

$$Y = \frac{h}{2h+r}\cdot\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha'.\sin\alpha\,(\sin\alpha' + \sin\alpha),$$

oder da für den gesuchten Werth $\sin\alpha = -\tfrac{1}{2}.\sin\alpha'$ gesetzt werden muſs, so kommt

$$Y = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{2h+r}\cdot\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha'^3.$$

Dieser Werth von Y, um dessen negatives Vorzeichen wir uns weiter nicht zu kümmern brauchen, da dieses bloſs anzeigt, daſs der Durchschnitt auf der Verlängerung GH des Strahls BG genommen werden muſs, wodurch das Perpendikel unter die Axe fällt, giebt uns den Halbmesser des Kreises an, durch welchen alle Strahlen gehen, und der der kleinste Sammlungskreis genannt wird. Man findet übrigens leicht, daſs, unter der Voraussetzung einer geringen Ausdehnung des Spiegels, dieser Halbmesser der vierte Theil der in §. 265. entwickelten Seitenabweichung ist.

§. 270.

Um nun den Abstand dieses kleinsten Sammlungskreises vom Mittelpunkt C des Spiegels zu finden, nehmen wir wieder die beiden Gleichungen

$$Y = mX + N$$
$$Y = m'X + N'$$

vor, aus denen man

$$X = \frac{N - N'}{m' - m}$$

erhält. Es ist nun aber, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von α und α',

$$N - N' = (\alpha' - \alpha) \cdot \frac{hr}{h + r}$$
$$m' - m = (\alpha' - \alpha) \cdot \frac{2h + r}{h + r},$$

folglich wird der gesuchte Abstand

$$X = \frac{hr}{2h + r}.$$

§. 271.

Nimmt man die Formel (§. 263.)

$$x = \frac{rh}{2h \, . \cos \alpha + r} = \frac{r}{2 \, . \cos \alpha + \frac{r}{h}}$$

und setzt h unendlich, so bleibt $x = \frac{r}{2 \, . \cos \alpha}$; wenn man ferner blofs die Strahlen betrachtet, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, so wird $\cos \alpha = 1$, und es bleibt $x = \frac{1}{2} . r$. Da nun Strahlen, welche von einem unendlich entfernten Punkt herkommen, als unter einander parallel laufend angesehen werden können, so sagt man, dafs solche Strahlen, welche parallel mit der Axe auf die Mitte A des Spiegels fallen, sich mitten zwischen dieser und dem Centrum des Spiegels vereinigen. Diesen Vereinigungspunkt nennt man den **Brennpunkt**, und seinen Abstand von der Mitte des Spiegels die **Brennweite** desselben, die man also $= \frac{1}{2} . r$ findet, und welche durch f bezeichnet werden soll. Durch Einführung des Werthes $r = 2f$ wird

$$x = \frac{fh}{h \, . \cos \alpha + f},$$

und für solche Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen,

$$x = \frac{hf}{h+f} \text{ oder } \frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f}.$$

§. 272.

Aus der Gleichung $x = \frac{hf}{h+f}$, läfst sich nun im Allgemeinen übersehen, wie der Ort des Bildes von dem Ort des leuchtenden Punktes in der Axe abhängt, und wir bemerken, dafs für den Normalfall, von welchem wir ausgingen, h die Entfernung des Objects vom Mittelpunkt C des Spiegels vom Spiegel abwärts, x die Entfernung des Bildes vom Mittelpunkt C nach dem Spiegel hin bedeutet, welche Umstände man wegen der etwanigen Veränderung der Vorzeichen wohl bemerken mufs. Setzt man $h = \infty$, so erhält man $x = f$, und man sieht leicht, dafs dieses der gröfste Werth von x ist, solange der Gegenstand vom Spiegel abwärts liegt, d. h. h positiv ist, denn in der Formel $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f}$ wird die Gröfse $\frac{1}{h} + \frac{1}{f}$ desto gröfser, je kleiner h wird, also auch $\frac{1}{x}$ desto gröfser oder x desto kleiner, folglich nehmen x und h zugleich zu und ab. Rückt nun der Gegenstand bis in den Mittelpunkt C des Spiegels, so ist $h = o$, $x = o$, also fällt das Bild mit dem Gegenstand zusammen. Befindet sich der leuchtende Punkt zwischen dem Spiegel und dem Mittelpunkt, so wird h negativ, und die Formel läfst sich so schreiben: $x = -\frac{hf}{f-h}$, welche einen negativen Werth für x giebt, solange $f > h$, d. h. solange der leuchtende Punkt sich zwischen dem Mittelpunkt C des Spiegels und dem Brennpunkt befindet, und dieser negative Werth von x bedeutet, dafs die Entstehung des Bildes jenseits des

Mittelpunkts C vom Spiegel abwärts geschieht. Fällt der leuchtende Punkt in den Brennpunkt, so wird $x = \infty$, d. h. die zurückgeworfenen Strahlen gehen parallel mit der Axe fort. Rückt endlich der leuchtende Punkt dem Spiegel noch näher, als der Brennpunkt selbst liegt, so wird $f - h$ negativ, folglich $x = \frac{hf}{h-f}$ wieder positiv. Man setze in diesem Fall $h = f + p$, wo p immer eine positive Gröſse bedeutet, so ist $x = f \cdot \frac{f+p}{p}$. Da nun der Gegenstand sich immer vor dem Spiegel befinden muſs, so wird p immer kleiner als f bleiben; man hat also

$$f > p, \quad f + p > 2p, \quad \frac{f+p}{p} > 2,$$

also ist $x > 2f$, und hieraus folgt, daſs das Bild hinter den Spiegel fällt; es kann daher kein wirkliches physisches Bild des Gegenstandes entstehen, sondern bloſs ein sogenanntes geometrisches oder virtuelles. Für das Auge wird aber der Anschein da seyn, als ob die zurückgeworfenen Strahlen von einem hinter dem Spiegel liegenden Punkte herkämen.

Endlich kann der Fall eintreten, daſs die Strahlen convergent auf den Hohlspiegel fallen, indem dieselben entweder schon von einem andern Hohlspiegel reflectirt sind, oder durch eine Glaslinse gebrochen wurden. In diesem Fall wird man den Gegenstand als hinter dem Spiegel liegend annehmen müssen, und in der allgemeinen Formel $x = \frac{fh}{f+h}$ wird $h = -2f - q$ gesetzt werden, wo q eine fortwährend positive Gröſse bedeutet. Hierdurch wird $x = \frac{2f+q}{f+q} \cdot f$, also durchaus positiv, und zwar, wie sich leicht beweisen läſst, immer kleiner als $2f$; denn es ist auch

$$x = 2f \cdot \frac{2f+q}{2f+2q},$$

und da $2f + q < 2f + 2q$, so wird der Factor $\frac{2f + q}{2f + 2q}$ kleiner als die Einheit seyn, folglich auch x kleiner als $2f$ werden. Der kleinste Werth, den der Bruch $\frac{2f + q}{2f + 2q}$ erhalten kann, findet für $q = \infty$ Statt, und dann erhält er den Werth $\frac{1}{2}$, folglich ist x zwischen den Grenzen f und $2f$ enthalten. Hieraus schliefsen wir, dafs das Bild, welches vermittelst convergenter Strahlen durch einen Hohlspiegel gebildet wird, immer zwischen dem Spiegel und seinem Brennpunkt liegt.

§. 273.

Wir wollen nun den Halbmesser des kleinsten Sammlungskreises und seine Entfernung vom Mittelpunkt des Spiegels aufsuchen, wenn der leuchtende Punkt im Brennpunkte liegt. Nimmt man die beiden in §. 269 und 270. entwickelten Ausdrücke dieser Gröfsen

$$Y = -\frac{1}{4} \cdot \frac{hr}{h + r} \cdot \frac{h}{2h + r} \cdot \sin \alpha'^3$$

$$X = \frac{hr}{2h + r},$$

so mufs man in denselben, wenn sich der leuchtende Punkt im Brennpunkt befindet, $h = -\frac{1}{2} . r$ setzen, wodurch aber beide Ausdrücke einen unendlich grofsen Werth erhalten. Es wird also für diesen Fall nöthig seyn, auf die ursprünglichen Ausdrücke zurückzugehen. Setzt man in den Gleichungen

$$N = -\frac{hr . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha}$$

$$m = +\frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha}$$

$h = -\frac{1}{2} . r$, so kommt

$$N = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{1}{2} . \cos 2\alpha}$$

$$m = \frac{\sin \alpha . (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha - \frac{1}{2} . \cos 2\alpha},$$

und wenn man diese Ausdrücke in Reihen entwickelt,

$$N = r.\sin\alpha.(1 - \sin\alpha^2 + \tfrac{5}{4}.\sin\alpha^4)$$
$$m = \sin\alpha^3.(1 - \tfrac{3}{4}.\sin\alpha^2)$$
$$m'N - mN' = r.\sin\alpha.\sin\alpha'.(\sin\alpha'^2 - \sin\alpha^2)$$
$$m' - m = \sin\alpha'^3 - \sin\alpha^3.$$

Da nun im §. 268. allgemein $Y = \dfrac{m'N - mN'}{m' - m}$ gefunden ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe, wenn man zugleich Zähler und Nenner durch $\sin\alpha' - \sin\alpha$ dividirt, den Ausdruck

$$Y = r\cdot\frac{\sin\alpha'.\sin\alpha.(\sin\alpha' + \sin\alpha)}{\sin\alpha'^2 + \sin\alpha'.\sin\alpha + \sin\alpha^2}.$$

Hierin muſs man, nach §. 269., um Y zu einem Maximum zu machen, $\sin\alpha = -\tfrac{1}{2}.\sin\alpha'$ setzen, und dann wird

$$Y = -\tfrac{1}{3}.r.\sin\alpha'.$$

Was nun den Werth von X betrifft, so hat man denselben nach §. 270.

$$X = \frac{N - N'}{m' - m},$$

und da man aus vorigen Ausdrücken

$$N - N' = r.(\sin\alpha - \sin\alpha') - r.(\sin\alpha^3 - \sin\alpha'^3)$$
$$m' - m = \sin\alpha'^3 - \sin\alpha^3$$

findet, so kommt

$$X = \frac{-r}{\sin\alpha^2 + \sin\alpha.\sin\alpha' + \sin\alpha'^2} + r$$
$$= -\frac{4r}{3.\sin\alpha'^2} + r,$$

indem man $-\tfrac{1}{2}.\sin\alpha'$ statt $\sin\alpha$ setzt.

§. 274.

Wir können aus den Formeln, welche für die Erscheinungen des hohlen Kugelspiegels gelten, unmittelbar auch die Erscheinungen ableiten, die der erhabene Kugelspiegel darbietet, wobei wir uns ebenfalls nur auf den Fall beschränken, in welchem bloſs die der Axe

unendlich nahe liegenden Strahlen betrachtet werden. Die allgemeine Formel war

$$x = \frac{hr}{2h + r}.$$

Setzen wir den Abstand des leuchtenden Punkts von der Mitte oder dem Scheitel A des Spiegels $= h'$, den Abstand des Bildes von demselben Punkte $= x'$, so hat man die beiden Gleichungen

$$x = r - x'$$
$$h = h' - r;$$

und durch Substitution dieser Werthe in vorige Gleichung kommt auch

$$r - x' = \frac{(h' - r) . r}{2h' - r}$$

$$x' = \frac{h' r}{2h' - r},$$

welche Gleichung ebenfalls für den Hohlspiegel gilt. Um dieselbe nun dem erhabenen Kugelspiegel anpassen zu können, braucht man nur den Radius r negativ zu nehmen; hierdurch wird

$$x' = - \frac{h' r}{r + 2h'}.$$

Da nun h nie negativ werden kann, so sieht man hieraus, daſs x' immerwährend negativ bleibt, d. h. der leuchtende Punkt mag sich vor dem Spiegel befinden wo er will, so wird doch immer sein Bild hinter dem erhabenen Spiegel zu liegen scheinen, also findet bei dem erhabenen Kugelspiegel immer nur ein geometrisches oder virtuelles Bild des Gegenstandes Statt. Setzt man in einer der Formeln, welche x' ausdrücken, $r = \infty$, so erhält man $x' = - h'$, d. h. das Bild liegt so weit hinter dem Spiegel, als der Gegenstand vor demselben sich befindet. Dies lieſs sich leicht voraussehn, indem wir durch die Annahme, der Halbmesser des Spiegels sey unendlich groſs, denselben auf einen Planspiegel reducirt haben, von welchem dieses angegebene Gesetz schon früher erwiesen worden.

§. 275.

Wir haben bis jetzt bloſs den Fall betrachtet, wo der Punkt, von welchem Lichtstrahlen auf den Spiegel fielen, in der Axe selbst lag; und der allgemeinere Fall, wo der leuchtende Punkt sich auſserhalb der Axe befindet, läſst sich durch eine einfache Betrachtung auf vorigen zurückführen. Bedenkt man nämlich, daſs bei einem Kugelspiegel die Axe keine absolut bestimmte Linie ist, die sich durch besondere Eigenschaften von andern durch den Mittelpunkt C nach dem Spiegel gezogenen Linien auszeichnet, wie dies z. B. bei einem Spiegel der Fall seyn würde, dessen Durchschnitt eine Parabel, Ellipse, Hyperbel oder andere krumme Linien gäbe, so wird eine jede Linie, welche durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt des Spiegels gelegt ist, wenn sie auch nicht die Mitte des Spiegels trifft, als Axe betrachtet werden können, und wir wollen diese Linie die Nebenaxe nennen. Man lege nun durch diese Nebenaxe und die Hauptaxe eine Ebene, so schneidet diese den hohlen Kugelspiegel in einem Kreisbogen BAD (Fig. 37.), und alle Strahlen, welche in dieser Ebene auf den Spiegel fallen, werden in derselben Ebene wieder zurückgeworfen.

§. 276.

Es sey C der Mittelpunkt des Spiegels (Fig. 37.), AC seine Hauptaxe, L' ein auſserhalb der Axe gelegener leuchtender Punkt, so wird $L'CE$ die Nebenaxe seyn, welche in E senkrecht auf der Oberfläche des Spiegels steht. $L'M$ sey irgend ein auf den Spiegel fallender Strahl, der, zurückgeworfen, die Nebenaxe in N schneidet, so hat man, wenn der Halbmesser der Kugel, aus welchem der Spiegel geschnitten wird, wie früher die Bezeichnung r erhält, ganz analog mit der Formel

$$x = \frac{hr}{2h \,.\, \cos\alpha + r},$$

die für diesen Fall passende

$$CN = \frac{CL' . r}{2CL' . \cos MCE + r}.$$

Nun sey der Winkel $L'CG = ACE = \delta$, und $MAC = \alpha$, so wird, wenn aufserdem $CL' = H$ gesetzt wird,

$$CN = \frac{Hr}{2H . \cos (\alpha + \delta) + r}.$$

Fällt man das Perpendikel NP auf die Hauptaxe, und setzt $CP = \xi$, $NP = - \eta$, um die unterhalb der Axe liegende Lage anzudeuten, so wird

$$\eta = - CN . \sin \delta = \frac{- Hr . \sin \delta}{2H . \cos (\alpha + \delta) + r}$$

$$\xi = + CN . \cos \delta = \frac{Hr . \cos \delta}{2H . \cos (\alpha + \delta) + r},$$

und durch diese beiden Coordinaten ist die Lage des Bildes eines aufserhalb der Axe liegenden Punktes gegen die Hauptaxe bestimmt, da die Ordinate η immer in der Ebene liegt, die durch den leuchtenden Punkt und die Hauptaxe gelegt ist.

§. 277.

Fällt man das Perpendikel $L'G$ und bezeichnet dessen Länge durch l, so ist dieser Abstand des leuchtenden Punkts von der Hauptaxe $l = H . \sin \delta$, folglich läfst sich der Werth von η auch so schreiben:

$$\eta = - \frac{lr}{2H . \cos (\alpha + \delta) + r},$$

oder wenn wir, wie immer geschehen kann, die Winkel α, δ als sehr klein betrachten, so dafs $\cos (\alpha + \delta) = 1$ gesetzt wird, so erhalten wir

$$\eta = - \frac{lr}{2H + r}.$$

Solange also der Factor $\frac{r}{2H + r}$ positiv ist, bleibt η negativ; d. h. das Bild eines ausgedehnten Gegenstandes wird in diesem Fall verkehrt erscheinen. Nun ist $\frac{r}{2H + r}$ positiv, solange H positiv ist, d. h. während

der Gegenstand jenseits des Mittelpunkts L liegt, ferner auch dann, wenn H negativ, aber r gröſser als $2H$ ist, d. h. während der Gegenstand sich zwischen dem Mittelpunkt des Spiegels und dem Brennpunkt befindet. Liegt endlich der leuchtende Punkt zwischen dem Brennpunkt und dem Mittelpunkt des Spiegels, so wird der Factor $\frac{r}{2H+r}$ negativ, also η positiv, und dies ist ein Anzeichen, daſs der Gegenstand mit dem Bilde einerlei Lage hat.

§. 278.

Wenn man das Licht betrachtet, welches, von einem in der Axe befindlichen leuchtenden Punkt ausgehend, auf eine unendliche schmale Zone des hohlen Kugelspiegels fällt, so wird dasselbe Licht nach der Reflexion, wenn es durch eine senkrecht auf der Axe stehende Ebene aufgefangen wird, auf dieser Ebene einen Kreisring von unendlich schmaler Breite bilden, dessen Mittelpunkt in der Axe befindlich ist. Das Verhältniſs der Breite der Zone auf dem Kugelspiegel zu der des Kreisringes auf der Tafel ist natürlich von der Lage der Ebene gegen den Spiegel und von der Beschaffenheit des Spiegels selbst abhängig, und wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, dieses Verhältniſs im Allgemeinen zu bestimmen.

§. 279.

Die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls ist in §. 268. gefunden worden

$$Y = mX + N,$$

wo, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\sin\alpha$, die Gröſsen m und N durch folgende Ausdrücke dargestellt werden:

$$m = \frac{2h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1 - \frac{h}{2h+r}\cdot\sin\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right]$$

$$N = -\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right].$$

Gesetzt nun, der Abstand der schneidenden Ebene vom Mittelpunkt C des Spiegels sey, nach dem Spiegel zu gezählt, $= t$, so wird der Werth von Y, welcher für $X = t$ Statt findet, durch die Gleichung

$$Y = mt + N$$

gegeben; dann ist aber dieser Werth von Y nichts anders, als der Abstand des Durchschnittspunktes des reflectirten Strahls mit der auffangenden Ebene von der Axe, oder der Halbmesser des einen Kreises, der zur Bildung des concentrischen Kreisringes dient. Bezeichnet man diesen Werth von Y durch u, so ist

$$u = mt + N.$$

§. 280.

Wächst nun der Winkel um $d\alpha$, so erhielte man, durch Substitution von $\alpha + d\alpha$, statt α in voriger Gleichung, den Werth des Abstands des Durchschnittspunktes für den nächst folgenden Strahl, und so wie u dem Werth α entsprach, so wird $u + du$ dem Werth $\alpha + d\alpha$ zugehören, wo, wie man leicht sieht, du die Breite des concentrischen Kreisringes ist, während $rd\alpha$ die Breite der reflectirenden Zone auf dem Kugelspiegel angiebt. Durch Differentiation der Gleichung

$$u = mt + N$$

erhält man nun den Werth von du,

$$du = tdm + dN,$$

und es ergeben sich die Werthe von dm und dN folgendermaſsen:

$$dm = \frac{2h + r}{h + r} \cdot \cos\alpha \left[1 - \frac{3h}{2h + r} \cdot \sin\alpha^2 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{4h + r}{h + r} \cdot \sin\alpha^2\right] d\alpha$$

$$dN = -\frac{hr}{h + r} \cdot \cos\alpha \left[1 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{4h + r}{h + r} \cdot \sin\alpha^2\right] d\alpha,$$

oder, wenn man noch statt $\cos\alpha$ seinen Werth $1 - \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha^2$ setzt,

$$dm = \frac{2h + r}{h + r} \cdot d\alpha \left[1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{8h + r}{2h + r} \cdot \sin\alpha^2 + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{4h + r}{h + r} \cdot \sin\alpha^2\right]$$

$$dN = -\frac{hr}{h + r} \cdot d\alpha \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{11h + 2r}{h + r} \cdot \sin\alpha^2\right].$$

§. 281.

Der Inhalt der ganzen Zone, welche reflectirtes Licht auf die auffangende Ebene wirft, ist bekanntlich $2\pi rr . \sin \alpha . d\alpha$, und der Inhalt des concentrischen Kreisringes, der das reflectirte Licht auffängt, $= 2\pi u du$. Bezeichnet man also die Dichtigkeit des Lichts auf dem Hohlspiegel durch ϱ', auf der auffangenden Tafel durch ϱ, so müssen die Producte aus den Flächen in die Dichtigkeiten gleich grofs seyn, wenn auf dem Wege kein Licht verloren geht. Man hat also

$$\varrho' rr . \sin \alpha . d\alpha = \varrho u du$$

$$\varrho = \frac{\varrho' rr d\alpha}{u du} \cdot \sin \alpha.$$

Beschränken wir uns auf den Fall, wo der leuchtende Punkt in sehr grofser Entfernung vom Spiegel sich befindet, so wird

$$m = 2 . \sin \alpha \, (1 + \tfrac{3}{2} . \sin \alpha^2)$$

$$N = - r . \sin \alpha \, (1 + 2 . \sin \alpha^2)$$

$$dm = 2 d\alpha \, (1 + 4 . \sin \alpha^2)$$

$$dN = - r d\alpha \, (1 + \tfrac{11}{2} . \sin \alpha^2)$$

$$u = \sin \alpha \, [2t - r + (3t - 2r) \sin \alpha^2]$$

$$du = d\alpha \, [2t - r + (8t - \tfrac{11}{2} . r) \sin \alpha^2]$$

$$u du = \sin \alpha d\alpha \, [(2t - r) + (11t - \tfrac{15}{2} . r) \sin \alpha^2] (2t - r).$$

Man erhält also allgemein

$$\varrho = \frac{\varrho' rr}{(2t - r)^2} \left[1 - \frac{11t - \tfrac{15}{2} . r}{2t - r} \cdot \sin \alpha^2 \right].$$

§. 282.

Für diesen besondern Fall, wo $\frac{r}{h} = o$ angenommen wird, lassen sich die genauern Formeln ohne zu grofse Weitläufigkeit anwenden. Man hat nämlich (§. 268.)

$$m = \frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha}$$

$$N = - \frac{hr . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha},$$

also für den Fall, daſs $\frac{r}{h} = o$ ist,

$$m = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$N = - r \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$u = \frac{2t \, . \cos\alpha - r}{\cos 2\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$du = \frac{2t - r\,(\cos\alpha + \sin\alpha \, . \sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha^2} \cdot d\alpha$$

$$\varrho = \frac{\varrho' r \, . \cos 2\alpha}{2t \, . \cos\alpha - r} \cdot \frac{r \, . \cos 2\alpha^2}{2t - r \, . \cos\alpha - r \, . \sin\alpha \, . \sin 2\alpha}.$$

Geht die auffangende Ebene durch den Brennpunkt, so daſs also $2t = r$ ist, so läſst sich die im vorigen §. entwickelte Formel für die Bestimmung der Dichtigkeit nicht gebrauchen, weil dann die einzelnen Glieder unendlich groſs werden. Die genaue giebt hingegen

$$\varrho = \frac{\varrho' \, . \cos 2\alpha}{\cos\alpha - 1} \cdot \frac{\cos 2\alpha^2}{(1 - \cos\alpha) - \sin\alpha \, . \sin 2\alpha},$$

und aus dieser findet sich, daſs, wenn die auffangende Tafel durch den Brennpunkt geht, in der Axe selbst die Dichtigkeit des Lichts unendlich groſs ist.

§. 283.

Wenn man in der Gleichung

$$du = \frac{2t - r\,(\cos\alpha + \sin\alpha \, . \sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha^2} \cdot d\alpha$$

das Differentialverhältniſs $\frac{du}{d\alpha} = o$ setzt, so ergiebt sich

$$2t = r \, . \cos\alpha + r \, . \sin\alpha \, . \sin 2\alpha,$$

oder auch, da $\sin 2\alpha = 2 \, . \sin\alpha \, . \cos\alpha$ und $\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$, die Gleichung

$$\cos\alpha^3 = \tfrac{3}{2} \, . \cos\alpha - \frac{t}{r},$$

und der hieraus folgende Werth des $\cos\alpha$ giebt die Gröſse des Winkels α an, für welchen u ein Maximum

wird, also den Halbmesser des Kreises, innerhalb dessen alles reflectirte Licht aufgefangen wird. Man kann aber einfacher hierzu durch die Betrachtung des Ausdrucks (§. 281.)

$$u = \sin\alpha\ [(2t - r) + (3t - 2r) . \sin\alpha^2]$$

gelangen. So lange nämlich die beiden Glieder $2t - r$, $3t - 2r$ gleiche Zeichen haben, wächst u mit α fortwährend, also findet der gröfste Werth von α dann Statt, wenn man α' für α setzt, also den Werth von α, welcher für die Randstrahlen gilt. Diese Bedingung wird immer Statt finden, solange die auffangende Tafel jenseits des Mittelpunkts C von dem Spiegel abwärts gehalten wird; ferner auch noch solange, als $3t > 2r$ ist; denn dann hat man $3t - 2r$ und $2t - r$ positiv. Zwischen den Grenzen $t = r$ bis $t = \frac{2}{3}.r$ giebt also auch der Werth von $\alpha = \alpha'$ den gröfsten Werth von u. Ist aber t zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}.r$ und $\frac{1}{2}.r$ enthalten, so haben beide Glieder ungleiche Zeichen. Von $t = \frac{1}{2}.r$ bis $t = o$ sind aber beide Zeichen wieder gleich. Es würde also blofs zwischen den Werthen $t = \frac{2}{3}.r$ und $t = \frac{1}{2}.r$ nöthig seyn, einen andern Werth statt α als den gewöhnlichen für die Randstrahlen geltenden α' zu substituiren. Allein man würde dann meistentheils einen Werth von α finden, der weit aufserhalb der Grenze α' fällt, und bedenkt man, dafs von den beiden Gliedern, welche u ausdrücken, das erste im Allgemeinen bedeutend gröfser als das zweite ist, da die Hohlspiegel immer nur wenig Grade fassen, so hängt der Werth von u hauptsächlich von dem Gliede $(2t - r).\sin\alpha$ ab, das mit α immer wächst, bis $\alpha = \alpha'$ wird. Man darf also allgemein den Halbmesser des Kreises, der alles Licht in sich fafst,

$$u' = \sin\alpha'\ [(2t - r) + (3t - 2r) . \sin\alpha'^2]$$

setzen.

§. 284.

Nur der eine Fall ist noch näher zu betrachten, wo die auffangende Ebene dem Brennpunkt sehr nahe

liegt. Dann ist nämlich $2t - r$ beinahe Null, so dafs dieses Glied leicht einerlei Werth mit dem darauf folgenden

$$(3t - 2r) \, . \sin \alpha'^2$$

haben könnte, also die letzte Formel des vorigen §. unrichtig würde, weil die Bedingungen, auf welche sie gegründet ist, nicht mehr gültig sind. Man setze daher $2t - r = ir$, wo i eine sehr kleine Zahl ist, und substituirt man diesen Werth von t in die Gleichung (§. 281.)

$$du = d\alpha \, [(2t - r) + (8t - \tfrac{11}{2} . r) . \sin \alpha^2],$$

so erhält man, mit Vernachlässigung des Productes $i . \sin \alpha^2$,

$$du = rd\alpha \, (i - \tfrac{3}{2} . \sin \alpha^2),$$

also ist die Gleichung, welche den Werth von α für das Maximum von u bestimmt,

$$i - \tfrac{3}{2} . \sin \alpha^2 = o.$$

Hieraus ergiebt sich $\sin \alpha^2 = \frac{2}{3} . i$; da aber α nie gröfser als α' werden soll, so wird i den Werth $\frac{3}{2} . \sin \alpha'^2$ nicht übersteigen dürfen, und man kann daher allgemein

$$i = \tfrac{3}{2} . \sin \alpha'^2 . \sin 6^2$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha' . \sin 6$$

setzen, wo 6 einen völlig willkürlichen Winkel bedeutet. Solange also

$t = \frac{1}{2} . r + \frac{3}{4} . r . \sin \alpha'^2 . \sin 6^2$, d. h. $t - \frac{1}{2} . r > \frac{3}{4} . r . \sin \alpha'^2$

ist, wird der Werth von $\alpha = \alpha'$ keinem Maximum entsprechen. Nun hatten wir

$$u = \sin \alpha \, [(2t - r) + (3t - 2r) . \sin \alpha^2],$$

also, wenn man vorigen Werth von t hierin substituirt, so wird

$$u = r . \sin \alpha \, (\tfrac{3}{2} . \sin \alpha'^2 . \sin 6^2 - \tfrac{1}{2} . \sin \alpha^2),$$

oder, wenn man für das Maximum von u $\sin \alpha = \sin \alpha' . \sin 6$ setzt,

$$u' = r . \sin \alpha'^3 . \sin 6^3.$$

§. 285.

Die ganze Lichtmenge, welche auf den Kreis fällt, wird gefunden, indem man die Dichtigkeit des Lichts

mit dem Element des Kreises, das wir hier als einen concentrischen unendlich schmalen Kreisring betrachteten, multiplicirt, und das Product durch Integration über die ganze Kreisfläche ausdehnt. Nun war die Dichtigkeit $= \varrho$, das Element des Kreises $= 2\pi u du$, also wird die Lichtmenge

$$= 2\pi \int \varrho u du.$$

Nach §. 281. hat man aber $\varrho u du = \varrho' rr . \sin \alpha . d\alpha$, also die Lichtmenge

$$L = 2\pi \varrho' rr \int \sin \alpha . d\alpha.$$

Nimmt man das Integral von $\alpha = o$ bis $\alpha = \alpha'$, so ergiebt sich

$$L = 4\pi \varrho' rr . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2,$$

und theilt man die Lichtmenge durch die Fläche des Kreises $= \pi uu$

$$= 4\pi . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2 . \cos \tfrac{1}{2}\alpha'^2 \, (2t - r)^2,$$

mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\sin \alpha$, so erhält man, wie in der Lehre von der Erleuchtung bewiesen wurde, die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf der erleuchteten Fläche, und diese wird natürlich auch der scheinbaren Helligkeit proportional seyn. Bezeichnet man dieselbe durch ϱ^0, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho'}{\cos \tfrac{1}{2}\alpha'^2} \cdot \left(\frac{r}{2t - r}\right)^2.$$

Zählt man die Abstände statt vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels vom Brennpunkte aus, und setzt diese Abstände $= t'$, so ist $t = \tfrac{1}{2}.r + t'$, $2t - r = 2t'$, und wenn man die Brennweite des Spiegels selbst $\tfrac{1}{2}.r = f$ nimmt, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho'}{\cos \tfrac{1}{2}\alpha'^2} \cdot \frac{ff}{t't'}.$$

Man sieht hieraus, daſs nach dieser Theorie die Erleuchtung der Ebene in gleichen Abständen auf beiden Seiten des Brennpunkts auch gleich groſs sind.

§. 286.

Wir haben nun freilich bei diesen Untersuchungen über die Erleuchtung einer Ebene vermittelst des von

einem Hohlspiegel reflectirten Lichts, den Umstand nicht weiter berücksichtigt, dafs nicht von allen Stellen des Spiegels das Licht unter gleichen Winkeln zurückgeworfen wird, wodurch freilich, streng genommen, eine Abänderung der gefundenen Formeln Statt finden könnte. Allein nach dem, was in §. 257. über die bei verschiedenen Einfallswinkeln Statt findende Vermehrung oder Verminderung der zurückgeworfenen Lichtmenge gesagt ist, sieht man leicht ein, dafs, da der zurückgeworfene Strahl bei den gewöhnlichen Hohlspiegeln immer nur wenige Grade von dem Einfallslothe abweicht, die Aenderung der Lichtstärke nur äufserst gering, und wohl immer unmerklich seyn wird. Man sollte also durchaus geneigt seyn, zu glauben, dafs die im vorigen §. entwickelte Formel über die Erleuchtung von Ebenen, die in verschiedenen Entfernungen vom Spiegel aufgestellt sind, da sie auf lauter Sätzen beruht, gegen die im Allgemeinen, so weit wir die Natur des Lichts kennen, nichts einzuwenden ist, mit der Erfahrung übereinstimmen müfste. Nichts desto weniger findet hierbei ein bedeutender Unterschied zwischen der Theorie und der Beobachtung Statt, indem z. B., wenn man in gleichen Entfernungen diesseits und jenseits des Brennpunkts eines Hohlspiegels weifse Flächen aufstellt, die jenseits des Brennpunkts aufgestellte bei Weitem schwächer erleuchtet erscheint, als die andere, obgleich der Theorie nach, in gleichen Abständen vom Brennpunkt, die Erleuchtung auch gleich seyn sollte.

§. 287.

Um die Gröfse der Schwächung des Lichts hinter dem Brennpunkt, in Vergleich mit der Lichtstärke in derselben Entfernung vor dem Brennpunkt, genauer auszumitteln, stellte Captain Kater eine Reihe von Versuchen an, die er in den *Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year* 1814 genauer beschrieben hat (pag. 234 bis 247.), und wir

wollen hier einen kurzen Auszug der von ihm erhaltenen Resultate geben.

Der bei diesen Versuchen angewandte Hohlspiegel war aus einem sehr schönen Newtonianischen Telescop genommen; der Durchmesser seiner Oeffnung betrug 4,6 Zoll, seine Brennweite 22,5 Zoll; der Winkel α' würde also durch die Gleichung $\sin\alpha' = \frac{1}{4}\cdot\frac{4,6}{22,5} = \frac{23}{450}$ gegeben werden, d. h. $\alpha' = 2^0 55' 47''$. Kater zog nun auf einer Karte eine Linie, die er in Zehntheile eines Zolles theilte, und fing das von einer vierzehn Fuſs entfernten Lichtflamme reflectirte Licht auf, zuerst diesseits des Brennpunkts, prägte sich die Helligkeit des erleuchteten Kreises so genau als möglich ein, und schob dann die Karte jenseits des Brennpunkts, bis ihm die Helligkeit gleich groſs schien. Zugleich wurden die Durchmesser der auf dem Blatte erscheinenden leuchtenden Kreise gemessen. Bezeichnen wir den Durchmesser vor dem Brennpunkt durch $2U^0$, den Durchmesser des Kreises hinter dem Brennpunkt durch $2U'$, so gab ihm eine erste Reihe von Versuchen

$2U^0 = 2{,}4$ Zoll;	$2U' = 1{,}7$ Zoll
- $= 2{,}5$ - ;	- $= 1{,}7$ -
- $= 2{,}5$ - ;	- $= 1{,}7$ -
- $= 2{,}5$ - ;	- $= 1{,}8$ -

Eine zweite Reihe von Versuchen gab

	$2U^0 = 2{,}43$ Zoll;	$2U' = 1{,}575$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}600$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}450$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}625$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}625$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}600$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}650$
	- $= 2{,}43$ - ;	- $= 1{,}500$
Mittel	$2U^0 = 2{,}43$;	$2U' = 1{,}578.$

§. 288.

Obgleich nun Kater diese Beobachtungen in Verbindung mit mehrern Personen angestellt hatte, die

ebenfalls ihr Urtheil über die Gleichheit der Helligkeit abgeben mufsten, so schien es ihm doch der Genauigkeit in der Beurtheilung etwas nachtheilig zu seyn, dafs man sich bei der Vergleichung auf die Treue des Gedächtnisses rücksichtlich der Helligkeit des diesseits des Brennpunkts liegenden Kreises verlassen mufste. Er suchte daher den Versuch so einzurichten, dafs man beide Bilder zu gleicher Zeit erhielt. Er fand dann, dafs in folgenden Entfernungen von dem Bilde der Lichtflamme die Erleuchtungen gleich stark waren, wenn wir die Entfernungen nach dem Spiegel zu durch T^0, von dem Spiegel abwärts durch T' bezeichnen

T^0	= 15,25 Zoll;	T'	= 10 Zoll
-	= 15,75 - ;	-	= 10 -
-	= 15,30 - ;	-	= 10 -
-	= 15,13 - ;	-	= 10 -
-	= 16,25 - ;	-	= 10 -
-	= 15,25 - ;	-	= 10 -
-	= 14,25 - ;	-	= 10 -
-	= 15,37 - ;	-	= 10 -
-	= 14,75 - ;	-	= 10 -
Mittel T^0	= 15,26 Zoll;	T'	= 10 Zoll.

§. 289.

Bezeichnen wir, wie früher, den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels durch h, den Halbmesser der Krümmung des Spiegels durch r, den Abstand des Durchschnitts des zurückgeworfenen Strahls mit der Axe durch x, so ist (§. 263.)

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}$$

Nun ist in vorliegendem Beispiel $r = 2f = 45$ Zoll, $h + r = 14$ Fufs $= 168$ Zoll, $h = 123$ Zoll, also wird

$$x = \frac{41 \times 45}{82 \cdot \cos\alpha + 15}$$

$$= 19{,}02 + 8{,}04 \cdot \sin\alpha^2.$$

Da nun $\sin\alpha' = \frac{23}{450}$, so beträgt das zweite Glied höch-

stens 0,02 Zoll, und wir können also allgemein $x = 19{,}03$ Zoll setzen. Bezeichnet man ferner den Abstand der schneidenden Ebene vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels durch t, so hat man, nach §. 279., den Halbmesser des erleuchteten Kreises

$$u = mt + N,$$

wo m und N folgende Werthe haben:

$$m = \frac{2h + r}{h + r} \cdot \sin\alpha' = 0{,}08853$$

$$N = - \frac{hr}{h + r} \cdot \sin\alpha' = - 1{,}68393,$$

da man nach §. 283. in den allgemeinen Ausdrücken der Gröfsen m und N, um das Maximum von u zu erhalten, nur α durch seinen gröfsten Werth α' zu ersetzen braucht. Nun hat man aus §. 287. die zwei beobachteten Werthe von

$$u = 1{,}215; \quad u = - 0{,}789,$$

und hieraus ergeben sich die entsprechenden Werthe von t

$$t = 32{,}75; \quad t = 10{,}11.$$

Zieht man hiervon den Werth von $x = 19{,}03$ ab, so bleibt

$$T^0 = 13{,}72, \quad T' = 8{,}92,$$

also ist nach der in §. 287. angegebenen Reihe von Beobachtungen die Erleuchtung in den Entfernungen von 13,74 Zoll diesseits des Sammlungspunktes der Strahlen, und 8,93 Zoll jenseits desselben gleich grofs, mithin das Verhältnifs $\frac{T^0}{T'} = 15{,}75$; welches Resultat mit dem in §. 288. so genau übereinstimmt, als es die Natur der Sache nur erlauben mag.

§. 290.

Hierauf nahm Captain Kater zwei Lampen, deren Lichtflammen so genau als möglich gleich gemacht waren, stellte die eine in der constanten Entfernung von 16 Fufs vom Spiegel auf, und die andere nach und nach in den Abständen von 5, 6, 7 Fufs. Da die Lampen etwas neben die Axe des Spiegels auf verschiedene

Seiten gestellt waren, so konnten die reflectirten Lichtkegel abgesondert von einander aufgefangen werden. Man nahm nun zwei gleich grofse, ein Viertelzoll im Durchmesser haltende Scheibchen von weifsem Papier, und schob sie zwischen den beiden Sammlungspunkten oder Bildern der beiden Lampen hin und her, bis beide Scheibchen gleich stark erleuchtet erschienen. Es ist nun bekannt, dafs das Bild der entferntesten Lampe dem Spiegel näher liegen mufste, als das der nähern. Bezeichnen wir das Bild der entfernteren Lampe durch A, das der nähern durch B, so fand Kater, dafs bei 5 Fufs Entfernung der Lampe der Abstand des Scheibchens von A 1,745 Zoll, der von B 8,765 Zoll betrug, wenn die Erleuchtung gleich grofs war. Bei 6 Fufs Entfernung war der Abstand von $A = 1{,}52$, von $B = 5{,}71$. Bei 7 Fufs Entfernung war der Abstand von $A = 1{,}23$, von $B = 4{,}01$. Es versteht sich von selbst, dafs die Abstände von A hinter dem Sammlungspunkt, die von B hingegen vor demselben gemessen sind.

§. 291.

Wir haben in §. 285. die mittlere Dichtigkeit des Lichts in einem Kreise, dessen Entfernung vom Brennpunkt $= t'$ ist, unter der Voraussetzung entwickelt, dafs die Entfernung des leuchtenden Punktes unendlich grofs sey, und es ist nur noch nöthig, diese mittlere Dichtigkeit oder Helligkeit für den allgemeinen Fall darzustellen, wo der leuchtende Punkt eine beliebige Entfernung hat. Uebrigens vernachlässigen wir hierbei alle Potenzen von α. Die ganze auf den Kreis fallende Lichtmenge ist, nach §. 285.,

$$L = 4\pi\varrho' . rr . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2,$$

und theilt man diesen Ausdruck durch die Fläche des Kreises $= \pi uu$, so kommt die mittlere Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho^0 = 4\varrho' \cdot \frac{rr}{uu} \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2.$$

Nach §. 289. ist aber

$$u = mt + N$$

$$= \frac{\sin\alpha'}{h + r} \cdot [t \cdot (2h + r) - hr],$$

also kommt, wenn man den Divisor $\cos \tfrac{1}{2}\alpha'^2 = 1$ setzt,

$$\varrho^0 = \frac{\varrho' rr . (h + r)^2}{[t . (2h + r) - hr]^2}.$$

Die Gröſse t ist hier der Abstand der schneidenden Ebene vom Mittelpunkt der Krümmung nach dem Spiegel zu gezählt. Setzt man nun den Abstand derselben vom Bilde des leuchtenden Punktes $= t'$, so ist

$$t = \frac{hr}{2h + r} + t'$$

$$\varrho^0 = \frac{\varrho' rr . (h + r)^2}{t' t' . (2h + r)^2}.$$

Eben so ist h der Abstand des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels; setzt man daher seinen Abstand vom Spiegel selbst $= h'$, so ist

$$h' = h + r,$$

und wenn $f = \tfrac{1}{2} . r$ die Brennweite bedeutet, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho' f f h' h'}{t' t' . (h' - f)^2}.$$

§. 292.

Um diese Formel zur Vergleichung der in §. 290. angegebenen Beobachtungen anwenden zu können, bezeichnen wir die Werthe von ϱ^0, ϱ', h', t' für die entfernteste Lampe durch R^0, R', H', T', für die nächste Lampe durch R^{00}, R'', H'', T'', so hat man die beiden Gleichungen

$$R^0 = \frac{R' f f . H' H'}{T' T' . (H' - f)^2}$$

$$R^{00} = \frac{R'' f f . H'' H''}{T'' T'' . (H'' - f)^2}.$$

Hieraus engiebt sich

$$\frac{R^0}{R^{00}} = \frac{R'}{R''} \cdot \left(\frac{H' T''}{H'' T'}\right)^2 \cdot \left(\frac{H'' - f}{H' - f}\right)^2.$$

Nun sind aber R', R'' die Dichtigkeiten des Lichts auf der Spiegeloberfläche, das von den in den Entfernungen H', H'' aufgestellten Lampen herkommt, und da sich, bei gleicher Intensität der Lichtflammen, diese Dichtigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen der leuchtenden Punkte verhalten müssen, so hat man

$$R'.H'H' = R''.H''H'',$$

folglich bleibt bloſs

$$\frac{R^0}{R^{00}} = \left(\frac{T''}{T'}\right)^2 \cdot \left(\frac{H''-f}{H'-f}\right)^2.$$

§. 293.

Aus den in §. 290. angeführten Beobachtungen ergeben sich nun folgende gleichzeitige Werthe der in dieser Formel vorkommenden Gröſsen, wenn alles in Zollen ausgedrückt wird,

$H' = 192$;	$T' = -1{,}745$;	$H'' = 60$;	$T'' = +8{,}765$
192;	$-1{,}520$;	72;	$+5{,}710$
192;	$-1{,}230$;	84;	$+4{,}010$

und man erhält hieraus die Werthe von

$$\frac{R^0}{R^{00}} = 1{,}235;\ 1{,}204;\ 1{,}399,$$

also ziemlich bedeutend von der Einheit abweichend, während die Beobachtung die Helligkeiten als gleich groſs angab. Kater bekennt nun freilich selbst, daſs bei dieser Reihe von Versuchen die gleiche Helligkeit sehr schwer zu bestimmen sey, da die Scheibchen sich sehr nahe bei den Bildern der Lampenflamme selbst befanden, und daher der Kreis theils sehr klein, theils in seinen einzelnen Theilen sehr ungleich erleuchtet erschien, so daſs die mittlere Helligkeit schwierig zu bestimmen war. Auſserdem wurde die Vergleichung noch durch den Umstand erschwert, daſs hinter dem Sammlungspunkt das aufgefangene Licht eine viel dunklergelbe Farbe besaſs, als vor demselben.

§. 294.

Es dürfte wohl schwierig seyn, eine genaue auf den Calcul gegründete Erklärung der in den vorigen

Paragraphen angeführten Erscheinung über die Schwächung des Lichts und ungleiche Lichtstärke in gleichen Abständen vor und hinter dem Sammlungspunkt zu geben. Man hat gesagt, das Licht störe sich gegenseitig bei seinem Durchgang durch den Sammlungspunkt, wo eine grofse Lichtmasse in einen sehr kleinen Raum zusammengedrängt wird, wodurch dann die besagte Erscheinung freilich erklärt seyn würde. Unter Beihülfe dieser Hypothese würde man also annehmen müssen, die Lichtstärke werde plötzlich in einem bestimmten Verhältnifs verändert, sobald man die Durchschnitte des Lichtkegels betrachtet, welche hinter dem Sammlungspunkt der Strahlen oder dem Bilde liegen. Das Verhältnifs dieser Verminderung werde durch die Zahl m angedeutet, so hat man die Lichtstärke in der Entfernung t' hinter dem Sammlungspunkt

$$= \frac{m\varrho' ffh'h'}{t't'.(h'-f)^2},$$

und in der Entfernung t'' vor dem Sammlungspunkt

$$= \frac{\varrho' ffh'h'}{t''t''.(h'-f)^2},$$

folglich erhält man das Verhältnifs beider Lichtstärken $= \frac{mt''t''}{t't'}$. Setzt man nun hierin, den Versuchen des §. 288. zufolge,

$$t' = 10 \text{ Zoll}, \quad t'' = 15{,}26,$$

und bedenkt, dafs für diese Entfernungen die Lichtstärken als gleich grofs beobachtet wurden, so ergiebt sich

$$m = \left(\frac{1000}{1526}\right)^2 = 0{,}4294.$$

Aus den in §. 289. angegebenen Beobachtungen hatte man ferner

$$t' = 8{,}91 \text{ Zoll}, \quad t'' = 13{,}72 \text{ Zoll},$$

folglich $m = \left(\frac{891}{1372}\right)^2 = 0{,}4218$, welcher Werth von dem vorigen äufserst wenig abweicht, und da beide

Beobachtungsreihen auf ganz verschiedene Weise angestellt sind, so darf man wohl an der Richtigkeit des Resultats nicht zweifeln.

Nimmt man nun aber die in §. 290. angegebenen und in dem vorigen §. berechneten Versuche, so müſsten die daselbst gefundenen Verhältniſszahlen

1,235; 1,204; 1,399,

wenn sie mit 0,4294 multiplicirt werden, die Einheit geben, welches aber keinesweges der Fall ist, indem die Producte dann noch mehr von der Einheit verschieden sind, als die anfänglichen Verhältniſszahlen selbst. Man wird also genöthigt seyn, diese Hypothese einer plötzlichen Schwächung des Lichts, bei der Durchkreuzung der Strahlen im Sammlungspunkt, bei Seite zu legen. Wollte man annehmen, daſs die Abnahme der Lichtstärke continuirlich nach den Gesetzen der gewöhnlichen Lichtschwächung Statt fände, so lieſse sich folgendermaſsen eine Formel dafür finden. Das auf den unendlich kleinen Raum VM fallende Licht (Fig. 36.) wird so zurückgeworfen, daſs es immer in dem pyramidalischen oder kegelförmigen Raum MPV enthalten ist. Insofern bloſs die Lichtstrahlen betrachtet werden, für welche der Winkel α sehr klein ist, kann man $VP = AP =$ der Entfernung des Sammlungspunktes der Strahlen vom Spiegel setzen; wir bezeichnen diese Entfernung durch b. Gesetzt nun, in der Entfernung s vom Spiegel sey die Dichtigkeit ϱ, in der Entfernung $s + ds$, $\varrho + d\varrho$, so besteht $d\varrho$ aus zwei Theilen, $d\varrho'$, $d\varrho''$, von denen der erste die Schwächung des Lichts andeutet, insofern die Verminderung des Lichts so betrachtet wird, als ob es in einer nur zum Theil durchsichtigen Masse fortginge, und die wir in vorliegendem Fall als aus der Störung der Strahlen hervorgehend ansehen können. Dann hat man $d\varrho' = - n\varrho ds$. Der zweite Theil drückt die Vermehrung der Dichtigkeit des Lichts aus, weil die Lichtmasse in einen immer schmäler werdenden Raum zusammengedrängt wird. Dieser be-

stimmt sich aus der Gleichung

$$\varrho \cdot (b - s)^2 = (\varrho + d\varrho'') \cdot (b - s - ds)^2,$$

vermittelst welcher man $d\varrho'' = \frac{2\varrho ds}{b-s}$ erhält. Es ergiebt sich also, da $d\varrho = d\varrho' + d\varrho''$ seyn muſs, die Differentialgleichung

$$d\varrho = - n\varrho ds + \frac{2\varrho ds}{b - s}.$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch ϱ, und integrirt dann, so erhält man

$$\log \varrho = - ns - 2 . \log (b - s) + \text{Const},$$

und, wenn wir für $s = o$ die Dichtigkeit $\varrho = \varrho'$ setzen,

$$\log \varrho' = - 2 . \log b + \text{Const},$$

folglich, indem die Constante eliminirt wird, und man zugleich von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\varrho = \varrho' \cdot \left(\frac{b}{b - s}\right)^2 \cdot e^{- ns.}$$

Die Sammlungsweite b wird nach unsern frühern Bezeichnungen $= \frac{h'f}{h' - f}$, so wie der Werth von $s = b - t' = \frac{h'f}{h' - f} - t'$ ist. Man hat daher

$$\varrho = \varrho' \cdot \frac{bb}{t't'} \cdot e^{- n . (b - t')}$$

und die hierin vorkommende Gröſse n lieſse sich nach den Beobachtungen des §. 288. bestimmen. Setzt man nämlich für $t' = T^0$, $\varrho = R^0$, für $t' = T'$, $\varrho = R'$, so kommt

$$R^0 = \varrho' \cdot \frac{bb}{T^0 T^0} \cdot e^{- n . (b - T^0)}$$

$$R' = \varrho' \cdot \frac{bb}{T' T'} \cdot e^{- n . (b - T')}$$

$$\frac{R^0}{R'} = \left(\frac{T'}{T^0}\right)^2 \cdot e^{- n . (T' - T^0)}$$

und da den Versuchen zufolge für

$$T^0 = 15{,}26 \text{ Zoll}, \quad T' = - 10 \text{ Zoll}, \quad R^0 = R'$$

wird, so hat man

$$\left(\frac{763}{500}\right)^2 = e^{n\,.\,25{,}26}$$

$$n = \frac{\log 763 - \log 500}{12{,}63} = \frac{0{,}42265}{12{,}63} = \frac{1}{30}.$$

Es würde also unter der angeführten Hypothese die Erleuchtung durch

$$\varrho = \varrho' \cdot \frac{bb}{t't'} \cdot e^{-\frac{b-t'}{30}}$$

ausgedrückt werden müssen, und man sieht leicht, dass in gleichen Entfernungen vor und hinter dem Sammlungspunkt die Erleuchtungen sich wie $e^{\frac{t'}{30}} : e^{-\frac{t'}{30}}$ verhalten werden.

§. 295.

In den vorigen Paragraphen, von §. 278. an, haben wir bei der Erleuchtung der auffangenden Fläche immer bloss den Fall betrachtet, wo das Licht von einem leuchtenden Punkt ausging; es ist nun aber auch noch nöthig, diesen Gegenstand rücksichtlich der Erleuchtung etwas genauer zu untersuchen, und den allgemeinern Fall zu betrachten, wo die Erleuchtung durch eine ausgedehnte Oberfläche bewirkt wird, und also die leuchtenden Elemente nicht bloss in der Axe des Spiegels liegen, wobei wir jedoch von der eben angegebenen Lichtschwächung abstrahiren. Die allgemeinen Formeln für die Lage des Bildes eines Punktes ausserhalb der Axe des Spiegels, haben wir §. 276. angegeben. Es sey nun die Grösse irgend eines Elements der leuchtenden Oberfläche $= ds$, die Lichtstärke $= \lambda$, der Ausflusswinkel des Strahls $= \beta$, der Einfallswinkel desselben auf dem Spiegel $= \varepsilon$, das Element des Spiegels $= ds'$, die gegenseitige Entfernung beider Elemente $= R$, so ist die auf den ganzen Spiegel von diesem Element ds fallende Lichtmenge §. 192.

$$L = \lambda ds \int \frac{ds' \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sin \beta}{RR},$$

und wenn man die weitläufigen Rechnungen nicht scheuen will, so ließe sich aus dieser Formel durch Integration die fragliche Lichtmenge für jede Entfernung R und jede Gröſse des Spiegels finden.

§. 296.

Da aber die Entfernungen der Elemente der leuchtenden Oberfläche von dem Spiegel gegen die Breite oder die Oeffnung des Spiegels bei den meisten Anwendungen immer sehr groſs sind, so wird man für die ganze Ausdehnung des Spiegels die Gröſsen ε, β, R als constant betrachten können, und zwar darf man den Einfallswinkel $\varepsilon = 90^0$ setzen, da die Richtung des leuchtenden Objects immer nur einen geringen Winkel mit der Axe des Spiegels macht. Hierdurch erhält man die Lichtmenge, welche das Element auf den Spiegel wirft,

$$L = \lambda \cdot ds \cdot \frac{s' . \sin \beta}{RR},$$

wo s' die Oberfläche des Spiegels bedeutet. Diese ist nach §. 281.

$$= 2\pi rr \int d\alpha . \sin \alpha$$
$$= 4\pi \; (r . \sin \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

Auſserdem kann man für die Gröſse R, im Mittel, denjenigen Abstand vom Spiegel setzen, wo die nach dem Spiegel gezogene Linie durch den Mittelpunkt der Krümmung desselben geht. Bezeichnet man dann die Entfernung des Elements der leuchtenden Oberfläche vom Mittelpunkt der Krümmung, wie früher in §. 276., durch H, so wird $R = H + r$, folglich

$$L = 4\pi\lambda ds \cdot \sin \beta \cdot \left(\frac{r . \sin \frac{1}{2}\alpha}{H + r}\right)^2.$$

§. 297.

Was den Ausfluſswinkel β betrifft, so kann derselbe auch als constant betrachtet werden, sobald nur die Entfernung des Elements einigermaſsen bedeutend gegen die Dimensionen des Spiegels ist, und man kann für seinen mittlern Werth denjenigen wählen, welcher dann

Statt findet, wenn der Lichtstrahl vom Element aus nach dem Mittelpunkt des Spiegels geht. Legen wir durch diesen Mittelpunkt der Krümmung eine Ebene senkrecht auf die Axe, bezeichnen den Winkel, den eine durch diese Axe und den besagten Lichtstrahl gelegte Ebene mit einer ebenfalls durch die Axe gehenden festen Ebene macht, durch φ, den Winkel des Lichtstrahls mit der Ebene durch ψ, so hat man, da $90^0 - \theta$ hier den Winkel des Lichtstrahls oder des Radius vector mit der Normale bedeutet,

$$ds = \frac{HH \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\sin\theta}$$

$$L = 4\pi\lambda \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \cdot \left(\frac{H \,.\, r \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha}{H + r}\right)^2.$$

§. 298.

Diesem Element ds der Oberfläche des leuchtenden Körpers entspricht nun ein Element auf der Oberfläche des Bildes. Da wir früher gezeigt haben, dafs das Bild eines Punktes auf der graden Linie befindlich ist, welche durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels gezogen wird, so folgt hieraus, dafs die Winkel φ und ψ für das leuchtende Object und sein Bild als gleich grofs angenommen werden können. Bezeichnet man ferner die Entfernung desselben Elements des Bildes vom Mittelpunkt der Krümmung durch R', den Winkel, welchen die auf dem Element errichtete Normale mit dem Radius vector R' macht, durch θ, so hat man das Element des Bildes

$$= \frac{R'R' \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

und nach §. 276. hat man, wenn die Winkel α und δ als sehr klein betrachtet werden, d. h. sowohl die scheinbare Entfernung des leuchtenden Elements von der Axe als die Oeffnung des Spiegels sehr klein sind,

$$R' = \frac{Hr}{2H + r},$$

indem wir das dortige CN durch R' ersetzen müssen. Man hat hiernach

$$dR' = dH \cdot \left(\frac{r}{2H + r}\right)^2.$$

Nach §. 180. ist ferner, wenn man R' statt des dortigen r setzt,

$$\cos\theta = \frac{R'}{\sqrt{\left[R'R' + \left(\frac{dR'}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dR'}{d\psi}\right)^2\right]}},$$

folglich, wenn man bedenkt, daſs der Werth von dR' auch so geschrieben werden kann:

$$dR' = dH \cdot \frac{R'R'}{HH},$$

und daſs sich hieraus die partiellen Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{dR'}{d\varphi}\right) = \left(\frac{dH}{d\varphi}\right) \cdot \frac{R'R'}{HH}$$

$$\left(\frac{dR'}{d\psi}\right) = \left(\frac{dH}{d\psi}\right) \cdot \frac{R'R'}{HH}$$

ergeben, so erhält man

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dH}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{R'R'}{HH} \cdot \frac{1}{HH.\cos\psi^2} + \left(\frac{dH}{d\psi}\right)^2 \cdot \frac{R'R'}{H^4}\right]}},$$

wo die Werthe von $\left(\frac{dH}{d\varphi}\right)$, $\left(\frac{dH}{d\psi}\right)$ aus der gegebenen Gleichung der leuchtenden Oberfläche abgeleitet werden müssen. Insofern nun aber der Gegenstand sehr entfernt vom Spiegel ist, wird $\frac{R'}{H}$ ein sehr kleiner Bruch werden, und die beiden letzten Glieder des Radicals ein Nenner des Bruchs, welcher $\cos\theta$ ausdrückt, können gegen die Einheit vernachlässigt werden. Dann bleibt $\cos\theta = 1$, und das Element der Oberfläche des Bildes bleibt

$$= R'R' . d\varphi . d\psi . \cos\psi$$

$$= \left(\frac{Hr}{2H + r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi.$$

§. 299.

Durch dieses Element geht alles vom Spiegel zurückgeworfene Licht, welches vorher vom correspondirenden Element der leuchtenden Oberfläche auf den Spiegel gefallen war. Nehmen wir nun an, daſs das zurückgeworfene Licht im Verhältniſs von $1 : \mu$ geschwächt werde, und bedenken, daſs die Fläche des Spiegels

$$= 4\pi rr . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2$$

war, die wir durch s' bezeichnen wollen, so bleibt die Lichtmenge, welche durch das besagte Element geht,

$$= \lambda\mu . d\varphi . d\psi . \cos\psi . s' . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2,$$

und theilen wir diesen Ausdruck durch die Gröſse des Elements

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi,$$

so kommt die an dieser Stelle des Bildes Statt findende Dichtigkeit des Lichts

$$= \lambda\mu \cdot \frac{s'}{(H+r)^2} \cdot \left(\frac{2H+r}{r}\right)^2.$$

Bezeichnet man die Brennweite des Spiegels durch f, und nimmt an, die Entfernung des leuchtenden Gegenstandes sey unendlich groſs, so wird die Dichtigkeit des Lichts durch

$$\lambda\mu \cdot \frac{s'}{ff}$$

ausgedrückt, also ist sie bei gleichbleibendem Glanze des leuchtenden Objects und gleicher physischer Beschaffenheit der Materie, aus welcher der Spiegel besteht, in directem Verhältniſs der Oberfläche des Spiegels und in umgekehrtem quadratischem der Brennweite desselben.

§. 300.

Nach §. 297. hat man die von einem Element des leuchtenden Gegenstandes auf die Fläche des Spiegels fallende Lichtmenge

$$= s' . \lambda . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi.$$

Insofern nun H als sehr groſs angenommen wird, und die Dimensionen des leuchtenden Körpers sehr klein ausfallen, was gewöhnlich bei allen Gegenständen Statt findet, deren Bilder man durch Hohlspiegel entstehen läſst, kann man H ohne merklichen Fehler als unabhängig von den Winkeln φ und ψ betrachten. Um daher die ganze auf den Spiegel fallende Lichtmenge zu erhalten, braucht man nur das Integral $\int d\varphi . d\psi . \cos\psi$ zwischen den gehörigen Grenzen zu nehmen. Man sieht aber leicht, daſs der durch die Integration entstehende Ausdruck nichts anders seyn kann, als die Fläche, welche der leuchtende Gegenstand auf einer Kugelfläche einzunehmen scheint, die mit einem der Einheit gleichen Halbmesser aus dem Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels beschrieben ist. Bezeichnen wir diesen Ausdruck durch $\mathfrak{A}$, so wird die ganze Lichtmenge, welche auf dem Spiegel befindlich ist,

$$= s'\lambda\mathfrak{A} . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2,$$

also die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf dem Spiegel, indem man durch seine Oberfläche $= s'$ dividirt,

$$= \lambda\mathfrak{A} . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2.$$

§. 301.

Die Lichtmenge, welche durch ein Element des Bildes geht, ist nach §. 299.

$$= \lambda\mu . s' . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi,$$

also, wenn man nach den Angaben des vorigen Paragraphen die Gröſse $d\varphi . d\psi . \cos\psi$ integrirt, und bemerkt, daſs für das Bild die Winkel φ, ψ vollkommen zwischen denselben Grenzen genommen werden müssen, als für das leuchtende Object, so wird die Lichtmenge, welche das ganze Bild enthält,

$$= \lambda \mu s' \mathfrak{A} \cdot \left(\frac{H}{H+r}\right)^2.$$

Das Element des Bildes ist (§. 298.)

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \cdot d\varphi \cdot d\psi \cdot \cos\psi,$$

also die Oberfläche des Bildes selbst

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \cdot \mathfrak{A}.$$

Dividirt man mit diesem Ausdrucke in die vorige Lichtmenge, welche im Bilde enthalten ist, so kommt die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf dem Bilde

$$= \lambda \mu s' \cdot \left(\frac{2H+r}{H+r}\right)^2 \cdot \frac{1}{rr}.$$

Nimmt man die Dichtigkeit des Lichts auf dem Spiegel als Einheit an, so wird die relative Dichtigkeit des Lichts im Bilde

$$= \frac{\mu s'}{\mathfrak{A}} \cdot \left(\frac{2H+r}{Hr}\right)^2.$$

und wenn man die Fläche $\mathfrak{A}$, die einer mit dem Halbmesser als Einheit angenommenen Kugelfläche zugehört, auf eine mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel sich projicirt denkt, und die daselbst entstehende Fläche durch $\mathfrak{B}$ bezeichnet, so wird $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} rr$, folglich läſst sich die relative Dichtigkeit im Bilde durch

$$\frac{\mu s'}{\mathfrak{B}} \cdot \left(\frac{2H+r}{H}\right)^2$$

ausdrücken. Ist das leuchtende Object eine Kugel vom scheinbaren Halbmesser $= \delta$, so wird $\mathfrak{B} = 4\pi rr \cdot \sin \tfrac{1}{2}\delta^2$, und da $s' = 4\pi rr \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2$, so wird voriger Ausdruck auch $= \mu \cdot \frac{\alpha'\alpha'}{\delta\delta} \cdot \left(\frac{2H+r}{H}\right)^2$, indem man annimmt, daſs die Winkel α', δ nur sehr klein sind. Ist ferner der Abstand des leuchtenden Objects sehr groſs, so kann man $\frac{2H+r}{H} = 2$ setzen, und dann erhält man die relative Dichtigkeit $= \frac{4\mu\alpha'\alpha'}{\delta\delta}$.

§. 302.

Im Allgemeinen darf man wohl bei gewöhnlichen Hohlspiegeln $\mu = \frac{3}{5}$ setzen, so daſs also $\frac{2}{5}$ des auffallenden Lichts verloren gehen. Die relative Dichtigkeit $\frac{12}{5} \cdot \frac{\alpha'\alpha'}{\delta\delta}$, wird also unter dieser Annahme die des direct auffallenden Lichts übertreffen, sobald $12\alpha'\alpha' > 5\delta\delta$ ist. Nennt man nun die Brennweite des Spiegels f, die halbe Oeffnung des Spiegels ω, so ist sehr nahe $\alpha = \frac{\omega}{2f}$, da die doppelte Brennweite den Halbmesser der Krümmung des Spiegels giebt, folglich läſst sich auch die Dichtigkeit durch

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$$

ausdrücken. Ist also z. B. die halbe Oeffnung des Spiegels = 1 Fuſs, die Brennweite = 10 Fuſs, und das Object, die Sonne, für welche $\delta = 16$ Minuten wird, so wird die Dichtigkeit des Lichts im Sonnenbilde, das sich im Brennpunkt befindet, = 277, wenn die des direct einfallenden Sonnenlichts als Einheit angenommen wird. Würde alles Licht vom Spiegel wieder zurückgeworfen, so müſste diese Zahl noch mit $\frac{5}{3}$ multiplicirt werden.

§. 303.

Wenn nun die Verstärkung des Lichts der Sonne auch eine höhere Temperatur hervorbringt, so wird das Sonnenbild in den Brennpunkten der Hohlspiegel, da daselbst das Licht so stark concentrirt erscheint, eine groſse Hitze hervorzubringen im Stande seyn, und man findet in den Lehrbüchern der Physik viele Beispiele von den Wirkungen, welche die Hitze in den Brennpunkten groſser Hohlspiegel oder sogenannter Brennspiegel hervorbringt. Man sieht übrigens aus dem Ausdrucke $\frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$, daſs bei gleicher Brennweite f des Spiegels, die Erhitzung desto gröſser ausfallen wird, je

gröfser der Halbmesser ω der Oeffnung des Spiegels ist. Allein man darf doch das Verhältnifs $\frac{\omega}{f}$ nicht sehr wachsen lassen, weil sonst die Abweichung wegen der Kugelgestalt zu stark wird, und das reflectirte Sonnenlicht sich aus diesem Grunde auf einen bedeutend gröfsern Raum verbreitet, als wir in den vorigen Rechnungen angenommen haben, die blofs in dem Falle zulässig sind, wenn der Winkel α oder das Verhältnifs $\frac{\omega}{2f}$ wenige Grade nicht übersteigt. Sobald $3\omega\omega = 5ff\delta\delta$ wird, ist das direct auffallende Sonnenlicht mit dem reflectirten von gleicher Dichtigkeit; und da $\delta = \frac{1}{215}$, so folgt, dafs, sobald $\frac{f}{\omega} = 43 . \sqrt{15}$ ist, oder die Brennweite des Spiegels den Halbmesser seiner Oeffnung ungefähr 160 mal übertrifft, gar keine Verdichtung des Lichts Statt finden wird. Zugleich sieht man auch, dafs, wenn man vermittelst eines Brennspiegels auf grofse Entfernungen zünden will, der Spiegel selbst eine bedeutende Gröfse besitzen mufs. Wollte man z. B. auf eine Entfernung von 400 Fufs eine 50fache Verstärkung des Sonnenlichts hervorbringen, so hätte man $f = 400$ Fufs, und ω müfste aus der Gleichung

$$50 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$$

bestimmt werden. Dies giebt

$$\omega = \frac{400}{215} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} = 17 \text{ Fufs},$$

also müfste der Halbmesser der Oeffnung des Spiegels 17 Fufs betragen, und derselbe aus einer Kugel von 800 Fufs Halbmesser gebildet seyn.

§. 304.

Es ist nun noch nothwendig, die scheinbare Helligkeit der Elemente des Bildes zu bestimmen. Hierbei darf man aber nicht so verfahren, wie wir früher bei

der Berechnung der scheinbaren Helligkeit wirklicher leuchtender Objecte thaten; denn obgleich ein Bild im Allgemeinen freilich als Object betrachtet werden kann, so findet doch der Hauptunterschied bei denselben Statt, dafs von einem Element einer leuchtenden Oberfläche das Licht nach allen Seiten hin ausströmt, während aus dem Element eines Bildes nur nach bestimmten Richtungen, die von der Zurückwerfung abhängen, das Licht ausgehen kann. Gesetzt nun, das Auge befinde sich auf der Linie, die durch den Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels und das Element des Bildes geht, so werden blofs diejenigen zurückgeworfenen Strahlen ins Auge gelangen können, welche innerhalb der Basis einer Kegeloberfläche auf dem Spiegel liegen, die dadurch gefunden wird, dafs man von allen Punkten der Peripherie der Pupille Linien durch das Element des Bildes zieht, und dieselben bis an die Fläche des Spiegels verlängert. Bezeichnet man nun den Inhalt dieser Kegelbasis auf dem Spiegel durch σ, den Flächeninhalt der Pupille durch a, den Abstand des Auges vom Element des Bildes durch y, den Abstand des Elements vom Spiegel durch u, so hat man die Proportion

$$\sigma : a = uu : yy,$$

und hieraus folgt $\sigma = \frac{auu}{yy}$. Der Abstand des Elements vom Spiegel ist

$$u = r - \frac{Hr}{2H + r} = \frac{(H + r) \, . \, r}{2H + r},$$

also erhält man auch

$$\sigma = a \cdot \left(\frac{H + r}{2H + r}\right)^2 \cdot \frac{rr}{yy}.$$

§. 305.

Es wird also, wenn σ kleiner als die Fläche des Spiegels ist, für das Auge, bei der Betrachtung des Elements des Bildes, die Sache sich so verhalten, als ob der Spiegel blofs die Gröfse σ hätte, indem alle übrigen Strahlen, die von der aufserhalb liegenden

Fläche des Spiegels zurückgeworfen werden, die Pupille nicht treffen können, also für das Auge nicht vorhanden sind.

Wir fanden nun §. 299., dafs bei einer Fläche des Spiegels $= s'$ die Lichtmenge, welche durch das Element geht,

$$= \lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, s' \,.\, \left(\frac{H}{H+r}\right)^2$$

ist, also wird selbige, bei einer Fläche des Spiegels $= \sigma$, durch

$$\lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, \sigma \,.\, \left(\frac{H}{H+r}\right)^2$$

ausgedrückt; oder wenn wir statt σ seinen Werth

$$a \,.\, \left(\frac{H+r}{2H+r}\right)^2 \,.\, \frac{rr}{yy}$$

substituiren, so kommt die Lichtmenge, welche durch das Element geht und zugleich durch die Pupille ins Auge gelangt,

$$= \lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, a \,.\, \left(\frac{H}{2H+r}\right)^2 \,.\, \frac{rr}{yy}.$$

Diese gesammte Lichtmenge versammelt sich auf der Netzhaut in einem Raume, der der Gröfse des Elements des Bildes direct, und dem Quadrat der Entfernung des Auges vom Bilde umgekehrt proportional ist. Nun war der Abstand des Bildes vom Auge $= y$, die Gröfse des Elements des Bildes (§. 298.)

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

folglich wird die Gröfse des Sammlungsraums

$$\frac{gg}{yy} \,.\, \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

wo gg eine die Proportionalität anzeigende Constante ist, die für alle Werthe von y dieselbe bleibt. Dividirt man mit dieser Fläche des Sammlungsraums in die Lichtmenge, welche auf diese Fläche fällt, so erhält man die Dichtigkeit des Lichts auf der Pupille, oder die scheinbare Helligkeit $= \dfrac{a\lambda\mu}{gg}$.

§. 306.

Das correspondirende Element ds der leuchtenden Oberfläche wirft auf die Spiegeloberfläche s' die Lichtmenge (§. 296.)

$$\lambda ds \cdot \frac{s' . \sin 6}{RR},$$

also wird von demselben auf die Pupille, deren Fläche $= a$ ist, die Lichtmenge

$$\lambda ds \cdot \frac{a . \sin 6}{RR}$$

fallen, wo wir R als den Abstand des leuchtenden Elements vom Auge betrachten können, obgleich früher derselbe Buchstabe zur Bezeichnung der Entfernung des Elements vom Spiegel gebraucht worden war. Da die nach dem Element gezogene Gesichtslinie einen Winkel $= 6$ mit dem Element bildet, so ist $ds . \sin 6$ die Projection des Elements ds auf eine aus dem Auge als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= R$ beschriebene Kugeloberfläche, welche Projection allein im Auge das Bild des Elements hervorbringt. Dem zufolge, was im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt ist, wird dann die Gröfse des Raums, auf welcher die durch die Pupille ins Auge gelangende Lichtmenge auf der Netzhaut concentrirt wird,

$$= ds . \sin 6 \cdot \frac{gg}{RR},$$

und theilt man hierdurch die Lichtmenge, so erhält man den scheinbaren Glanz des Elements der leuchtenden Oberfläche $= \frac{a\lambda}{gg}$.

Da nun die scheinbare Helligkeit des Bildes $= \frac{a\mu\lambda}{gg}$ gefunden war, so verhält sich die scheinbare Helligkeit des Objects zu der des Bildes wie $1 : \mu$, also ist letztere immer geringer als erstere, da μ einen ächten Bruch bedeutet. Nur in dem Fall sind beide Helligkeiten einander gleich, wenn alles Licht von dem Spiegel zurückgeworfen wird, welcher Fall aber nirgends ein-

treten wird, da jede Materie einen bedeutenden Theil des auffallenden Lichts in sich aufnimmt.

§. 307.

Einen Einfluſs auf die Schlüsse des vorigen Paragraphs, wodurch ihre Richtigkeit modificirt wird, kann freilich der Umstand haben, daſs die Gröſse der Pupille nicht bei beiden Beobachtungen einerlei Gröſse hat. Bezeichnet man die Gröſse derselben bei der Beobachtung des leuchtenden Gegenstandes durch a, wie vorher, und bei der Beobachtung des Bildes durch a', so verhält sich die scheinbare Helligkeit des leuchtenden Gegenstandes zu der des Bildes wie $a : a'\mu$, und sollte der Fall eintreten, daſs das Product $a'\mu$ gröſser als a würde, so fiele die scheinbare Helligkeit des Bildes gröſser aus, als die des Objects. Daſs eine solche Veränderung der Gröſse der Pupille wirklich Statt findet, kann jeder leicht beobachten. Man stelle sich vor einen Spiegel, so daſs das Licht von den seitwärts befindlichen Fenstern in die Augen fallen kann. Wenn man nun die Hände an die Schläfe hält, so daſs das Licht nur in geringer Menge zu den Augen gelangen kann, so bemerkt man ganz deutlich, daſs die Pupille sich bedeutend vergröſsert. Hieraus folgt, daſs schwächeres Licht eine Erweiterung, stärkeres hingegen eine Verengerung der Pupille bewirkt. Auſserdem ist es höchst wahrscheinlich, daſs auch die Gröſse des Bildes auf der Netzhaut einen Einfluſs auf die Veränderungen der Fläche der Pupille haben wird, indem ein gröſseres Bild eine stärkere Verengerung zuwege bringt, als ein kleineres, das von einem gleich stark glänzenden Körper herkommt.

§. 308.

Die kegelförmigen und cylindrischen Spiegel geben in allen Fällen verzerrte Bilder, und sind daher zum Gebrauch als Spiegel, in dem Sinne, wo derselbe ein dem Gegenstand ähnliches Bild darstellen soll; nicht

anzuwenden. Allein man kann dieselben anwenden, um Zeichnungen, die nach bestimmten Gesetzen verzogen sind, regelmäſsig erscheinen zu lassen (anamorphotische Zeichnungen), und wir wollen eine kurze Untersuchung anstellen, wie man solche anamorphotische Zeichnungen für kegelförmige Spiegel verfertigen kann. Uebrigens sieht man leicht ein, daſs solche Anamorphosen nur dann unverzerrt erscheinen, wenn man die Ebene sowohl, auf welcher selbige verzeichnet sind, als auch das Auge in diejenige Lage bringt, für welche die Zeichnungen verfertigt wurden. Eine gröſsere oder geringere Abweichung der Ebene der Zeichnung sowohl, als des Auges, bringt immer eine gröſsere oder kleinere Verzerrung der Bilder hervor. Um daher die Untersuchungen nicht zu weitläufig zu machen, nehmen wir an, die Zeichnungen fallen mit der Basis des graden Kegels von kreisförmiger Grundfläche oder deren Verlängerung zusammen, und das Auge befinde sich in der Axe des Kegels. Auſserdem nehmen wir für den Normalfall an, daſs die erhabene Seite des Kegels als Spiegel diene.

§. 309.

Unsre Annahme, daſs das Auge sich in einem Punkte der Axe befinden soll, kann natürlich nur von einem einzigen Punkte desselben gelten, und dieser möge der Mittelpunkt der Pupille seyn, dann dürfen wir uns (§. 43.) erlauben, nur die durch diesen Punkt gehenden Strahlen zu betrachten, und werden den durch die Reflection hervorgebrachten Bildern der gesehenen Objecte die Lage zuertheilen, welche dieser eine Strahl hat. Legt man durch das Auge und den leuchtenden Punkt eine Ebene, so befindet sich in dieser Ebene der zu betrachtende Strahl, und da das am Einfallspunkte zu errichtende Einfallsloth verlängert die Axe des Kegels schneidet, so wird die besagte Ebene so gelegt werden müssen, daſs die ganze Axe des Kegels in ihr befindlich

ist. Dann stellt diese Ebene die Zurückwerfungsebene vor, und die Oberfläche des Kegels wird in einem Dreieck von derselben geschnitten.

§. 310.

Es sey ABC (Fig. 38.) dieses Dreieck, BD die Axe des Kegels, O das Auge, L der leuchtende Punkt, OLN der einfallende Strahl, NP der zurückgeworfene Strahl, welcher die Basis in P schneidet. Man setze Winkel $NOB = \delta$, $DBC = \alpha$, so wird $BNO = \alpha - \delta$, $PNC = \alpha - \delta$, $BCD = 90^0 - \alpha$, $NPC = 90^0 - 2\alpha + \delta$. Man setze ferner $OD = H$, $BD = h$, so ist im Dreieck OBN

$$OB : BN = \sin(\alpha - \delta) : \sin\delta$$

$$BN = \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$$

$$RN = BN . \sin\alpha = \frac{\sin\alpha . \sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h).$$

Im Dreieck PNC ist ferner:

$$NC : NP = \cos(2\alpha - \delta) : \cos\alpha$$

$$NP = \frac{NC . \cos\alpha}{\cos(2\alpha - \delta)}$$

$$TP = NP . \sin(2\alpha - \delta) = NC . \cos\alpha . \text{tang}(2\alpha - \delta).$$

Nun ist aber $NC = BC - BN = \frac{h}{\cos\alpha} - \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$, folglich wird

$$TP = h . \text{tang}(2\alpha - \delta) - \frac{\sin\delta . \cos\alpha . \text{tang}(2\alpha - \delta)}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$$

und da $TP + RN = DP$, so kommt, wenn wir diesen Abstand des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls mit der Basis, vom Mittelpunkt der Basis, durch u bezeichnen,

$$u = h . \text{tang}(2\alpha - \delta) - [\text{tang}(2\alpha - \delta) - \text{tang}\alpha] \frac{\sin\delta . \cos\alpha}{\sin(\alpha - \delta)} (H - h),$$

oder, da bekanntlich

$$\text{tang}(2\alpha - \delta) - \text{tang}\,\alpha = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\cos(2\alpha - \delta) . \cos\alpha},$$

so wird auch

$$u = h \cdot \operatorname{tang}(2\alpha - \delta) - (H - h) \cdot \frac{\sin \delta}{\cos(2\alpha - \delta)}.$$

§. 311.

Um den Winkel $\delta = LOB$ zu bestimmen, sey $LQ = y$, $DQ = x$, so hat man

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{x}{H - y}$$

$$\operatorname{tang}(2\alpha - \delta) = \frac{(H - y) \cdot \operatorname{tang} 2\alpha - x}{(H - y) + x \cdot \operatorname{tang} 2\alpha}$$

$$\frac{\sin \delta}{\cos(2\alpha - \delta)} = \frac{\operatorname{tang} \delta}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tang} \delta}$$

$$= \frac{x}{(H - y) \cdot \cos 2\alpha + x \cdot \sin 2\alpha},$$

und hierdurch erhält man auch

$$u = \frac{h \cdot (H - y) \cdot \sin 2\alpha - hx \cdot \cos 2\alpha - (H - h) \cdot x}{(H - y) \cdot \cos 2\alpha + x \cdot \sin 2\alpha}.$$

Ist der Winkel des Kegels am Scheitel ein rechter, wie man sie gewöhnlich bei diesen Spiegeln anzuwenden pflegt, so hat man $2\alpha = 90^0$, also

$$u = \frac{h \cdot (H - y) - (H - h) \cdot x}{x}.$$

§. 312.

Wollte man z. B. eine verzerrte Zeichnung auf der Ebene der Basis des Kegels so machen, daſs ihr Bild eine grade Linie gäbe, die mit der Basis parallel liegt, so sey der kürzeste Abstand dieser Linie von der Axe $= a$; ferner lege man durch die Axe des Kegels und diesen nächsten Punkt der graden Linie eine Ebene, und bezeichne den Winkel, welchen eine durch die Axe und einen andern Punkt der graden Linie gelegte Ebene mit der ersten Ebene bildet, durch φ, so hat man den Abstand dieses Punktes von der Axe $x = \frac{a}{\cos \varphi}$, und wird dieser Werth von x in die Gleichung

$$u = \frac{h.(H-y) - (H-h).x}{x}$$

substituirt, so erhält man

$$u = \frac{h.(H-y).\cos\varphi}{a} - (H-h)$$

für die Polargleichung derjenigen Linie, welche auf der Basis verzeichnet als Bild eine grade Linie geben wird.

§. 313.

Der Ausdruck, welchen wir §. 311. für u gefunden haben, läfst sich noch etwas verändern. Setzt man nämlich die Entfernung des Auges von der Spitze des Kegels

$$OB = h', \quad LM = y', \quad CP = u',$$

so hat man die Gleichungen

$$u = h.\operatorname{tang}\alpha + u'$$
$$y = h - x.\cot\alpha + y'$$
$$H = h + h',$$

folglich, wenn man diese Werthe statt u, y, H in die Gleichung

$$u = \frac{h.(H-y).\sin 2\alpha - hx.\cos 2\alpha - (H-h).x}{(H-y).\cos 2\alpha + x.\sin 2\alpha}$$

substituirt, so ergiebt sich nach den gehörigen Zusammenziehungen

$$u' = \frac{h.(h'-y').\operatorname{tang}\alpha - h'x}{(h'-y').\cos 2\alpha + x.\cot\alpha},$$

wo also u' den Abstand des Durchschnittspunktes des zurückgeworfenen Strahls von der Peripherie der Basis des Kegels angiebt.

§. 314.

Fallen die Strahlen mit der Axe parallel im Innern des Kegels auf seine hohle Seite, wie z. B. der Strahl EF (Fig. 38.), so wird derselbe nach EG zurückgeworfen und die Axe des Kegels in G schneiden. Um den Abstand BG zu finden, hat man den Winkel $BEG = AEF = EBG$, also wird auch $GE = GB$.

Bezeichnet man nun, wie früher, den Winkel EBG durch α, so wird

$$EB = 2BG \,.\, \cos\alpha$$

$$BG = \frac{EB}{2\,.\,\cos\alpha}.$$

Da nun von allen Elementen der innern Kegeloberflächen, welche diesen Abstand EB vom Scheitel B besitzen, das reflectirte Licht nach G gelangt, so wird in diesem Punkt das Licht viel concentrirter erscheinen, folglich, wenn die einfallenden Strahlen von der Sonne herkommen, wird man im Stande seyn, entzündliche Körper eben so wie mittelst des Brennspiegels zu verbrennen. Die Wirkung der conischen Brennspiegel ist freilich bedeutend geringer, als die der sphärischen, weil bei erstern das auffallende Licht in einem viel gröſsern Theile der Axe concentrirt wird, als bei den letztern Spiegeln.

Es sey $ADEC$ ein abgekürzter Kegel (Fig. 39.), dessen halber Scheitelwinkel $= \alpha$ ist, so wird der erste zurückgeworfene Strahl die Axe in A', der letzte in D' treffen, und man hat nach obiger Formel

$$BA' = \frac{BA}{2\,.\,\cos\alpha},\quad BD' = \frac{BD}{2\,.\,\cos\alpha},$$

also, wenn man die letzte Gleichung von der ersten abzieht, so bleibt

$$BA' - BD' = \frac{BA - BD}{2\,.\,\cos\alpha}$$

$$A'D' = \frac{AD}{2\,.\,\cos\alpha}.$$

Die Oberfläche des abgekürzten Kegels ist aber

$$= (AF\,.\,AB - DG\,.\,DB)\,.\,\pi.$$

Setzen wir nun $AF = a$, $AD = b$, so wird $DG = a - b\,.\,\sin\alpha$,

$DB = \dfrac{a - b\,.\,\sin\alpha}{\sin\alpha}$, $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, folglich wird die Oberfläche des Kegels

$$= \pi\,.\left(\frac{aa}{\sin\alpha} - \frac{(a - b\,.\,\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \pi b\,.\,(2a - b\,.\,\sin\alpha).$$

Die Lichtmenge, welche in der Brennlinie $A'D'$ enthalten ist, wird der Fläche des abgekürzten Kegels proportional seyn, folglich erhalten wir die mittlere Dichtigkeit des Lichts, indem wir die gefundene Oberfläche durch die Länge der zugehörigen Brennlinie dividiren. Dies giebt

$$\varrho = 2\pi \,.\cos\alpha \,.(2a - b\,.\sin\alpha).$$

§. 315.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Zurückwerfung des Lichts von einem cylindrischen Spiegel mit kreisförmiger Krümmung über. Der Kreisbogen ABC (Fig. 40.) sey der Durchschnitt desselben mit der Ebene des Papiers oder der Ebene der x und y, D der Mittelpunkt der Krümmung, BD die Axe der x, in B der Anfangspunkt der Coordinaten. Zugleich nehmen wir an, der Spiegel stehe senkrecht auf der Ebene der x, y. Die Coordinaten des Auges seyen A, B, C, die des durch Reflection hervorgebrachten Bildes des leuchtenden Punkts a, b, c, so sind die Gleichungen der graden Linie, welche einen Strahl vorstellt, der, aus diesem Punkt ausgehend, das Auge trifft,

$$Y - B = \frac{B - b}{A - a} \cdot (X - A)$$

$$Z - C = \frac{C - c}{A - a} \cdot (X - A).$$

Bezeichnen wir den Halbmesser BD der Krümmung des Cylinders durch r, so wird die Gleichung des Cylinders

$$yy = 2rx - xx.$$

Verbinden wir mit dieser Gleichung die beiden vorigen Gleichungen der graden Linie, indem wir $Y = y$, $X = x$, setzen, so erhalten wir die Coordinaten desjenigen Punktes, in welchem der Strahl den Cylinder trifft, und wir bezeichnen dieselben durch ξ, η, ζ, so daſs also die drei Coordinaten durch die Gleichungen

$$\eta - B = \frac{B - b}{A - a} \cdot (\xi - A)$$
$$\zeta - C = \frac{C - c}{A - a} \cdot (\xi - A)$$
$$\eta\eta = 2r\xi - \xi\xi$$

bestimmt werden.

§. 316.

Errichtet man ferner im Einfallspunkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, ein Perpendikel auf dem Cylinder, und legt durch dieses und den einfallenden Strahl eine Ebene, so ist diese Ebene die Zurückwerfungsebene; da nun aber das Einfallsloth bei dem senkrecht stehenden Cylinder parallel mit der Ebene der x, y geht, und die geometrische Axe des Cylinders durchschneidet, so braucht man nur diese Ebene durch folgende drei Punkte zu legen: das Auge, den leuchtenden Punkt und den Durchschnittspunkt des Einfallsloths mit der geometrischen Axe des Cylinders. Die Coordinaten dieser drei Punkte sind nun:

$$A, B, C; \quad a, b, c; \quad r, o, \zeta.$$

Nimmt man also die Gleichung für die Ebene

$$Z = \alpha X + \beta Y + \gamma,$$

so hat man zur Bestimmung der drei Coefficienten α, β, γ die Gleichungen

$$C = \alpha A + \beta B + \gamma$$
$$c = \alpha a + \beta b + \gamma$$
$$\zeta = \alpha r \quad\quad + \gamma.$$

§. 317.

Setzt man in der Gleichung der Zurückwerfungsebene

$$Z = \alpha X + \beta Y + \gamma$$

die Ordinate $Z = o$, so bleibt

$$Y = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot X - \frac{\gamma}{\beta}$$

als die Gleichung der graden Linie, in welcher die Zurückwerfungsebene die Ebene der x, y schneidet, und in dieser graden Linie muſs nothwendigerweise auch der

Durchschnittspunkt des zurückgeworfenen Strahls mit der Ebene der x, y liegen. Bezeichnen wir nun die Coordinaten dieses Punktes durch ξ', η', so wird zwischen diesen die Relation

$$\eta' = -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\xi' - \frac{\gamma}{\beta}$$

Statt finden. Der zurückgeworfene Strahl geht also durch zwei Punkte, deren Coordinaten durch

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \xi',\ \eta',\ o;$$

angegeben werden, folglich sind seine Gleichungen

$$Y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}\cdot(X - \xi)$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta}{\xi - \xi'}\cdot(X - \xi).$$

§. 318.

Was nun die Gleichungen der Normale oder des Einfallsloths betrifft, so sieht man leicht, daſs dieselbe durch zwei Punkte geht, deren Coordinaten

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad r,\ o,\ \zeta$$

sind, folglich werden die Gleichungen der graden Linie, die das Einfallsloth darstellt,

$$Y - \eta = \frac{\eta}{\xi - r}\cdot(X - \xi)$$

$$Z - \zeta = o.$$

Man erhält also den Cosinus des Winkels, den der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth bildet,

$$= \frac{(A - a)\cdot(\xi - r) + (B - b)\cdot\eta}{\sqrt{(A-a)^2+(B-b)^2+(C-c)^2}\cdot\sqrt{(\xi-r)^2+\eta\eta}},$$

und den Cosinus des Winkels, den der ausfahrende Strahl mit dem Einfallsloth macht,

$$\frac{(\xi - \xi')\cdot(\xi - r) + (\eta - \eta')\cdot\eta}{\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + \zeta\zeta}\cdot\sqrt{(\xi - r)^2 + \eta\eta}}.$$

Beide Winkel müssen einander gleich seyn, folglich wird auch

$$\frac{(A-a).(\xi-r)+(B-b).\eta}{\sqrt{(A-a)^2+(B-b)^2+(C-c)^2}}$$
$$=\frac{(\xi-\xi').(\xi-r)+(\eta-\eta').\eta}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}.$$

§. 319.

Die in den vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichungen sind nun vollkommen hinreichend, um die unbekannten Gröfsen ξ', η' zu bestimmen, und also die Lage des zurückgeworfenen Strahls zu finden. Man kann dieselben aber durch mehrere Voraussetzungen, die gewöhnlich bei dem cylindrischen Spiegel Statt finden, vereinfachen. Zuerst nämlich wird es erlaubt seyn, das Auge in die Ebene der x, y und zwar in die Axe der x zu versetzen; hierdurch wird $B = o$, $C = o$. Ferner ist immer die Dimension des Spiegels der Breite nach, oder im Sinn seiner Krümmung, sehr klein, so dafs die Amplitude desselben wenige Grade enthält. Dann bleibt ξ immer sehr klein, und die Gleichungen (§. 315.) lassen sich so schreiben:

$$\eta = \frac{b}{A-a}.(A-\xi)$$

$$\zeta = \frac{c}{A-a}\cdot(A-\xi)$$

$$\eta\eta = 2r\xi.$$

Wenn man nun annimmt, dafs wegen der Kleinheit der Breite des Spiegels auch b sehr klein seyn mufs, so kommt aus diesen Gleichungen, mit Vernachlässigung der Potenzen von b, welche die zweite übersteigen,

$$\xi = \tfrac{1}{2}A\cdot\frac{Abb}{r.(A-a)^2}$$

$$\eta = \frac{Ab}{A-a}$$

$$\zeta = \frac{cA}{A-a}\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{Abb}{r.(A-a)^2}\right)\ ^{*}).$$

*) Aufser den im Texte angegebenen Werthen für ξ, η, ζ erge-

Die drei in §. 316. zur Bestimmung der Coefficienten der Ebene α, β, γ gegebenen Gleichungen werden

$$1)\quad o = A\alpha \qquad\quad + \gamma$$
$$2)\quad c = a\alpha + \beta b + \gamma$$
$$3)\quad \zeta = \alpha r \qquad\quad + \gamma,$$

und hierzu kann man noch die Gleichung des §. 317.

$$\eta' = -\frac{\alpha}{\beta}.\xi' - \frac{\gamma}{\beta},$$

oder mit β multiplicirt und auf Null gebracht

$$4)\quad o = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma$$

nehmen. Eliminirt man zuerst β aus 2 und 4, so bleibt

$$\eta' c = \alpha.(a\eta' - \xi' b) + \gamma.(\eta' - b),$$

und die Gleichungen 1 und 3 geben

$$\alpha = -\frac{\zeta}{A - r},\quad \gamma = +\frac{\zeta A}{A - r},$$

folglich wird die Gleichung zwischen η', ξ'

$$(A - r).\eta' c + \zeta.(a\eta' - \xi' b) = \zeta A.(\eta' - b),$$

wo man ohne Fehler $\frac{cA}{A - a}$ statt ζ setzen kann.

Die Gleichung, welche aus den Ausdrücken der beiden Cosinus §. 318. hervorging, giebt, da $B = o$, $C = o$ ist,

ben sich auch die folgenden Bestimmungen aus den obigen Gleichungen:

$$\eta = \frac{2r.(a - A)^2 - Abb}{b.(a - A)}$$

$$\xi = \frac{2r.(a - A)^2 - Abb}{bb}$$

$$\zeta = \frac{c}{A - a}.\frac{2r.(a - A)^2 - 2Abb)}{bb};$$

sie brauchen aber nicht weiter berücksichtigt zu werden, da sie sich, wie man leicht sieht, auf den zweiten Durchschnittspunkt des Cylinders mit dem nach dem Auge gehenden Strahle beziehen. Indessen geben sie auch diesen zweiten Durchschnittspunkt nicht genau, da sich auf diesen die Annahme, daſs ξ, wie für den ersten, sehr klein sey, nicht mehr anwenden läſst. G.

$$5)\quad \frac{(A-a).(\xi-r)\ \eta b}{\sqrt{(A-a)^2+bb+cc}}$$
$$=\frac{(\xi-\xi').(\xi-r)+\eta.(\eta-\eta')}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}.$$

Aus der vorigen Gleichung, zwischen ξ', η', erhält man

$$\xi'=\frac{(A-r).(A-a)}{bA}\cdot\eta'+\frac{a}{b}\cdot\eta'-\frac{A}{b}\cdot\eta'+A$$
$$=A-\frac{(A-a).\eta' r}{bA}.$$

Man sieht hieraus, daſs ξ' die Dimensionen der Gröſsen A, a, r haben wird, während $\xi\xi$ so wie die Producte aus ξ in η, η', ζ vernachlässigt werden dürfen. Der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Theil der Gleichung (5) läſst sich dann so schreiben:

$$\frac{\eta.(\eta-\eta')-r\xi+\xi'.(r-\xi)}{\sqrt{\xi'\xi'-2\xi\xi'+(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}$$
$$=-\left[r-\xi.\left(1+\frac{r}{\xi'}\right)+\frac{\eta}{\xi'}(\eta-\eta')\right].\left[1+\frac{\xi}{\xi'}-\frac{(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}{2\xi'\xi'}\right]$$
$$=-r+\xi-\frac{\eta}{\xi'}\cdot(\eta-\eta')+\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{(\eta-\eta')+\zeta\zeta}{\xi'\xi'}.$$

Der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil giebt, nach den gehörigen Entwickelungen,

$$\xi-r-\frac{\eta b}{A-a}+\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2},$$

folglich hat man statt der Gleichung (5) diese:

$$\frac{\eta}{\xi'}\cdot(\eta-\eta')-\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}{\xi'\xi'}$$
$$=\frac{\eta b}{A-a}-\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2},$$

oder auch, wenn man mit $\xi'\xi'$ multiplicirt,

$$\xi'\xi'.\left[\frac{\eta b}{A-a}-\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2}\right]$$
$$=\eta\xi'.(\eta-\eta')-\tfrac{1}{2}r.[(\eta-\eta')^2+\zeta^2].$$

§. 320.

Substituirt man hierin den Werth von ξ' und macht die gehörigen Reductionen, so erhält man ganz einfach

$$\eta' = \frac{2bA^2}{r.(A-a)},\quad \xi' = -A$$

$$\eta - \eta' = -\frac{(2A-r).bA}{(A-a).r}$$

$$\xi - \xi' = +A$$

$$\zeta = \frac{cA}{A-a}.$$

Nun waren die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls (§. 317.)

$$Y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}.(X - \xi)$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta}{\xi - \xi'}.(X - \xi),$$

folglich werden dieselben durch Substitution dieser Werthe

$$Y - \frac{Ab}{A-a} = -\frac{(2A-r).b}{(A-a).r}.X$$

$$Z - \frac{Ac}{A-a} = \frac{c}{A-a}.X,$$

indem man $\xi = o$ setzen darf. Sucht man nun die Durchschnittspunkte dieser Linie mit einer beliebig angenommenen Ebene, so erhält man die Punkte der Zeichnung in dieser Ebene, welche das Bild bewirken sollen.

Dioptrik.

§. 321.

Derjenige Theil der optischen Wissenschaften, welcher sich mit den Gesetzen der Bewegung des Lichts beschäftigt, wenn selbiges verschiedene durchsichtige Mittel durchläuft, heiſst die Dioptrik. Es ist natürlich, daſs hierbei bloſs das in die Körper eingedrungene Licht berücksichtigt werden kann, welches sich nach regelmäſsigen Gesetzen fortpflanzt; das im Innern des Körpers zerstreute Licht gehört also unsern Untersuchungen nicht an. Es sey *AB* die ebene Oberfläche irgend eines durchsichtigen Körpers (Fig. 41.), z. B. die Oberfläche von stillstehendem Wasser, oder die Seitenfläche eines Glaswürfels, und von irgend einem leuchtenden Punkt *L* falle der Lichtstrahl *LC* auf die Fläche, so geht derselbe, vorausgesetzt, daſs er die Oberfläche nicht senkrecht trifft, nicht nach der Richtung *CM* fort, die mit dem einfallenden Strahl in grader Linie liegt, sondern er wird von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt oder gebrochen. *CN* ist dann der gebrochene Lichtstrahl.

§. 322.

Man errichte in dem Einfallspunkte *C* auf der Oberfläche das Perpendikel oder Einfallsloth *CP*, und verlängere es abwärts beliebig nach *O*, so heiſst *LCP* der Einfallswinkel, *NCO* der Brechungswinkel, *MCN* der Ablenkungswinkel. Letzterer ist immer dem Unterschiede zwischen dem Einfallswinkel und dem Brechungswinkel gleich. Es ist nöthig, zu erinnern,

dafs wir den Einfallswinkel so wie den Brechungswinkel immer vom Einfallsloth aus zählen werden, und nicht von der Fläche *AB* aus, wie es wohl zuweilen geschieht. Die Gesetze, nach welchen nun die Brechung Statt findet, sind folgende. Erstens liegen der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der gebrochene Strahl immer in einer Ebene, der sogenannten Brechungsebene. Zweitens steht der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels immer in einem constanten Verhältnifs, dem sogenannten Brechungsverhältnifs, solange die Materie des brechenden Mittels und die Farbe des Lichtstrahls dieselbe bleibt. Setzen wir also den Einfallswinkel $= \varepsilon$, den Brechungswinkel $= \beta$, das Brechungsverhältnifs $= n$, so wird

$$\sin\varepsilon = n . \sin\beta,$$

und ist α der Ablenkungswinkel, so wird noch $\alpha = \varepsilon - \beta$. Folglich $\sin\beta = \sin(\varepsilon - \alpha)$, und hierdurch erhält man

$$\sin\varepsilon = n . \sin(\varepsilon - \alpha)$$

$$n . \sin\varepsilon . \cos\alpha = \sin\varepsilon + n . \cos\varepsilon . \sin\alpha$$

$$n . \sin\alpha = \sin\varepsilon . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \sin\varepsilon . \cos\varepsilon.$$

Um nun den Werth von ε zu suchen, für welchen α ein Maximum wird, differentiiren wir diese Gleichung, indem α, ε als veränderlich betrachtet werden, und setzen den Differentialcoefficienten $\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = o$, so kommt

$$o = \cos\varepsilon . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \frac{\cos\varepsilon . \sin\varepsilon^2}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} - \cos\varepsilon^2 + \sin\varepsilon^2.$$

Reducirt man diese Gleichung gehörig, so erhält man

$$\sin\varepsilon = \frac{n}{\sqrt{nn + 1}}.$$

Allein dieser Werth von ε ist für unsere Untersuchung nicht anzuwenden; denn man findet leicht, dafs der hieraus folgende Cosinus von ε nicht $\frac{1}{\sqrt{nn + 1}}$, sondern $= -\frac{1}{\sqrt{nn + 1}}$ genommen werden mufs, um

der vorigen Differentialgleichung Genüge zu leisten, während der Winkel ε immer nur zwischen $\pm 90^0$ genommen werden darf, also der Cosinus positiv seyn muſs. Der gröſste Abweichungswinkel α wird für $\varepsilon = 90^0$ Statt finden.

§. 323.

Man versteht unter einem stärker brechenden Mittel ein solches, bei welchem unter gleichem Einfallswinkel der gebrochene Strahl CN sich dem Einfallsloth CO mehr nähert, als bei einem andern. Geht also ein Strahl aus einem weniger brechenden Mittel oder aus dem leeren Raum in ein stärker brechendes über, so wird die Gröſse n oder das Brechungsverhältniſs gröſser als die Einheit seyn. Auſserdem ist es einleuchtend, daſs, wenn z. B. das Brechungsverhältniſs bei dem Uebergange des Lichts aus Luft in Glas durch n bezeichnet wird, umgekehrt bei dem Uebergange des Lichts aus Glas in Luft das Brechungsverhältniſs durch $\frac{1}{n}$ ausgedrückt werden muſs. Denn es sey der Einfallswinkel aus Luft in Glas $= \varepsilon$, der Brechungswinkel $= \vartheta$, so wird $\sin \varepsilon = n . \sin \vartheta$. Befindet sich ferner der leuchtende Punkt im Glase, so sey der Einfallswinkel $OCN = \varepsilon'$, der Brechungswinkel $LCP = \vartheta'$, das Brechungsverhältniſs $= n'$, so wird auf gleiche Weise $\sin \varepsilon' = n' . \sin \vartheta'$. Wenn nun aber der Lichtstrahl, vom Punkt L ausgehend, den Weg LCN zurücklegt, so muſs derselbe nothwendigerweise, von N ausgehend, den Weg NCL durchlaufen. Hierzu ist aber erforderlich, daſs $\varepsilon' = \vartheta$, $\vartheta' = \varepsilon$ sey, also giebt die Gleichung $\sin \varepsilon' = n' . \sin \vartheta'$ auch diese $\sin \vartheta = n' . \sin \varepsilon$. Nun hatten wir aber vorher $\sin \varepsilon = n . \sin \vartheta$, folglich, wenn wir beide Gleichungen mit einander multipliciren, so kommt $nn' = 1$, oder $n' = \frac{1}{n}$.

§. 324.

In der Gleichung $\sin \varepsilon = n . \sin \vartheta$ darf man statt ε alle Werthe von Null bis 90 Grad setzen, und zu-

gleich wird der Winkel β immer mit ε wachsen. Allein dieser Brechungswinkel kann, da n gröfser als die Einheit ist, nicht über eine gewisse Grenze hinaus wachsen. Da nämlich der gröfste Werth von β dann Statt findet, wenn $\varepsilon = 90^0$ ist, oder der Lichtstrahl mit der Oberfläche des brechenden Mittels parallel einfällt, so wird der gröfste Werth von β durch die Gleichung $\sin \beta = \frac{1}{n}$ ausgedrückt. Dieses Maximum des Brechungswinkels mufs also desto kleiner ausfallen, je gröfser das Brechungsverhältnifs n ist. Man hat z. B.

für Wasser $n = \frac{4}{3}$, $\beta = 48^0 35'$,

für Glas $n = \frac{3}{2}$, $\beta = 41^0 48'$.

Uebrigens ist zu bemerken, dafs dieses Brechungsverhältnifs bei heterogenen Körpern sich auf keine bis jetzt bekannte Weise nach dem specifischen Gewicht oder der Dichtigkeit derselben richtet.

§. 325.

Wir sehen also hieraus, dafs der gebrochene Strahl sich innerhalb des brechenden Mittels nie über eine gewisse Grenze vom Einfallsloth entfernen kann, die durch die Gröfse des Brechungsverhältnisses bedingt wird. Wenn nun aber im Innern einer brechenden Materie, z. B. im Wasser, sich ein Gegenstand befindet, so sendet derselbe nach allen Seiten Strahlen aus; es werden also unter jedem beliebigen Winkel Strahlen die Oberfläche treffen, und solange die Winkel, welche sie mit dem Einfallsloth, das auf der Oberfläche errichtet wird, bilden, das Maximum, z. B. bei Wasser $48^0 35'$, nicht übertreffen, werden die Strahlen nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz, von dem Einfallsloth abgelenkt, in die Luft übergehen, und der im Wasser liegende Gegenstand, freilich in einer andern scheinbaren Richtung, einem in der Luft befindlichem Auge sichtbar

seyn. Was nun aber diejenigen Strahlen betrifft, welche einen grösern Winkel, als 48°35′, mit dem Einfallsloth bilden, so werden dieselben wieder im Innern, nach den bekannten Gesetzen der Reflexion, zurückgeworfen. Würde also der Winkel *OCN* (Fig. 41.) mehr als das Maximum des Brechungswinkels betragen, so könnte dieser Strahl nicht in die Luft austreten, sondern derselbe müſste seinen Weg nach *CN′* nehmen, wo der Winkel *NCO* dem Winkel *N′CO* gleich wird.

§. 326.

Die Entdeckung dieses merkwürdigen dioptrischen Gesetzes, daſs die Sinus der Brechungswinkel und der Einfallswinkel für einerlei Materie in einem constanten Verhältniſs zu einander stehen, ist einem Holländer Willebrord Snellius, der im Jahre 1626 im 35sten Jahre seines Alters als Professor der Mathematik zu Leyden starb, zuzuschreiben. Der Construction zufolge, welche er über dieses Gesetz giebt, würde man eigentlich direct auf die Cosecanten der Winkel gelangen, an deren Stelle dann Cartesius die Sinus setzte. Schon unter den ältern Schriftstellern findet sich eine Annäherung an dieses Gesetz, indem Alhazen und Vitellio behaupten, gefunden zu haben, daſs die Einfallswinkel und Brechungswinkel selbst in einem constanten Verhältniſs stehen, welches bei kleinen Winkeln merklich richtig ist. Denn setzt man in der Gleichung $\sin\varepsilon = n.\sin\beta$, statt der Sinus die Reihen, die nach den Potenzen der Bogen fortschreiten, so wird

$$\varepsilon - \tfrac{1}{6}\varepsilon^3 = n.(\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3),$$

indem wir die den Cubus übersteigenden Potenzen vernachlässigen; nimmt man nun

$$n\beta = \varepsilon + k\varepsilon^3,$$

wo k ein unbestimmter Coefficient ist, so erhält man

$$\varepsilon - \tfrac{1}{6}\varepsilon^3 = \varepsilon + k\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^3}{6nn},$$

und hieraus folgt

$$k = \frac{1}{6nn} - \frac{1}{6} = -\frac{nn-1}{6nn}$$

$$n\beta = \varepsilon - \varepsilon^3 . \frac{nn-1}{6nn}.$$

Es würde also die Abweichung $\frac{1}{100}$ betragen, wenn $\varepsilon\varepsilon$ durch die Gleichung

$$\varepsilon\varepsilon . \frac{nn-1}{6nn} = \frac{1}{100}$$

bestimmt ist. Dies giebt für Glas, wo $n = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 18^0 50'$. Wären also damals schon die Fernröhre bekannt gewesen, so hätte man mit vieler Genauigkeit ihre Wirkung durch dieses annähernde Gesetz erklären können.

§. 327.

Nach dem Newtonianischen Emanationssystem läſst sich die Erscheinung der Brechung folgendermaſsen erklären. Bei der Bewegung des Lichts geschieht der Uebergang aus der Richtung *LC* in die Richtung *CN* nicht plötzlich (Fig. 41.), sondern allmälig, vermittelst einer Curve, die das Lichttheilchen in der Gegend von *C* beschreibt, so daſs also eigentlich die Linien *LC*, *CN* als Asymptoten der Trajectorie der Lichttheilchen zu betrachten sind. Die krummlinige Bahn aber in der Gegend von *C* so wie die Abweichung der Bahn des Lichts von den graden Linien *LC*, *CN*, ist in jeder meſsbaren Entfernung von der brechenden Oberfläche unmerklich. Betrachten wir nun das Lichttheilchen als einen bewegten Körper, der im leeren Raum mit einer gewissen Geschwindigkeit fortgeht, und sehen wir, daſs das Lichttheilchen in der Nähe eines Körpers von seiner ursprünglichen gradlinigen Richtung abgelenkt wird, so müssen wir schlieſsen, daſs eine gewisse Kraft auf das Lichttheilchen wirke, die wir als eine von dem brechenden Körper ausgehende Anziehungskraft betrachten können. Da sich aber diese Anziehungskraft erst in unmerklichen Entfernungen von der Oberfläche wirksam

zeigt, so folgt, daſs das Gesetz derselben von solcher Beschaffenheit seyn muſs, daſs die Kraft für jede merkliche Entfernung des Lichttheilchens von der Oberfläche des brechenden Körpers unmerklich wird.

§. 328.

Es sey AB (Fig. 42.) die ebene Oberfläche irgend eines brechenden Körpers, in L das Lichttheilchen, und zwar der Oberfläche des Körpers so nahe, daſs es in die Wirkungssphäre seiner Anziehung getreten ist. In M sey beliebig ein Massentheilchen des Körpers gewählt, so zieht selbiges das Lichttheilchen M nach der Richtung LM an, und zwar mit einer Kraft, die allgemein eine Function dieses Abstandes ML seyn wird. Vermöge des Parallelogramms der Kräfte, läſst sich diese Kraft in zwei andere NL, LQ zerlegen, von denen die erstere parallel mit der Oberfläche AB, die zweite senkrecht auf dieselbe wirkt. Nehmen wir nun den Körper, wenigstens innerhalb der Grenzen der Wirkungssphäre der Anziehungskraft, als gleichförmig dicht an, so wird man in der durch LQ und LM senkrecht auf die Oberfläche AB gelegten Ebene gewiſs ein anderes Massentheilchen M' finden, so daſs der Winkel $M'LQ = MLQ$, und der Abstand $LM' = LM$ wird. Unter dieser Voraussetzung wird das Theilchen M' das Licht L eben so stark anziehen, als das Theilchen M, und zerlegt man die nach LM' wirkende Kraft in zwei andere, LN', LQ, so sind die Kräfte LN, LN' gleich und entgegengesetzt; sie heben sich also gegenseitig auf, und es bleiben bloſs die zwei nach LQ gerichteten Kräfte. Auf diese Art läſst sich also zeigen, daſs die Anziehung aller Massentheilchen des Körpers, die in einer mit der Oberfläche AB parallelen Schicht liegen, während die Schicht selbst die Entfernung LQ vom Lichttheilchen besitzt, eine Function von LQ seyn wird, und wenn man die Anziehung aller dieser einzelnen Schichten zusammen nimmt, so wird selbige eine Function

des Abstandes LP des Lichttheilchens von der Oberfläche des Körpers.

§. 329.

Nun sey LQ (Fig. 41.) $= y$, $CQ = x$, die Kraft der Anziehungen des Körpers in der Entfernung y werde durch φy ausgedrückt, so hat man, vermöge der Grundsätze der Dynamik, die beiden Gleichungen

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\varrho\varphi y$$

$$\frac{ddx}{dt^2} = o,$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Körpers bedeutet, indem man wohl annehmen kann, daſs ein doppelt so dichter Körper bei sonst gleicher Beschaffenheit der Materie auch die doppelte Anziehung ausübt, und überhaupt eine m fache Dichtigkeit auch eine m fache Anziehung bewirkt. Das negative Zeichen muſsten wir der Kraft aus dem Grunde beilegen, weil die Ordinate y durch die Kraft immer vermindert wird. Multiplicirt man die erste Gleichung mit $2dy$ und integrirt, so kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a - 2\varrho \int \varphi y dy.$$

Die zweite Gleichung läſst sich sogleich integriren, und man erhält

$$\frac{dx}{dt} = b.$$

Die Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ sind hier bekanntlich nichts anders, als die Seitengeschwindigkeiten des Lichttheilchens senkrecht gegen die Oberfläche des Körpers und parallel mit derselben. Nennt man also die Geschwindigkeit des Lichts in einer solchen Entfernung von der Oberfläche, in welcher die Anziehungskraft noch nicht wirksam ist, c, und den Winkel, den die Richtung des Strahls mit dem Einfallsloth bildet, ε, so hat man

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \,.\, \cos \varepsilon^2, \quad \frac{dx^2}{dt^2} = cc \,.\, \sin \varepsilon^2,$$

und wenn man den Werth des Integrals $\int \varphi y dy$, für denjenigen Werth von y, wo die Kraft φy unmerklich wird, durch N bezeichnet, so hat man

$$cc \,.\, \cos \varepsilon^2 = a - 2\varrho N; \quad cc \,.\, \sin \varepsilon^2 = bb,$$

folglich, wenn man vermöge dieser Gleichungen die Constanten a, b aus den vorigen Gleichungen eliminirt, so kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho - 2\varrho \int \varphi y dy$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \,.\, \sin \varepsilon^2,$$

wo das Integral $\int \varphi y dy$ für $y = o$ als verschwindend betrachtet wird. Man erhält also an dem Eintrittspunkte des Lichttheilchens in das durchsichtige Mittel

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \,.\, \sin \varepsilon^2.$$

§. 330.

Ferner sey $A'B'$ diejenige Schicht, in welcher die Massentheilchen liegen, die noch im Stande sind, auf das Lichttheilchen zu wirken, sobald dasselbe die Oberfläche AB (Fig. 42.) der durchsichtigen Materie erreicht hat, so daſs also der Abstand der beiden Parallellinien AB, $A'B'$ als der Halbmesser der Attractionssphäre zu betrachten seyn wird. Solange sich das Lichttheilchen auf seinem Wege innerhalb des Körpers zwischen diesen beiden Parallelen befindet, wird dasselbe nach Innen gezogen. Denn gesetzt, es sey zu irgend einer Zeit in L', so ziehen alle Massentheilchen, die zwischen AB, $A''B''$ liegen, dasselbe aufwärts nach der Oberfläche zurück, während die zwischen $A''B''$ und $A'''B'''$ befindlichen Massentheilchen des Körpers das Lichttheilchen nach Innen ziehen, und da letztere Masse die gröſsere ist, so wird die Anziehungskraft nach Innen die Oberhand behalten. Man ziehe nun $A^{IV}B^{IV}$, so daſs sie

parallel mit $A''B''$ denselben Abstand von $A''B''$ besitzt, als AB, so heben sich die entgegengesetzten Anziehungen, welche von der Materie des Körpers herkommen, die zwischen AB und $A''B''$, $A''B''$ und $A^{iv}B^{iv}$ liegt, völlig auf, und es ist für das Lichttheilchen eben so, als ob die Oberfläche des Körpers erst in $A^{iv}B^{iv}$ anfinge. Nennt man daher den Abstand $L'Q' = y'$, so wird die Anziehung für diese Lage des Lichttheilchens durch $\varphi(y')$ ausgedrückt; setzt man also $L'Q = y$, und bedenkt, daſs $L'Q = L'Q'$, oder $y = y'$ ist, so ist die Anziehung des Körpers auf das Lichttheilchen, wenn es um die Tiefe y unter seine Oberfläche eingedrungen ist, $= \varphi y$.

§. 331.

Wir haben also für die Bewegung des Lichttheilchens im Innern des Körpers folgende zwei Gleichungen

$$\frac{ddy}{dt^2} = + \varrho\varphi y$$

$$\frac{ddx}{dt^2} = o.$$

Der Kraft φy müssen wir hier das positive Vorzeichen beilegen, weil dieselbe, indem sie das Lichttheilchen ins Innere des Körpers zu ziehen sucht, die Ordinate y vergröſsert. Man erhält aus diesen Gleichungen durch Integration

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a' + 2\varrho \int \varphi y dy$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = b' = cc \,.\, \sin \varepsilon^2.$$

Nun ist für $y = o$ das Integral $\varrho \int \varphi y dy$, der frühern Voraussetzung zufolge (§. 329.), Null, und das Quadrat der verticalen Geschwindigkeit wird für diesen Fall

$$= cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho,$$

folglich ist die Constante $a' = cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho$, und es kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho + 2\varrho \int \varphi y dy.$$

Ist das Lichttheilchen bis an die Grenze $A'B'$ eingedrungen, so wird für diesen Werth von y, nach §. 329., $\int \varphi y dy = N$, folglich wird die Geschwindigkeit des Lichts in der Richtung senkrecht auf die Oberfläche

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \,.\, \cos \varepsilon^2 + 4N\varrho$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \,.\, \sin \varepsilon^2.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Lichts, nachdem es in das Innere des Körpers eingedrungen ist, durch v, so hat man, wenn man bedenkt, daſs

$$vv = \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2},$$

$$vv = cc + 4N\varrho,$$

also ist die Geschwindigkeit des Lichts im Innern des Körpers gröſser, als auſserhalb, da $4N\varrho$ immer eine positive Gröſse seyn muſs. Nennt man ferner den Winkel des Lichtstrahls mit dem verlängerten Einfallsloth, nachdem das Lichttheilchen merklich in den Körper eingedrungen ist, also die Wirkung der Anziehungskraft aufgehört hat, ε', so wird, nach der Lehre von der Zerlegung der Geschwindigkeiten,

$$\frac{dx}{dt} = v \,.\, \sin \varepsilon' = \sin \varepsilon' \,.\, \sqrt{cc + 4N\varrho}.$$

Wir haben aber auch gefunden, daſs $\frac{dx}{dt} = c \,.\, \sin \varepsilon$ ist, folglich kommt

$$c \,.\, \sin \varepsilon = \sin \varepsilon' \,.\, \sqrt{cc + 4N\varrho}$$

$$\sin \varepsilon = \sin \varepsilon' \,.\, \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{cc}}.$$

Da nun ε den Einfallswinkel und ε' den Brechungswinkel darstellt, so sieht man hieraus, daſs die Sinus dieser beiden Winkel in einem constanten Verhältniſs stehen, so wie es die Beobachtung gelehrt hat. Uebrigens wird das Brechungsverhältniſs

$$n = \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{cc}}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho},$$

und diese Gröfse wird das specifische Brechungsvermögen des Körpers genannt.

§. 332.

Man sieht aus dieser Darstellung, dafs durch die Annahme einer Kraft in den Körpern, die auf die Lichttheilchen anziehend wirkt, und deren Wirkung sich nur auf unmerkliche Entfernungen beschränkt, das Grundgesetz der Dioptrik, dessen Richtigkeit alle unsere bisherigen Erfahrungen dargethan haben, völlig genau erklärt wird. Wir wollen jetzt suchen, aus derselben Annahme die Zurückwerfung des Lichts im Innern der durchsichtigen Körper, welche wir in §. 325. angeführt haben, nachzuweisen. Wir brauchen hierbei blofs diejenige Seitengeschwindigkeit des Lichts zu betrachten, welche senkrecht gegen die Fläche AB des durchsichtigen Körpers gerichtet ist, indem die damit parallele Geschwindigkeit immer einerlei Werth behält. Es sey L' (Fig. 41.) der im Innern der durchsichtigen Materie befindliche Punkt, aus welchem ein Lichtstrahl $L'C$ ausgeht, so hat man, wenn, wie früher, $L'R = y$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{ddy}{dt^2} = + \varrho\varphi y$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a + 2\varrho \int \varphi y dy.$$

Solange noch y einen merklichen Werth hat, oder das Lichttheilchen sich in mefsbarer Entfernung von der Oberfläche AB befindet, ist nach §. 331.

$$\frac{dy^2}{dt^2} = vv \,.\, \cos \varepsilon'^2$$

$$\int \varphi y dy = N.$$

Man hat also zur Bestimmung von a die Gleichung

$$vv \,.\, \cos \varepsilon'^2 = a + 2N\varrho.$$

Es wird also allgemein

$$\frac{dy^2}{dt^2} = \nu\nu \,.\, \cos\varepsilon'^2 - 2N\varrho + 2\varrho\int\varphi y dy$$
$$= \nu\nu \,.\, \cos\varepsilon'^2 - 2\varrho\,.\,(N - \int\varphi y dy),$$

wo das zweite Glied immer absolut negativ ist, da N den gröfsten Werth bedeutet, den das Integral $\int\varphi y dy$ annehmen kann. Es ist also möglich, einen Werth für ε' so zu finden, dafs das Glied

$$\nu\nu \,.\, \cos\varepsilon'^2 - 2\varrho\,.\,(N - \int\varphi y dy) = o$$

werde. Dann ist die Seitengeschwindigkeit des Lichts senkrecht gegen die Oberfläche AB Null, und das Licht würde sich blofs parallel mit der Oberfläche AB bewegen, wenn die immer fort nach dem Innern des Körpers hin wirkende Anziehungskraft es nicht nöthigte, wieder ins Innere des Körpers zurückzukehren; und es läfst sich auf gleiche Weise, wie in der Catoptrik bei der Zurückwerfung des Lichts, zeigen, dafs der zurückgeworfene Strahl auch hier denselben Winkel mit der Normale macht, wie der einfallende.

§. 333.

Solange also der Winkel ε' so gewählt wird, dafs der Gleichung

$$\nu\nu \,.\, \cos\varepsilon'^2 = 2\varrho\,.\,(N - \int\varphi y dy)$$

Genüge geleistet wird, wo $\int\varphi y dy$ zwischen o und N liegt, wird der Strahl zurückgeworfen, noch ehe er die Oberfläche des brechenden Mittels erreicht. Setzt man $\int\varphi y dy = o$, so kommt

$$\cos\varepsilon'^2 = \frac{2\varrho N}{\nu\nu},$$

und für diesen Werth von ε' geschieht die Zurückwerfung an der Oberfläche selbst. Um diese Gröfse durch das Brechungsverhältnifs auszudrücken, bedenke man, dafs

$$\frac{2\varrho N}{cc} = \frac{nn - 1}{2}$$
$$\nu = nc$$

ist, und hierdurch wird $\cos\varepsilon' = \frac{1}{n}\,.\,\sqrt{\frac{nn-1}{2}}$.

§. 334.

Ist hingegen der Winkel ε' kleiner, als der durch vorigen Ausdruck angegebene Werth, so tritt der Strahl aus der Oberfläche heraus; allein es kann sich doch noch zutragen, daſs seine senkrechte Geschwindigkeit vernichtet wird, ehe derselbe die Wirkungssphäre der Anziehung des Körpers verläſst. Denn man hat, wenn y den Abstand des Lichttheilchens von der Oberfläche des Körpers auſserhalb desselben bedeutet,

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\varrho . \varphi y$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a - 2\varrho \int \varphi y dy,$$

und da an der Oberfläche selbst

$$\frac{dy^2}{dt^2} = vv . \cos \varepsilon'^2 - 2N\varrho, \quad \int \varphi y dy = o$$

wird, so hat man zur Bestimmung der Constante a

$$vv . \cos \varepsilon^2 - 2N\varrho = a,$$

also wird vorige Gleichung

$$\frac{dy^2}{dt^2} = vv . \cos \varepsilon'^2 - 2N\varrho - 2\varrho \int \varphi y dy,$$

und die senkrechte Geschwindigkeit kann Null werden, sobald

$$vv . \cos \varepsilon'^2 = 2\varrho . (N + \int \varphi y dy)$$

wird. Setzt man hierin statt $\int \varphi y dy$ seinen gröſsten Werth N, so geschieht die Zurückwerfung des Lichts grade an der Grenze der Wirkungssphäre der Anziehung des Körpers auſserhalb desselben, und dann kommt

$$\cos \varepsilon'^2 = \frac{4\varrho N}{vv}$$

$$= \frac{nn - 1}{nn}, \quad \sin \varepsilon' = \frac{1}{n},$$

und dieser Werth von ε' ist schon (§. 324.) aus der Betrachtung der analytischen Formel des Brechungsgesetzes gefunden worden.

§. 335.

Nach dem Vibrationssystem wird die Erklärung der Brechung des Lichts folgendermafsen gegeben werden müssen. Es sey in L ein leuchtender Punkt, von welchem aus die Vibrationen des Aethers sich nach jeder beliebigen Richtung fortpflanzen. Nach der Zeit T treffe eine Reihe solcher auf der graden Linie LM (Fig. 43.) fortgepflanzter Vibrationen die Oberfläche des brechenden Mittels in M, so bildet sich in diesem Punkt ein neuer Mittelpunkt der Vibrationen, die sich kreisförmig nach allen Richtungen in dem Aether fortpflanzen, welcher sich innerhalb des durchsichtigen Mittels befindet, und nach der Zeit T' sey die auf dem Radius MN fortgehende Vibration nach N gelangt. Dann ist die Länge des ganzen durchlaufenen Weges, wenn wir die Geschwindigkeit auf LM durch v, die Geschwindigkeit auf MN durch v' bezeichnen,

$$LM + MN = vT + v'T'.$$

Ferner sey LM' ein zweiter, dem ersten unendlich naher Strahl, dessen Länge LM' um dr gröfser ist, als LM, so ist die Zeit, welche vergeht, ehe der Strahl in M' eintrifft, $= T + \frac{dr}{v}$, und der Strahl erregt im Punkt M' ebenfalls nach allen Seiten fortgehende Vibrationen, und $M'N'$ soll einen der Radien vorstellen, auf welchen die Vibrationen im durchsichtigen Mittel fortgehen. Sollen nun die Vibrationen auf den Wegen LMN, $LM'N'$ gleichzeitig in N und N' eintreffen, so wird die Zeit, welche vergeht, ehe die Vibration von M' nach N' gelangt, $= T' - \frac{dr}{v}$, folglich, da die Geschwindigkeit der Welle im durchsichtigen Mittel $= v'$ seyn soll, so ergiebt sich

$$M'N' = v'T - \frac{v'dr}{v}.$$

Nun sey $AL = a$, $MLA = \varepsilon$, so wird $ML = \frac{a}{\cos\varepsilon}$.

Wächst nun der Winkel ε um $d\varepsilon$, so wächst die Linie LM um

$$dr = d \cdot \frac{a}{\cos \varepsilon} = \frac{a . \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon,$$

also ist $M'N' = v'T' - \frac{v'a . \sin \varepsilon}{v . \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon$. Die Halbmesser der sich aus M und M' kreisförmig ausbreitenden secundären Wellen sind also:

$$v'T' \text{ und } v'T' - \frac{v'a . \sin \varepsilon}{v . \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon,$$

und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte M, M' vom Anfangspunkt der Abscissen

$$a . \text{tang } \varepsilon, \quad a . \text{tang } \varepsilon + \frac{a d\varepsilon}{\cos \varepsilon^2}.$$

Die Gleichungen dieser Kreise werden daher:

$$yy + (x - a . \text{tang } \varepsilon)^2 = v'v'T'T'$$

$$yy + \left(x - a . \text{tang } \varepsilon - \frac{a d\varepsilon}{\cos \varepsilon^2}\right)^2 = \left(v'T' - \frac{v'a . \sin \varepsilon}{v . \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon\right)^2.$$

Nun lassen sich beide Gleichungen auch so schreiben, wenn man in der letztern die Potenzen von $d\varepsilon$ vernachlässigt

$$yy + (x - a . \text{tang } \varepsilon)^2 = v'v'T'T'$$

$$yy + (x - a . \text{tang } \varepsilon)^2 - 2a \cdot \frac{d\varepsilon}{\cos \varepsilon^2} \cdot (x - a . \text{tang } \varepsilon)$$

$$= v'v'T'T' - \frac{2v'v'T'a . \sin \varepsilon}{v . \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon.$$

§. 336.

Alle secundären Wellen, welche aus den Punkten M, M' und den folgenden hervorgehen, bilden eine Hauptwelle, welche alle gleichzeitig fortgepflanzten secundären Wellen berührt; sie geht also durch die Durchschnittspunkte der auf einander folgenden secundären kreisförmigen Wellen. Man muſs also die Werthe von y und $x - a . \text{tang } \varepsilon$ aus vorigen Gleichungen suchen, um die Lage des Durchschnittspunktes zu erhalten. Aus der zweiten Gleichung findet sich

$$x - a \, . \, \text{tang}\, \varepsilon = \frac{v'v'T'\, . \sin \varepsilon}{v}$$

und dieser Werth in die erste substituirt giebt

$$yy = v'v'T'T' \, . \left(1 - \frac{v'v' \, . \sin \varepsilon^2}{vv}\right).$$

Es ist aber, wenn N der Punkt ist, den beide Wellen gemeinschaftlich haben, und man von N das Perpendikel NQ fällt,

$$MQ = x - a \, . \, \text{tang}\, \varepsilon$$
$$MN = v'T'$$
$$\sin QNM = \frac{MQ}{MN} = \frac{v' \, . \sin \varepsilon}{v}.$$

Da ferner der Winkel QNM derjenige ist, welchen der gebrochene Strahl mit dem Einfallsloth NQ macht, also der Brechungswinkel, während $MLA = \varepsilon$ den Einfallswinkel giebt, so sieht man, daſs auch bei der Annahme des Vibrationssystems der Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels in einem constanten Verhältniſs steht, nämlich dem von $v : v'$. Folglich ist das Brechungsverhältniſs $= \frac{v}{v'}$, und da dasselbe die Einheit übertreffen muſs, so ist $v > v'$, d. h. nach dem Vibrationssystem geht das Licht im stärker brechenden Mittel langsamer fort, als im weniger brechenden, oder im leeren Raume.

Wir bemerken hier noch, daſs ausgedehntere Untersuchungen über die Fortpflanzung der Bewegung in elastischen Mitteln einen Zusammenhang des Brechungsverhältnisses eines durchsichtigen Körpers mit der Menge des an seiner vordern und hintern Fläche zurückgeworfenen Lichts, wenigstens bei senkrecht einfallendem Lichte, gezeigt haben. Bezeichnet man nämlich das Brechungsverhältniſs durch n, so ist die an seiner vordern Fläche zurückgeworfene Lichtmenge

$$= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,$$

die des einfallenden Lichts als Einheit angenommen, und die Intensität des aus der zweiten Fläche hervortretenden Lichts

$$= \frac{16n^2}{(1+n)^4} \text{ *)}.$$

Die allgemeinen Beweise dieser beiden Sätze gehören aber nicht hierher, sondern in eine physisch mathematische Theorie des Lichts.

§. 337.

Wir sehen aus diesen Darstellungen, daſs auch die Vibrationstheorie das gewöhnliche Brechungsgesetz hinreichend erklärt, und daſs daher vermittelst dieser Erscheinung nicht zwischen dem Emanationssystem und dem Vibrationssystem entschieden werden kann, nur findet der merkwürdige Unterschied Statt, daſs die Geschwindigkeit des Lichts in den durchsichtigen Mitteln nach beiden Systemen ganz verschieden gefunden wird, und was rücksichtlich der Aberration des Lichts aus diesem Umstand eintritt, haben wir §. 134. erwähnt. Wir können endlich noch auf einem dritten Wege zu dem Gesetze der Brechung für den Fall der Emissionstheorie kommen. In der Dynamik wird gezeigt, daſs, wenn ein Körper von anziehenden Kräften getrieben wird, er immer eine solche Bahn beschreibt, daſs, wenn man die Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte der Bahn durch v, das Element derselben durch ds bezeichnet, das Integral $\int v ds$, zwischen zwei bestimmten Punkten genommen, ein Minimum seyn muſs. Bei der Bahn, welche ein Lichttheilchen beschreibt, kann man den Weg als aus drei Stücken bestehend ansehen; nämlich dem gradlinigen Weg auſserhalb, dem gradlinigen Weg innerhalb des durchsichtigen Mittels, und dem unendlich kleinen krummlinigen Stück an der Trennungs-

*) S. Poisson *sur le mouvement des fluides élastiques* in den *Mémoires de l'Acad. des sciences de l'Institut de France.* Année 1817. Tome II. pag. 383.

fläche des durchsichtigen Mittels. Letzteres läſst sich gegen die beiden ersten vernachlässigen; bezeichnet man daher die Geschwindigkeit auſserhalb des durchsichtigen Körpers durch v, die Länge des Wegs durch s, die Geschwindigkeit innerhalb durch v', die Länge des Wegs durch s', so wird, da v für jeden der beiden Theile des Weges constant ist,

$$\int v ds = vs + v's' = \omega,$$

und ω muſs zu einem Minimum gemacht werden. Es sey nun die ebene Oberfläche des brechenden Körpers die Ebene der xy. Der Durchschnitt dieser Ebene mit einer durch den leuchtenden Punkt und einen beliebigen Punkt des gebrochenen Strahls gelegten Ebene sey die Axe der x. Dann sind die Coordinaten des leuchtenden Punkts $x = a$, $y = o$, $z = b$, des Punkts im gebrochenen Strahle $x = a'$, $y = o$, $z = b'$, seyen endlich $x = x'$, $y = y'$ die Coordinaten des Einfallspunkts, so ist:

$$s = \sqrt{(a - x')^2 + y'y' + bb}$$
$$s' = \sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'},$$

und

$$\omega = v.\sqrt{(a - x')^2 + y'y' + bb} + v'.\sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'}$$

ist zu einem Minimum zu machen. Hierzu ist erforderlich, daſs $\frac{d\omega}{dx'} = o$, $\frac{d\omega}{dy'} = o$, also in unserm Falle

$$\frac{v.(a - x')}{\sqrt{(a - x')^2 + y'y' + bb}} + \frac{v'.(a' - x')}{\sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'}} = o$$
$$\frac{vy'}{\sqrt{(a - x')^2 + y'y' + bb}} + \frac{v'y'}{\sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'}} = o.$$

Da nun v, v', so wie die Wurzelgröſsen $\sqrt{(a - x')^2 + yy + bb}$ und $\sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'}$ der Natur der Sache nach immer positiv sind, so kann der zweiten Gleichung nur durch den Werth $y' = o$ Genüge geleistet werden, es wird sich also auch der Einfallspunkt in der Ebene der xz befinden, in welcher auch der leuchtende Punkt

und ein Punkt des gebrochenen Strahls liegen, mithin ist der ganze Weg des Lichtstrahls in der auf der Oberfläche des brechenden Mediums senkrechten Ebene enthalten. Die erste Gleichung giebt nun

$$\frac{v.(a - x')}{\sqrt{(a - x')^2 + bb}} = \frac{v'.(x' - a')}{\sqrt{(a' - x')^2 + b'b'}}.$$

Nun ist, wenn (Fig. 41.) LC den einfallenden, $L'C$ den gebrochenen Strahl, und A den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet, $LQ = b$, $AQ = a$, $AC = x$, $AR = a'$, $RL = b'$. Unsere Gleichung wird also

$$v \cdot \frac{QC}{LC} = v' \cdot \frac{RC}{L'C}$$

$$v . \cos LCQ = v' . \cos L'CR,$$

oder $v . \sin \varepsilon = v' . \sin \varepsilon'$,

also $\dfrac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \dfrac{v'}{v} = n.$

Wir erhalten also hier dasselbe Resultat, wie oben.

§. 338.

Wie nach der Emanationstheorie die Gröfse $sv + s'v'$ ein Minimum ist, so kann man auch fragen, welche Relation zwischen dem einfallenden und dem zurückgeworfenen Strahl Statt finden mufs, damit der Lichteindruck in der kürzesten Zeit von dem leuchtenden zu dem im brechenden Mittel liegenden Punkte gelange. Hier ist also $t + t' = \dfrac{s}{v} + \dfrac{s'}{v'}$ zu einem Minimum zu machen. Behalten wir die im vorigen Paragraphen angeführten Bezeichnungen bei, so ist:

$$\frac{s}{v} + \frac{s'}{v'} = \frac{\sqrt{(a-x')^2 + y'y' + bb}}{v} + \frac{\sqrt{(a'-x')^2 + y'y' + b'b'}}{v'},$$

und die Bedingung, dafs diese Gröfse ein Minimum werden soll, führt auf die Gleichungen

$$y' = o$$

$$\frac{a - x'}{v . \sqrt{(a - x')^2 + bb}} = \frac{x' - a'}{v' . \sqrt{(a' - x')^2 + b'b'}}.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt uns, daſs auch hier der Weg des Lichtstrahls sich in einer auf der Oberfläche des brechenden Körpers senkrechten Ebene befindet, die zweite giebt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{v} = \frac{\sin \varepsilon'}{v'},$$

oder $\frac{v}{v'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = n$. Dies ist dasselbe Verhältniſs, auf welches die Vibrationstheorie führt (§. 336.). Diese ist es also, nach welcher der Lichtstrahl den Weg zwischen dem leuchtenden Punkte und einem Punkte im brechenden Mittel in der kürzesten Zeit zurücklegt.

§. 339.

Wir gehen nun zu den Untersuchungen der einzelnen Erscheinungen über, welche die Brechung des Lichts darbietet, indem wir freilich eine der Haupterscheinungen dabei, nämlich die Zerlegung des Lichts in Farben, jetzt noch bei Seite setzen, da die hieraus sich ergebenden Modificationen leicht vermittelst der allgemeinen Formeln abgeleitet werden können.

Es sey N (Fig. 43.) ein leuchtender Punkt innerhalb eines durchsichtigen Mittels, das von einer ebenen Oberfläche AB begrenzt wird; in L ist das Auge, man fragt, wo das Auge das Bild des Punktes N sehen wird. Es sey $AL = a$, $AQ = b$, $QN = -c$, so ist durch diese drei Gröſsen sowohl die Lage des Auges, als die des leuchtenden Punktes bestimmt. Ferner treffe der Strahl, welcher, aus dem Punkt N ausgehend, gebrochen ins Auge gelangt, die Oberfläche in M, und AM sey $= \xi$, so wird die Gleichung des Strahls MN

$$y + c = \frac{-c}{b - \xi} \cdot (x - b).$$

Nun sey die Gleichung des gebrochenen Strahls

$$y = mx + m',$$

so geht derselbe durch den Punkt M, dessen Coordina-

ten $y = o$, $x = \xi$ sind, folglich wird auch $o = m\xi + m'$, also

$$y = m.(x - \xi),$$

indem m' aus beiden Gleichungen eliminirt wird. Der Cosinus des Winkels, den der Strahl MN mit der Abscissenlinie bildet, ist $= \frac{b - \xi}{\sqrt{(b - \xi)^2 + cc}}$, und der Cosinus des Winkels, den der gebrochene Strahl mit der Abscissenlinie macht, wird $= \frac{1}{\sqrt{1 + mm}}$. Der Cosinus des ersten Winkels ist aber der Sinus des Brechungswinkels, und der Cosinus des zweiten der Sinus des Einfallswinkels. Bezeichnen wir also das Brechungsverhältniſs durch n, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + mm}} = \frac{n.(b - \xi)}{\sqrt{(b - \xi)^2 + cc}}$$

$$mm = \frac{cc - (nn - 1).(b - \xi)^2}{nn.(b - \xi)^2}.$$

Man setze den Winkel $QNM = \varphi$, so ist $(b - \xi) = c.\text{tang}\,\varphi$, und der Werth von mm läſst sich so schreiben:

$$mm = \frac{(1 - nn.\sin\varphi^2)}{nn.\sin\varphi^2},$$

also wird die Gleichung des gebrochenen Strahls $y = m.(x - \xi)$,

$$y = -\frac{\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\sin\varphi}.(x - b + c.\text{tang}\,\varphi).$$

Läſst man hier den Winkel φ um $d\varphi$ wachsen, so erhält man die Gleichung eines gebrochenen Strahls, der dem ersten unendlich nahe liegt, und beide Strahlen werden sich, rückwärts verlängert, in einem Punkt schneiden, dessen Coordinaten x, y durch die vorige Gleichung und die neue Gleichung, welche entsteht, indem in ersterer $\varphi + d\varphi$ statt φ gesetzt wird, gefunden werden. Man hat also zur Bestimmung des Durchschnittspunkts der beiden Strahlen

$$y = -\frac{\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2}}{n \,.\, \sin\varphi} \cdot (x - b + c \,.\, \tang\varphi)$$

$$o = \frac{\cos\varphi}{n \,.\, \sin\varphi^2 \,.\, \sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2}} \cdot (x - b + c \,.\, \tang\varphi)$$

$$- \frac{\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2}}{n \,.\, \sin\varphi} \cdot \frac{c}{\cos\varphi^2}.$$

Hieraus folgt

$$x = b - c \,.\, \tang\varphi^3 \,.\, (nn - 1)$$

$$y = -\frac{c \,.\, \sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2}}{n \,.\, \cos\varphi} \cdot [1 - \tang\varphi^2 \,.\, (nn - 1)]$$

$$= -\frac{c}{n} \cdot [1 - \tang\varphi^2 \,.\, (nn - 1)]^{\frac{3}{2}}.$$

An der Stelle, welche durch diese Werthe der Coordinaten x, y bestimmt ist, wird sich ein Bild des Punktes N befinden, und wir haben nur noch den Winkel φ so zu bestimmen, daſs die von diesem Bilde scheinbar herkommenden Strahlen das Auge wirklich treffen. Wir hatten die Gleichung des gebrochenen Strahls $y = m \,.\, (x - \xi)$ gefunden, und soll diese Linie durchs Auge gehen, so muſs für $x = o$, $y = a$ seyn, also $a = - m\xi$; es wird also $m = -\frac{a}{\xi}$. Ferner war

$$\xi = b - c \,.\, \tang\varphi$$

$$m = -\frac{\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2}}{n \,.\, \sin\varphi},$$

folglich erhält man

$$\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\varphi^2} \,.\, (b - c \,.\, \tang\varphi) = an \,.\, \sin\varphi,$$

aus welcher Gleichung φ bestimmt werden muſs. Setzt man in den Gleichungen für x und y $\varphi = o$, so kommt $x = b$, $y = -\frac{c}{n}$; sieht man also senkrecht in ein stillstehendes Wasser, so wird ein Gegenstand, der sich in der Tiefe c unter der Oberfläche befindet, nur in der Tiefe $\frac{c}{n}$ zu liegen, und also vergröſsert scheinen,

und da für Wasser $n = \frac{4}{3}$, so erscheint der Gegenstand um den vierten Theil seiner Tiefe gehoben.

§. 340.

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x = b - c . \text{tang}\, \varphi^3 . (nn - 1)$$

$$y = - \frac{c}{n} \cdot [1 - \text{tang}\, \varphi^2 . (nn - 1)]^{\frac{3}{2}}$$

den Winkel φ eliminirt, so bleibt eine Gleichung zwischen x und y, welche die krumme Linie giebt, auf welcher alle Durchschnittspunkte der auf einander folgenden gebrochenen Strahlen liegen, oder auf welcher sich für jede Lage des Auges das Bild des Gegenstandes zu befinden scheint. Nimmt man an, der Anfangspunkt der Abscissen befinde sich in Q, wo das vom leuchtenden Punkt auf die Oberfläche des Wassers gefällte Perpendikel die Oberfläche trifft, so ist $b = o$, und wenn man aufserdem die positiven Ordinaten abwärts rechnet, so werden die beiden vorigen Gleichungen

$$x = - c . \text{tang}\, \varphi^3 . (nn - 1)$$

$$y = + \frac{c}{n} \cdot [1 - \text{tang}\, \varphi^2 . (nn - 1)]^{\frac{3}{2}}.$$

Die erste Gleichung giebt

$$\text{tang}\, \varphi^6 = \frac{xx}{cc . (nn - 1)^2},$$

und aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\text{tang}\, \varphi^6 . (nn - 1)^3 = \left[1 - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3,$$

also wird

$$\frac{xx . (nn - 1)}{cc} = \left[1 - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3.$$

Diese Curve würde als die Brennlinie einer graden Linie zu betrachten seyn, welche durch Brechung entsteht (Diacaustica).

§. 341.

Befindet sich ein leuchtender Punkt in L, welcher die Lichtstrahlen auf ein von parallelen Flächen AB,

CD begrenztes durchsichtiges Mittel, z. B. eine Glasscheibe, wirft, so wird jeder Lichtstrahl eine doppelte Brechung in M und N erleiden. Das Brechungsverhältnifs sey n, die Dicke der Scheibe $= c$, EMF das Einfallsloth, $EML = \varepsilon$, so bestimmt sich der Winkel NMF durch die Gleichung

$$n . \sin NMF = \sin \varepsilon.$$

Ist ferner NG das Einfallsloth in N, so wird ebenfalls

$$n . \sin NMF = \sin PNG,$$

also $PNG = \varepsilon$, d. h. der aus der hintern Fläche hervorgehende Strahl ist mit dem auf die vordere Fläche einfallenden parallel. Setzt man nun $LK = a$, so wird $MK = a . \text{tang}\, \varepsilon$, $NF = c . \text{tang}\, NMF$,

$$HN = a . \text{tang}\, \varepsilon + c . \text{tang}\, NMF.$$

Nun sey die Gleichung des einfallenden Strahls

$$y = Ax + B,$$

so geht der Strahl durch zwei Punkte, deren Coordinaten folgende sind:

Coordinaten von L; $x = o$, $y = a$

Coordinaten von M; $x = a . \text{tang}\, \varepsilon$, $y = o$,

also wird die gesuchte Gleichung des einfallenden Strahls

$$y = - x . \text{cotang}\, \varepsilon + a.$$

§. 342.

Die Gleichung des zum zweitenmal gebrochenen Strahls NP sey, da er mit dem einfallenden parallel geht,

$$y = - x . \text{cotang}\, \varepsilon + B',$$

so läfst sich B' durch die Bedingung bestimmen, dafs der Strahl den Punkt N trifft, für welchen man

$$y = - c, \quad x = HN = a . \text{tang}\, \varepsilon + c . \text{tang}\, NMF$$

hat. Nun war aber auch

$$\sin NMF = \frac{\sin \varepsilon}{n},$$

also erhält man

$$\text{tang}\, NMF = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Man erhält also zur Bestimmung von B die Gleichung

$$-c = -a - c \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + B',$$

also wird die Gleichung des zum zweitenmal gebrochenen Strahls

$$y + c = a - x \,.\, \cot \varepsilon + c \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Differentiirt man selbige, indem ε als veränderlich betrachtet wird, so kommt

$$o = \frac{x}{\sin \varepsilon^2} - \frac{c \,.\, \sin \varepsilon \,.\, (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3},$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x, y bestimmt

$$x = \frac{c \,.\, \sin \varepsilon^3 \,.\, (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3}$$

$$y = a - c + \frac{c \,.\, \cos \varepsilon^3 \,.\, nn}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3}.$$

Da nun x, y die Coordinaten des Bildes des leuchtenden Punkts vorstellen, so erhellt, dafs jeder Gegenstand, durch eine Fensterscheibe betrachtet, verschoben erscheinen wird, und zwar desto mehr, je dicker die Scheibe ist.

§. 343.

Ist die hintere Seite der Scheibe undurchsichtig, wie dies z. B. bei einem belegten Glasspiegel der Fall ist, so wird der nach NM gebrochene einfallende Strahl (Fig. 44.) wieder zurückgeworfen, indem er den Weg $NM''L''$ zurücklegt. Bei der Zurückwerfung wird $MNF = M''NC$, also auch $L''M''A = LMK$. Behält man die Bezeichnungen der vorigen Paragraphen bei, $LK = a$, $MLK = \varepsilon$, so ist der Winkel, den der zurückgeworfene Strahl $L''M''$ mit der Abscissenlinie AB bildet, $= 90^0 - \varepsilon$, und da derselbe durch einen Punkt M'' geht, dessen Coordinaten

$$y = o, \quad x = a \,.\, \operatorname{tang} \varepsilon + 2c \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}$$

sind, so erhält man die Gleichung der graden Linie, welche den zurückgeworfenen Strahl $M''L''$ darstellt,

$$y = x \,.\, \cot \varepsilon - a - \frac{2c \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen, indem man ε als veränderlich betrachtet, so wird

$$o = \frac{x}{\sin \varepsilon^2} - \frac{2c \,.\, \sin \varepsilon \,.\, (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3},$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x und y bestimmt, so kommt

$$x = \frac{2c \,.\, \sin \varepsilon^3 \,.\, (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3}$$

$$y = - a - \frac{2c \,.\, \cos \varepsilon^3 \,.\, nn}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)}^3}.$$

Man sieht aus diesen beiden Ausdrücken der Coordinaten des Bildes eines Punktes, dafs dasselbe bei einem belegten Glasspiegel, wo aufser der Reflexion auch noch eine Refraction Statt findet, nicht blofs von der Lage des Punktes, sondern auch von dem Einfallswinkel der Strahlen und der Dicke des Glases selbst abhängig ist.

§. 344.

Wir haben bis jetzt immer blofs bei der Brechung den Fall betrachtet, wo die brechende Materie von dem Raume durch eine Ebene getrennt ist. Allein die allgemeinen Brechungsgesetze, welche wir §. 322. aufgestellt haben, sind auch dann noch völlig gültig, wenn die Trennungsfläche gekrümmt seyn sollte, nur mufs man dann an die Stelle des Einfallsloths die Normale setzen, welche auf der krummen Fläche an dem Einfallspunkte errichtet ist. Es sey z. B. in A ein leuchtender Punkt, CB eine krumme Linie, die die Trennungsfläche vorstellt, AB ein auf dieselbe fallender Strahl, EBD die im Einfallspunkt errichtete Normale, FB der gebrochene Strahl. Man setze $BAC = \varphi$, $AB = R$, $BEC = \theta$, $BFC = \psi$, so hat man

$$DBA = BAC + BEC = \varphi + \theta$$
$$FBE = BEC - BFE = \theta - \psi.$$

Da DBA der Einfallswinkel des Strahls, FBE der Brechungswinkel ist, so kommt, wenn man das Brechungsverhältnifs der durchsichtigen Materie durch n bezeichnet, die Gleichung

$$\sin(\varphi + \theta) = n . \sin(\theta - \psi).$$

Ferner hat man im Dreieck FBP

$$FP = BP . \cot BFP$$
$$FC = PC + BP . \cot BFP,$$

und setzt man $BP = y$, $PC = x$, $FC = u$, so wird auch

$$u = x + y . \cot \psi,$$

wo sich der Winkel ψ aus der Gleichung

$$\sin(\varphi + \theta) = n . \sin(\theta - \psi)$$

bestimmen läfst. Die Gleichung der graden Linie, auf welcher sich der gebrochene Lichtstrahl bewegt, kann leicht dargestellt werden; denn nimmt man an, sie habe die Form

$$Y = AX + B,$$

so sind die Coefficienten A, B den Bedingungen unterworfen, dafs die grade Linie durch zwei Punkte geht, deren Coordinaten

$$X = x; \quad Y = y$$
$$X = x + y . \cot \psi, \quad Y = o$$

sind, und man findet daher

$$Y - y = - \operatorname{tang} \psi . (X - x)$$

für die Gleichung des gebrochenen Lichtstrahls BF.

§. 345.

Die den Winkel ψ bestimmende Gleichung

$$\sin(\varphi + \theta) = n . \sin(\theta - \psi)$$

giebt, wenn man entwickelt, und durch $\cos \theta$ dividirt,

$$\sin \varphi + \cos \varphi . \operatorname{tang} \theta = n . \cos \psi . \operatorname{tang} \theta - n . \sin \psi$$

Nun ist aber, wenn man $AB = R$ setzt, und die Entfernung AC durch a bezeichnet,

$$R \,.\, \sin\varphi = y, \quad R \,.\, \cos\varphi = a + x$$
$$RR = yy + (a + x)^2$$
$$\text{tang}\,\theta = \frac{dx}{dy} = q,$$

da θ den Winkel der Normale mit der Abscissenlinie bedeutet, folglich läſst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$y + (a + x) \,.\, q = nR \,.\, (q \,.\, \cos\psi - \sin\psi).$$

Man setze der Kürze wegen

$$\frac{y + (a + x) \,.\, q}{nR} = \frac{dR}{ndy} = \nu,$$

quadrire dann die vorige Gleichung, und dividire sie durch $\sin\psi^2$, so kommt

$$\nu\nu + \nu\nu \,.\, \cot\psi^2 = qq \,.\, \cot\psi^2 - 2q \,.\, \cot\psi + 1,$$

und diese Gleichung, nach $\cot\psi$ aufgelöſst, giebt

$$\cot\psi = \frac{q \pm \nu \,.\, \sqrt{qq - \nu\nu + 1}}{qq - \nu\nu}.$$

Um zu bestimmen, welches von beiden Vorzeichen genommen werden müsse, wollen wir $n = 1$ setzen, dann wird

$$\nu = \frac{y + (a + x) \,.\, q}{R}$$

$$qq - \nu\nu = \frac{yy \,.\, (qq - 1) - 2y \,.\, (a + x) \,.\, q}{RR}$$

$$qq - \nu\nu + 1 = \frac{qqyy + (a + x)^2 - 2y \,.\, (a + x) \,.\, q}{RR}$$

$$= \left(\frac{(a + x) - qy}{R}\right)^2.$$

Nimmt man das positive Vorzeichen, so kommt der Zähler des Bruchs, welcher den Werth von $\cot\psi$ ausdrückt,

$$q + \nu \,.\, \sqrt{qq - \nu\nu + 1}$$
$$= \frac{y \,.\, (1 - qq) + 2q \,.\, (a + x)}{RR} \cdot (a + x).$$

Nimmt man das negative Vorzeichen, so wird

$$q - \nu \,.\, \sqrt{qq - \nu\nu - 1}$$
$$= \frac{2qy - (a + x) \,.\, (1 - qq)}{RR} \cdot y.$$

Theilt man diese beiden Gröfsen durch den angegebenen Werth von $qq - vv$, so kommt im ersten Fall

$$\cot\psi = -\frac{a+x}{y},$$

und im zweiten

$$\cot\psi = \frac{2qy - (a+x).(1-qq)}{y.(qq-1) - 2.(a+x).q}.$$

Sobald aber $n = 1$ ist, findet gar keine Brechung Statt, sondern FB fällt mit AB in eine grade Linie zusammen, dann wird also $BFC = 180^0 - BAC$, oder $\cot\psi = -\cot\varphi = -\frac{AP}{BP} = -\frac{a+x}{y}$. Wir müssen uns also des positiven Vorzeichens bedienen, wodurch

$$\cot\psi = \frac{q + v.\sqrt{qq - vv + 1}}{qq - vv}$$

wird *).

§. 346.

Es giebt noch einen andern Fall, wo $\cot\psi = -\cot\varphi$ wird, ohne dafs deswegen $n = 1$ gesetzt zu werden brauchte. Denn nimmt man an, die Fläche BC sey eine aus dem leuchtenden Punkt A mit dem Halbmesser a beschriebene Kugelfläche, so fällt jeder von A ausgehende Strahl senkrecht auf die brechende Fläche; er geht also ungebrochen hindurch. Da hierbei die Abscissen in entgegengesetzter Richtung von C nach A zu genommen werden müssen, so wird die Gleichung des Kreises

$$yy = -2ax - xx,$$

*) Das doppelte Zeichen in dem Ausdrucke für $\cot\psi$ rührt daher, dafs die Gleichung $\sin(\varphi + \theta) = n.\sin(\theta - \psi)$, die der Ableitung von $\cot\psi$ zum Grunde lag, für $\theta - \psi$ zwei Werthe giebt, die sich gegenseitig zu 180^0 ergänzen. Der eine derselben entspricht dem gebrochenen Strahle BF, der andere der Linie BG, die mit BE denselben Winkel macht, wie BF, aber auf der entgegengesetzten Seite liegt, so dafs also für den einen Werth $\psi = BFC$, für den andern $\psi = BGC$ wird. G.

und hieraus erhält man durch Differentiation

$$ydy = -adx - xdx$$

$$\frac{dx}{dy} = q = -\frac{y}{a+x}.$$

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck von

$$v = \frac{y + (a+x).q}{R},$$

so erhält man $v = o$, also bleibt blofs $\cot\psi = \frac{1}{q} = -\frac{a+x}{y}$, d. h. es wird wirklich $\cot\psi = -\cot\varphi$ *). Es ist also auch auf diese Weise die Richtigkeit unserer Formel geprüft worden.

§. 347.

Multiplicirt man in dem Ausdruck von $\cot\psi$ Zähler und Nenner durch

$$q - v.\sqrt{qq - vv + 1},$$

und kehrt den Bruch dann um, so erhält man

$$\text{tang}\,\psi = \frac{q - v.\sqrt{qq - vv + 1}}{1 - vv},$$

also wird die Gleichung des gebrochenen Strahls

$$Y - y = \frac{q - v.\sqrt{qq - vv + 1}}{vv - 1}.(X - x).$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem blofs x, y als veränderlich betrachtet werden, so erhält man eine zweite Gleichung, welche, mit der ersten verbunden, dazu dient, die Werthe von X, Y als die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier unendlich naher gebrochener Strahlen zu bestimmen.

*) Man sieht leicht, dafs dieser Fall nicht nur für einen Kreis, sondern für jede beliebige andre Curve bei dem Strahl eintreten wird, welcher mit der im Einfallspunkte errichteten Normale zusammen trifft, indem unter dieser Voraussetzung $\frac{dx}{dy} = -\text{tang}\,\varphi = -\frac{y}{a+x}$ wird. G.

§. 348.

Ist der Abstand des leuchtenden Punktes unendlich grofs, also $a = \infty$, so hat man aus der Gleichung

$$v = \frac{y + (a + x).q}{nR},$$

da das Verhältnifs $\frac{y}{a+x} = o$ gesetzt werden mufs,

$$v = \frac{q}{n},$$

also hat man in diesem Fall die Gleichung des gebrochenen Strahls

$$Y - y = \frac{nnq - q.\sqrt{nnqq + nn - qq}}{qq - nn}.(X - x).$$

Den Coefficienten von $X - x$ setze man $= Q$, so hat man

$$Y - y = Q.(X - x),$$

und wenn man differentiirt,

$$-1 = \frac{dQ}{dy}.(X - x) - Qq.$$

Hieraus ergiebt sich

$$X = \frac{(Qq - 1).dy + xdQ}{dQ}$$

$$= \frac{(Qq - 1).dx + xqdQ}{qdQ}$$

$$Y = \frac{Q.(Qq - 1).dy + ydQ}{dQ}$$

$$= \frac{Q.(Qq - 1).dx + yqdQ}{qdQ}.$$

Sobald die Gleichung der brechenden Curve gegeben ist, kann man Q, q, y, dQ durch x ausdrücken, so dafs also X und Y blofs als Functionen von x erscheinen; eliminirt man nun x zwischen beiden Gleichungen, so giebt die übrig bleibende Gleichung zwischen X und Y die durch Brechung entstandene Brennlinie oder die Diacaustica der brechenden Curve.

§. 349.

Soll die brechende Curve von solcher Beschaffenheit seyn, dafs alle gebrochenen Strahlen sich in einem Punkte vereinigen, der auf der Axe der Abscissen liegt, und dessen Abscisse b ist, so braucht man in der obigen Gleichung zwischen $Y - y$, $X - x$ nur $Y = o$, $X = b$ zu setzen, so wird die Gleichung

$$-y = \frac{nn - \sqrt{nn + nnqq - qq}}{qq - nn} \cdot q \cdot (b - x)$$

die Differentialgleichung der gesuchten Curve seyn. Diese Gleichung giebt

$$(b-x).q.\sqrt{nn+nnqq-qq} = nnq.(b-x)+y.(qq-nn),$$

also quadrirt

$$(b - x)^2.(qqnn + nnq^4 - q^4)$$
$$= n^4q^2.(b - x)^2 + 2y.(qq - nn).nnq.(b - x)$$
$$+ yy.(qq - nn)^2.$$

Schafft man das Glied $n^4qq.(b - x)^2$ auf die andere Seite, so wird auch

$$(b - x)^2.(qq - nn).(nn - 1).qq$$
$$= 2y.(qq - nn).nnq.(b - x) + yy.(qq - nn)^2,$$

oder, da die ganze Gleichung durch $qq - nn$ theilbar ist,

$$(b-x)^2.qq.(nn-1) = 2y.nnq.(b-x)+yy.(qq-nn),$$

welches sich auch so schreiben läfst:

$$qq.[yy - nn.(b - x)^2 + (b - x)^2]$$
$$+ 2y.nnq.(b - x) = nnyy.$$

Hieraus ergiebt sich

$$q.[yy - nn.(b - x)^2 + (b - x)^2]$$
$$= - ynn.(b - x) \pm ny.\sqrt{yy + (b - x)^2},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(b - x)^2 + yy = rr$$

setzt, so kommt auch

$$q.(rr - nn.(b - x)^2) = - nny.(b - x) \pm nyr$$

$$q = \frac{ny}{n.(b - x) \pm r}.$$

Es ist aber $q = \frac{dx}{dy}$, folglich auch

$$ndx.(b - x) - nydy \pm rdx = o.$$

Differentiirt man die Gleichung

$$(b - x)^2 + yy = rr,$$

so erhält man $(b - x).dx - ydy = - rdr$, folglich wird

$$- ndr \pm dx = o.$$

Integrirt man diese Gleichung, so ergiebt sich

$$nr = C \pm x.$$

Für $x = o$, $y = o$, ist $r = b$, folglich läſst sich die Constante bestimmen, und es kommt

$$r = b \pm \frac{x}{n},$$

welches die Gleichung eines Kegelschnitts ist.

§. 350.

Restituirt man für r seinen Werth, und quadrirt die vorige Gleichung, so erhält man

$$yy + xx - 2bx = \frac{xx}{nn} \pm 2b.\frac{x}{n}$$

$$yy = 2bx.\left(1 \pm \frac{1}{n}\right) - xx.\left(1 - \frac{1}{nn}\right).$$

Geht nun der Strahl aus einem weniger brechenden Mittel in ein stärker brechendes über, so ist $n > 1$, also der Coefficient $1 - \frac{1}{nn}$ von xx positiv; das ganze Glied bleibt daher negativ, und da der Coefficient $1 \pm \frac{1}{n}$ unter dieser Voraussetzung auch positiv bleibt, man mag sich des positiven oder negativen Vorzeichens bedienen, so giebt die Gleichung eine Ellipse.

Geht hingegen der Strahl aus einem stärker brechenden Mittel in ein weniger brechendes über, so ist $n < 1$, und das Glied

$$- xx.\left(1 - \frac{1}{nn}\right)$$

erhält einen negativen Werth, also gilt dann die Gleichung für eine Hyperbel.

§. 351.

Füllt man ein Gefäfs $EFAB$ (Fig. 46.), welches am Boden durch eine Glasplatte $ABCD$ mit parallelen Seitenflächen verschlossen ist, mit einer Flüssigkeit bis an EF, so dafs EF parallel mit AB und CD ist, so wird ein nach der Richtung LM einfallender Lichtstrahl dreimal gebrochen, in M, N, P; und beobachtet man die Lage des zuletzt ausfahrenden Lichtstrahls PQ, so wird sich ergeben, dafs derselbe dem einfallenden Strahl LM genau parallel liegt. Bezeichnet man nun die Brechungsverhältnisse

aus der Luft in die Flüssigkeit durch n,
aus der Flüssigkeit ins Glas - N,
aus der Luft ins Glas - n',

so hat man rücksichtlich der Winkel, welche die Strahlen LM, MN, NP, PQ mit den Einfallslothen $M'M''$, $N'N''$, $P'P''$ bilden, folgende Gleichungen:

$$\sin LMM' = n \,.\, \sin NMM''$$
$$\sin MNN' = N \,.\, \sin PNN''$$
$$n' \,.\, \sin NPP' = \sin QPP'',$$

folglich, wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt

$$n' \,.\, \sin LMM' \,.\, \sin MNN' \,.\, \sin NPP'$$
$$= n \,.\, N \,.\, \sin NMM'' \,.\, \sin PNN'' \,.\, \sin QPP''.$$

Da nun aber vermöge des Parallelismus der Linien AB, CD, EF

$$\sin NMM'' = \sin MNN'$$
$$\sin PNN'' = \sin NPP',$$

so bleibt, nach Hinweglassung der gleichen Gröfsen,

$$n' \,.\, \sin LMM' = nN \,.\, \sin QPP''.$$

Der Beobachtung zufolge ist aber der einfallende Strahl LM dem ausfahrenden Strahl PQ parallel, folglich $\sin LMM' = \sin QPP''$. Es bleibt daher $n' = n \,.\, N$, $N = \frac{n'}{n}$, wo man N das relative Brechungsverhältnifs nennen kann. Hat man z. B. für Wasser $n = \frac{4}{3}$, für

Glas $n' = \frac{3}{2}$, so wird das relative Brechungsverhältnifs aus Wasser in Glas

$$N = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$

Besitzen beide aneinander gränzende Materien gleiches Brechungsverhältnifs, welches Statt finden kann, ohne dafs die Bestandtheile der beiden durchsichtigen Mittel identisch sind, so wird der Strahl gar keine Ablenkung erleiden.

§. 352.

Da alle Körper durch die Veränderung der Temperatur eine Ausdehnung oder Zusammenziehung erleiden, die vorzüglich bei gasförmigen Körpern sehr merklich ist, wobei zugleich eine Veränderung der Dichtigkeit eintritt, so fragt sich, inwiefern diese Aenderung der Dichtigkeit auf das Brechungsverhältnifs einwirkt. Diese Frage läfst sich aus dem, was §. 331. gesagt worden ist, leicht beantworten; denn wir fanden daselbst das specifische Brechungsvermögen, welches gar nicht weiter von der grade Statt findenden Dichtigkeit des Körpers abhängt,

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}.$$

Gesetzt nun, für die Dichtigkeit des Körpers ϱ' sey das Brechungsverhältnifs $= n'$, so hat man ebenfalls

$$\frac{4N}{cc} = \frac{n'n' - 1}{\varrho'},$$

und hieraus ergiebt sich

$$n' = \sqrt{1 + \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot (nn - 1)}.$$

Ist die Veränderung der Dichtigkeit nur sehr gering, so kann man die entsprechende Veränderung des Brechungsverhältnisses dadurch finden, dafs man die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}$$

differentiirt, indem ϱ, n als veränderlich betrachtet werden; da nun $\frac{4N}{cc}$ eine constante Gröfse ist, so kommt

$$2\varrho n dn - d\varrho.(nn - 1) = o$$

$$dn = \frac{nn - 1}{2n} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

Befinden sich also zwei Schichten gleichartiger Materie übereinander, von denen die eine die Dichtigkeit ϱ, die darunter liegende die Dichtigkeit $\varrho + d\varrho$ besitzt, so ist das relative Brechungsverhältnifs $= \frac{n + dn}{n}$, oder, wenn man statt dn seinen Werth substituirt,

$$= 1 + \frac{nn - 1}{2nn} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

§. 353.

Hat man eine beliebige Menge durchsichtiger Mittel A, B, C, D u. s. w., die durch parallele Ebenen von einander getrennt sind, und bezeichnet man ihre absoluten Brechungsverhältnisse durch a, b, c, d u. s. w., die Einfallswinkel durch α, β, γ, δ, die Brechungswinkel durch α', β', γ', δ', so hat man folgende Reihe von Gleichungen:

$$\sin\alpha = a . \sin\alpha'$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\beta'$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\gamma'$$

$$\sin\delta = \frac{d}{c} \cdot \sin\delta'$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sin\mu = \frac{m}{l} \cdot \sin\mu'.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, und bedenkt, dafs $\alpha' = \beta$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \delta$ u. s. w., so kommt

$$\sin\alpha = m . \sin\mu',$$

d. h. die Brechung im letzten durchsichtigen Mittel geschieht grade so, als ob der Lichtstrahl direct aus dem leeren Raume ins letzte Mittel gefallen wäre. Man muſs sich aber wohl in Acht nehmen, diesen Satz auf einen andern Fall auszudehnen, als denjenigen, wo die Schichten von gleicher Brechungskraft durch parallele Ebenen begrenzt sind.

§. 354.

Wenn eine brechende Materie zwischen zwei nicht parallelen Ebenen AC, CB, die sich in C schneiden, eingeschlossen ist, so nennt man den dadurch entstehenden Körper, welchen man sich oben durch eine dritte Ebene AB verschlossen denken kann, ein Prisma (Fig. 47.). Der Winkel ACB, welchen die beiden Ebenen mit einander bilden, heiſst der brechende Winkel des Prisma, und wir bezeichnen denselben durch p. Die anderen Winkel des Prisma können wir ganz unberücksichtigt lassen, indem es durchaus nicht nöthig ist, daſs dasselbe oben durch eine Ebene verschlossen sey, die mit den Seiten AC, CB gleiche Winkel macht, sondern wir können die obere Ebene ganz beliebig gelegt denken. Schneidet man nun das Prisma vermittelst einer Ebene, welche senkrecht auf der Durchschnittslinie der beiden Seiten AC, CB steht, so giebt dieser Durchschnitt ein Dreieck ACB, und die Ebene selbst wird für einen Strahl LM, der sich in derselben bewegt, die Brechungsebene seyn, so daſs der ganze Weg $LMNP$ des Lichts in ihr liegt.

§. 355.

Es sey nun LM der einfallende Strahl, $M'K$ das Einfallsloth, das Brechungsverhältniſs $= n$, der Winkel $LMM' = \varepsilon$, der Winkel $KMN = \theta$, so ist zuerst

$$\sin \varepsilon = n . \sin \theta.$$

Die zweite Seite des Prisma werde vom gebrochenen Strahl in N getroffen, und $K'N$ sey das daselbst errichtete Einfallsloth; man setze $K'NM = \varepsilon'$, und den Winkel,

den der bei N wieder ausfahrende Strahl mit dem Einfallsloth macht, $PNN' = 6'$, so ist

$$\sin 6' = n . \sin \varepsilon',$$

Nun hat man aber im Dreieck MNC

$$NMC + MNC + NCM = 180^o,$$

oder, da $NMC = 90^o - 6$, $MNC = 90^o + \varepsilon'$, $MCN = p$, so wird

$$p + \varepsilon' - 6 = o,$$

folglich $\sin \varepsilon' = \sin (6 - p)$, und daher auch

$$\sin 6' = n . \sin (6 - p)\ ^{*}).$$

§. 356.

Aus der Gleichung $\sin \varepsilon = n . \sin 6$ ergiebt sich

$$\sin 6 = \frac{\sin \varepsilon}{n}$$

$$\cos 6 = \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{n},$$

also, wenn man diese Werthe in die Gleichung

$$\sin 6' = n . \sin (6 - p) = n . \cos p . \sin 6 - n . \sin p . \cos 6$$

substituirt, so ergiebt sich die Relation zwischen den Winkeln $6'$, ε, welche der einfallende und der zuletzt ausfahrende Strahl mit dem an den gehörigen Stellen errichteten Einfallsloth macht,

$$\sin 6' = \sin \varepsilon . \cos p - \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

Ist der brechende Winkel des Prisma ein Rechter, also $p = 90^o$, so wird

$$\sin 6' = - \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

*) Wir haben hier den Fall zu Grunde gelegt, wo der einfallende Strahl CM und die Kante C des Prisma auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes MM' liegen, also der gebrochene Strahl MN und die Kante C auf derselben Seite von MM'. Für eine andere Lage müssen daher ε und 6 negativ genommen werden. Eben so verhält es sich mit ε' und $6'$, finden wir für ε' aus der Gleichung $p + \varepsilon' - 6 = o$ einen negativen Werth, so ist auch $6'$ negativ, und der gebrochene Strahl NP und die Kante C liegen auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes NN'. G.

§. 357.

Sobald ohne Rücksicht auf das Zeichen $\sin \theta'$ oder

$$\sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin \varepsilon \,.\, \cos p > 1$$

wird, oder, wenn man hieraus ε sucht,

$$\sin \varepsilon + \cos p < \sin p \,.\, \sqrt{nn - 1}$$

ist, kann der Strahl in N nicht heraustreten, sondern er wird im Innern des Prisma, nach den gewöhnlichen Gesetzen der Reflexion, zurückgeworfen (§. 325.).

Es sey MN ein solcher Strahl (Fig. 47 α.), man ziehe NQ, so daſs $MNK = QNK$ ist, dann wird NQ den Weg des zurückgeworfenen Strahls angeben. Da $MNK = -\varepsilon'$ ist, so wird $QNB = 90^0 + \varepsilon'$, also

$$CQN = QNB - QCN = 90^0 + \varepsilon' - p.$$

Ist nun $Q'Q''$ das im Punkt Q errichtete Einfallsloth, so wird

$$Q''QN = 90^0 - (90^0 + \varepsilon' - p) = p - \varepsilon',$$

und wenn QR den ausfahrenden Strahl bezeichnet, so ergiebt sich

$$\sin Q'QR = - n \,.\, \sin (p - \varepsilon').$$

Es ist aber nach §. 355. $p + \varepsilon' - \theta = o$, also $\varepsilon' = \theta - p$,

$$\sin Q'QR = - n \,.\, \sin (2p - \theta)$$
$$= - n \,.\, \sin 2p \,.\, \cos \theta + n \,.\, \cos 2p \,.\, \sin \theta,$$

und substituirt man hierin die §. 356. angegebenen Werthe von $\sin \theta$, $\cos \theta$, so kommt

$$\sin Q'QR = \cos 2p \,.\, \sin \varepsilon - \sin 2p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

Man sieht hieraus, daſs der zurückgeworfene Strahl nach seinem Heraustreten aus dem Prisma mit dem Einfallsloth denselben Winkel macht, wie ein gebrochener Strahl, der unter demselben Winkel auf ein Prisma fällt, dessen brechender Winkel doppelt so groſs ist, als der des hier betrachteten.

§. 358.

Verlängert man (Fig. 47 θ.) den einfallenden Strahl LM und den zweimal gebrochenen Strahl NP, bis sich beide in D schneiden, so hat man den Winkel, unter welchem sie sich treffen,

$NDM = 180^0 - (NMD + MND)$
$NMD = KMD - KMN = \varepsilon - \beta$
$MND = 180^0 - (N'ND - K'NM) = 180^0 - \beta' + \varepsilon'$,
folglich erhält man, wenn man den Winkel NDE durch γ bezeichnet,

$$\gamma = \varepsilon - \beta - \beta' + \varepsilon',$$

oder, da $\varepsilon' - \beta = - p$, so wird auch

$$\gamma = \varepsilon - \beta' - p.$$

Wir haben aber §. 356.

$$\sin \beta' = \cos p \,.\, \sin \varepsilon - \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2},$$

folglich läſst sich γ durch ε und p ausdrücken. Differentiirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = 1 - \frac{d\beta'}{d\varepsilon}$$

$$\frac{d\beta'}{d\varepsilon} \cdot \cos \beta' = \frac{\sin p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos \varepsilon,$$

und verlangt man das Maximum oder Minimum von γ rücksichtlich des Einfallswinkels ε zu wissen, so muſs man $\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = o$ setzen. Hierdurch wird

$$\frac{\sin p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos \varepsilon = \cos \beta',$$

also, wenn man quadrirt und $1 - \sin \beta'^2$ statt $\cos \beta'^2$ setzt,

$$\frac{\sin p^2 \,.\, \sin \varepsilon^2 \,.\, \cos \varepsilon^2}{nn - \sin \varepsilon^2} + \cos p^2 \,.\, \cos \varepsilon^2$$
$$+ \frac{2 \,.\, \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon^2}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} = 1 - \cos p^2 \,.\, \sin \varepsilon^2$$
$$+ 2 \,.\, \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin p^2 \,.\, (nn - \sin \varepsilon^2).$$

Dies reducirt sich auf

$$2 \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} = (nn - 2 \,.\, \sin \varepsilon^2) \,.\, \sin p.$$

Quadrirt man von neuem, so kommt

$$4 \,.\, \sin \varepsilon^4 - 4nn \,.\, \sin \varepsilon^2 + n^4 \,.\, \sin p^2 = o,$$

und hieraus $\sin\varepsilon = n . \sin\frac{1}{2}p$ *). Man sieht aus dieser Formel, daſs, wenn ε ein Maximum oder Minimum für γ

*) Die Gleichung $4 . \sin\varepsilon^4 - 4nn . \sin\varepsilon^2 + n^4 . \sin p^2 = o$ giebt für $\sin\varepsilon$ folgende Werthe: $n . \sin\frac{1}{2}p$, $-n . \sin\frac{1}{2}p$, $n . \cos\frac{1}{2}p$, $-n . \cos\frac{1}{2}p$, von denen im Texte nur der erste betrachtet ist. Wir wollen hier untersuchen, ob diese Werthe sämmtlich der Bedingungsgleichung für ein Maximum oder Minimum Genüge leisten, oder ob einige derselben erst durch die zur Bestimmung von $\sin\varepsilon$ mit ihr vorgenommenen Operationen eingeführt sind. Zuvor bemerken wir jedoch, daſs $\cos\varepsilon$ sowohl, als $\cos 6$ oder $\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$ und $\cos 6'$ immer positiv genommen werden müssen. Die ursprüngliche Gleichung zur Bestimmung von $\sin\varepsilon$ war

$$\frac{\sin p . \sin\varepsilon . \cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} + \cos p . \cos\varepsilon = \cos 6'.$$

Die vor dem Gleichheitszeichen stehende Gröſse A nimmt durch Einführung der für $\sin\varepsilon$ gefundenen Ausdrücke nach einigen sich leicht ergebenden Reductionen folgende Werthe an:

$$\sin\varepsilon = n . \sin\tfrac{1}{2}p,\quad A = \sqrt{1 - nn . \sin\tfrac{1}{2}p^2}$$

$$\sin\varepsilon = -n . \sin\tfrac{1}{2}p,\quad A = \cos\tfrac{3}{2}p . \frac{\sqrt{1 - nn . \sin\frac{1}{2}p^2}}{\cos\frac{1}{2}p}$$

$$\sin\varepsilon = n . \cos\tfrac{1}{2}p,\quad A = \sin\tfrac{3}{2}p . \frac{\sqrt{1 - nn . \cos\frac{1}{2}p^2}}{\sin\frac{1}{2}p}$$

$$\sin\varepsilon = -n . \cos\tfrac{1}{2}p,\quad A = -\sqrt{1 - nn . \cos\tfrac{1}{2}p^2}.$$

Wir erhalten ferner aus der Gleichung

$$\sin 6' = \sin\varepsilon . \cos p - \sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$

für $\sin\varepsilon = n . \sin\frac{1}{2}p$, $\sin 6' = -n . \sin\frac{1}{2}p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn . \sin\frac{1}{2}p^2}$,

$\sin\varepsilon = -n . \sin\frac{1}{2}p$, $\sin 6' = -n . \sin\frac{3}{2}p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn . \sin\frac{3}{2}p^2}$,

$\sin\varepsilon = n . \cos\frac{1}{2}p$, $\sin 6' = -n . \cos\frac{3}{2}p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn . \cos\frac{3}{2}p^2}$,

$\sin\varepsilon = -n . \cos\frac{1}{2}p$, $\sin 6' = +n . \cos\frac{1}{2}p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn . \cos\frac{1}{2}p^2}$.

Vergleichen wir diese Werthe von $\cos 6'$ mit den für A gefundenen Ausdrücken, so sieht man, daſs nur der Werth $\sin\varepsilon = n . \sin\frac{1}{2}p$ der Gleichung $A = \cos 6'$ Genüge leistet, es kann also nur für diesen einen Werth ein Maximum oder Minimum Statt finden. G.

geben soll, der Einfallswinkel ε so beschaffen seyn mufs, dafs der Brechungswinkel dem halben brechenden Winkel des Prisma gleich wird, folglich steht der gebrochene Strahl MN auf der Linie senkrecht, welche den brechenden Winkel ACB des Prisma halbirt, und der gebrochene Strahl MN macht mit der Seite CB denselben Winkel, als mit der Seite AC; es wird daher auch der Winkel PNN', unter welchem der Strahl ausgeht, dem Winkel LMM', unter welchem der Strahl einfiel, gleich seyn, d. h. es wird $\varepsilon = -\theta'$.

§. 359.

Dasselbe konnte man auch aus der Formel finden, die den Werth von $\sin\theta'$ ausdrückt, denn es ist

$$\sin\theta' = \cos p \,.\, \sin\varepsilon - \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2},$$

also, wenn man hierin den Werth von $\sin\varepsilon = n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p$ substituirt, so kommt

$$\sin\theta' = n \,.\, \cos p \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p - n \,.\, \sin p \,.\, \cos\tfrac{1}{2}p$$
$$= - n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p$$
$$\sin\theta' = - \sin\varepsilon, \quad \theta' = -\varepsilon.$$

Da nun allgemein $\gamma = \varepsilon - \theta' - p$ war, so wird der unserm Falle entsprechende Werth von

$$\gamma = 2\varepsilon - p$$
$$\sin\gamma = \sin 2\varepsilon \,.\, \cos p - \cos 2\varepsilon \,.\, \sin p$$
$$= 2n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \,.\, \sqrt{1 - nn . \sin\tfrac{1}{2}p^2} - \sin p . (1 - 2nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2).$$

Wir haben nur noch zu entscheiden, ob der Werth $\sin\varepsilon = n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p$ für γ ein Maximum oder Minimum gilt, d. h. ob das Differentialverhältnifs $\frac{dd\gamma}{d\varepsilon^2}$ negativ oder positiv ausfällt.

§. 360.

Es ist nach §. 358. $\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = 1 - \frac{d\theta'}{d\varepsilon}$

$$\sin\theta' \cdot \frac{d\theta'}{d\varepsilon} = \frac{\sin p \,.\, \sin\varepsilon \,.\, \cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos\varepsilon,$$

folglich, wenn man von neuem differentiirt,

$$\frac{ddy}{d\varepsilon} = -\frac{dd6'}{d\varepsilon^2}$$

$$\frac{dd6'}{d\varepsilon^2}\cdot\cos 6' - \frac{d6'^2}{d\varepsilon^2}\cdot\sin 6' = -\cos p \,.\, \sin\varepsilon$$

$$+ \frac{nn\,.\,(\cos\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2) + \sin\varepsilon^4}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin p.$$

Wenn man nun hierin den Werth von $\sin\varepsilon = n\,.\,\sin\frac{1}{2}p$ substituirt, so hat man zuerst, vermöge der beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = 1 - \frac{d6'}{d\varepsilon},\ \frac{dy}{d\varepsilon} = o,$$

den Werth $\frac{d6'}{d\varepsilon} = 1$, und da außerdem

$$\sin 6' = \cos p\,.\,\sin\varepsilon - \sin p\,.\,\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2},$$

so erhält man sogleich

$$\cos 6'\cdot\frac{ddy}{d\varepsilon^2} = \sin p.\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \frac{nn.(\cos\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2) + \sin\varepsilon^4}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin p$$

$$= \frac{\sin p}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(n^4 - nn),$$

und diese Gröſse ist für jeden Werth von ε positiv, da $n > 1$, folglich ist γ ein Minimum.

§. 361.

Sobald man den Winkel ε, unter welchem der Strahl einfällt, den Winkel $6'$, unter welchem er ausfährt, und den brechenden Winkel p des Prisma kennt, läſst sich das Brechungsverhältniſs n der Materie finden, aus welcher das Prisma besteht. Denn die Gleichung

$$\sin 6' = \cos p\,.\,\sin\varepsilon - \sin p\,.\,\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$

giebt auch

$$n = \frac{\sqrt{\sin 6'^2 - 2\,.\,\cos p\,.\,\sin\varepsilon\,.\,\sin 6' + \sin\varepsilon^2}}{\sin p}.$$

Diese Formel vereinfacht sich noch, wenn man das Prisma so stellt, daſs der Winkel γ, unter dem der einfallende und der ausfahrende Strahl sich schneiden,

ein Minimum ist, d. h. wenn $\beta' = -\varepsilon$ wird. Dann hat man

$$n = \sin\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{2 + 2 \cdot \cos p}}{\sin p} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}p},$$

und da in diesem Fall zugleich $\gamma = 2\varepsilon - p$, also $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (\gamma + p)$ wird, so erhält man auch

$$n = \sin\tfrac{1}{2}\gamma \cdot \cot\tfrac{1}{2}p + \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

wo also n durch den brechenden Winkel des Prisma, und den kleinsten Winkel, welchen der einfallende und zweimal gebrochene Strahl bilden können, ausgedrückt wird. Um das Prisma in die Lage zu bringen, in welcher der besagte Winkel γ ein Minimum wird, drehe man dasselbe um eine parallel mit der brechenden Kante C gehende Axe, während die brechende Kante selbst parallel mit dem Horizont liegt; fängt man dann die zum zweiten mal gebrochenen Strahlen auf einer entfernten Wand auf, so sieht man, daſs ihr Bild anfangs sinkt, dann wieder steigt, und die Lage des Prisma, bei der das Bild den tiefsten Stand erreicht hat, giebt die verlangte Stellung an. Denn da wir annehmen dürfen, daſs während der Zeit einer Beobachtung sich die Lage des einfallenden Sonnenstrahls LM gegen den Horizont nicht ändert, so wird durch die Drehung des Prisma eine Aenderung des Einfallswinkels ε hervorgebracht, woraus eine gleichzeitige stärkere oder geringere Erhebung des zweimal gebrochenen Strahls NP hervorgeht. Je kleiner nun der Winkel PDE ausfällt, desto geringer wird die Neigung des zweimal gebrochenen Strahls gegen den Horizont seyn, und desto niedriger wird das Bild auf der Wand erscheinen. Bei dem Minimum von PDE liegt es also am tiefsten.

§. 362.

Statt des Winkels γ kann man sich auch anderer Winkel bedienen, die wenigstens eben so leicht gemessen werden können. Zieht man nämlich durch C eine mit dem Horizont parallele Linie in der Zurückwerfungs-

ebene senkrecht auf die brechende Kante, so läfst sich die Neigung LFC des einfallenden Strahls und die Neigung der Seitenfläche AC des Prisma (Fig. 47.) gegen den Horizont bestimmen. Setzt man $MFG = H$, $MCG = h$, so wird

$$FMC = h - H$$
$$LMC = 90^0 + \varepsilon,$$

und da die Summe beider Winkel 180^0 betragen mufs, so hat man

$$90^0 = h - H + \varepsilon,$$

also wird auch $\sin \varepsilon = \cos (h - H)$, folglich läfst sich der Ausdruck $n = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \frac{1}{2}p}$ auch so schreiben:

$$n = \frac{\cos (h - H)}{\sin \frac{1}{2}p}.$$

§. 363.

Wenn auf die Seitenfläche des Prisma AC Strahlen wie LM fallen, die alle unter einander parallel sind, so werden sowohl die zum erstenmal nach MN, als die zum zweitenmal nach NP gebrochenen unter einander parallel seyn. Wenn hingegen die Strahlen nicht parallel auffallen, so werden auch die zum zweitenmal gebrochenen einen Winkel mit einander bilden, und wir wollen untersuchen, wo ein Object, das vermittelst der gebrochenen Strahlen gesehen wird, zu liegen scheint.

Es sey ABC (Fig. 48.) das Prisma, L der leuchtende Punkt, von dem zwei unendlich nahe liegende Strahlen LM, LM' auf das Prisma fallen; diese werden nach MN und $M'N'$ gebrochen, die sich verlängert in L' schneiden; nach dem Heraustreten gehen die Strahlen nach PN, $P'N'$ fort, so dafs, wenn man sie verlängert, ein Durchschnitt dieser Strahlen in L'' entsteht, an welchem Ort zugleich das Bild des Punktes L zu liegen scheint. Es sey $LM = r$, der Einfallswinkel $= \varepsilon$, $MLM' = d\varepsilon$, so hat man im Dreieck $MM'L$

$$LM : MM' = \cos (\varepsilon + d\varepsilon) : \sin d\varepsilon,$$

also mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $d\varepsilon$

$$MM' = \frac{r d\varepsilon}{\cos\varepsilon}.$$

Ferner ist $L'MM' = 90^0 + \theta$, $L'M'M = 90^0 - \theta - d\theta$, $M'L'M = d\theta$, also

$$L'M = \frac{MM' \cdot \cos\theta}{d\theta}.$$

Setzt man $CM = u$, so ist im Dreieck CMN

$$CM : MN = \sin CNM : \sin MCN,$$

oder da $CNM = 90^0 + \varepsilon'$, $MCN = p$, so kommt

$$MN = \frac{u \cdot \sin p}{\cos\varepsilon'},$$

folglich erhält man im Dreieck $NN'L'$

$$NL' : NN' = \sin L'N'N : \sin NL'N'.$$

Es ist aber

$$NL' = ML' + MN = \frac{MM' \cdot \cos\theta}{d\theta} + \frac{u \cdot \sin p}{\cos\varepsilon'}$$

$$\sin L'N'N = \cos\varepsilon'$$

$$\sin NL'N' = d\theta,$$

folglich ergiebt sich

$$NN' = MM' \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\varepsilon'} + \frac{u \cdot \sin p}{\cos\varepsilon'^2} \cdot d\theta.$$

Endlich hat man im Dreieck $NL''N'$

$$NL'' : NN' = \sin L''N'N : \sin NL''N',$$

und wenn man $NL'' = r'$ setzt,

$$r' : NN' = \cos\theta' : d\theta'$$

$$r' = \frac{NN' \cdot \cos\theta'}{d\theta'}$$

$$= \frac{MM' \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta'}{\cos\varepsilon' d\theta'} + \frac{u \cdot \sin p \cdot \cos\theta'}{\cos\varepsilon'^2} \cdot \frac{d\theta}{d\theta'}$$

$$= \frac{r \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta'}{\cos\varepsilon \cdot \cos\varepsilon'} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\theta'} + \frac{u \cdot \sin p \cdot \cos\theta'}{\cos\varepsilon'^2} \cdot \frac{d\theta}{d\theta'}.$$

§. 364.

Insofern nun die Entfernung des Punktes L vom Prisma gegen die Dimensionen desselben als sehr groſs betrachtet werden kann, läſst sich das in u multiplicirte

Glied ohne merklichen Fehler weglassen, und es bleibt

$$r' = \frac{r \, . \cos \beta \, . \cos \beta' \, . d\varepsilon}{\cos \varepsilon \, . \cos \varepsilon' d\beta'}.$$

Vermöge der Formel (§. 356.)

$$\sin \beta' = \sin \varepsilon \, . \cos p - \sin p \, . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$

kommt auch

$$d\beta' \, . \cos \beta' = \frac{\sin p \, . \sin \varepsilon + \cos p \, . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} \cdot \cos \varepsilon \, . d\varepsilon,$$

und durch Substitution dieses Werthes von $d\beta'$ erhält man

$$r' = \frac{r \, . \cos \beta'^2 \, . \cos \beta}{\cos \varepsilon^2 \, . \cos \varepsilon'} \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sin p \, . \sin \varepsilon + \cos p \, . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Ferner ist aus §. 355. $\varepsilon' = \beta - p$, folglich

$$\cos \varepsilon' = \cos p \, . \cos \beta + \sin p \, . \sin \beta,$$

oder da ebenfalls

$$\sin \beta = \frac{\sin \varepsilon}{n}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{n},$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe

$$\cos \varepsilon' = \frac{\cos p \, . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} + \sin p \, . \sin \varepsilon}{n}$$

$$r' = \frac{r \, . \cos \beta'^2}{\cos \varepsilon^2} \cdot \frac{nn - \sin \varepsilon^2}{(\sin p \, . \sin \varepsilon + \cos p \, . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2})^2}.$$

Hat man das Prisma so gestellt, daſs der einfallende Strahl denselben Winkel mit seinem Einfallsloth macht, wie der zum zweitenmal gebrochene, so ist

$$\varepsilon = - \beta', \quad \sin \varepsilon = n \, . \sin \tfrac{1}{2} p, \quad \text{also } r' = r,$$

folglich erscheint der Gegenstand, durch das Prisma gesehen, in eben der Entfernung, als ohne das Prisma, wenn man letzterm die besagte Lage gegeben hat.

§. 365.

Man kann sich ebenfalls des Prisma bedienen, um das Brechungsverhältniſs von Flüssigkeiten zu finden, indem man zwei Glasplatten aneinander setzt und den

dazwischen enthaltenen hohlen prismatischen Raum mit der zu untersuchenden Flüssigkeit ausfüllt. Um die hierzu gehörigen analytischen Rechnungen gleich in der gröſsten Allgemeinheit zu führen, wollen wir annehmen, die Glasplatten hätten nicht ganz parallele Flächen, sondern bildeten Prismen, so daſs also die prismatische Gestalt der eingeschlossenen Flüssigkeit sich zwischen zwei Prismen befindet. Es sey nun

der erste Einfallswinkel $= \varepsilon$
der erste Brechungswinkel $= \beta$
der zweite Einfallswinkel $= \varepsilon'$
der zweite Brechungswinkel $= \beta'$
der dritte Einfallswinkel $= \varepsilon''$
der dritte Brechungswinkel $= \beta''$
der vierte Einfallswinkel $= \varepsilon'''$
der vierte Brechungswinkel $= \beta'''$

das Brechungsverhältniſs des Glases $= n$
das Brechungsverhältniſs der Flüssigkeit $= n'$
der brechende Winkel des ersten Glasprisma $= p$
der brechende Winkel der Flüssigkeit $= p'$
der brechende Winkel des zweiten Glasprisma $= p''$,

so erhält man (§. 355.) folgende Gleichungen, wenn man bemerkt, daſs nach §. 351. das relative Brechungsverhältniſs aus Glas in Flüssigkeit durch $\frac{n'}{n}$ ausgedrückt wird,

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \beta,$$

$$\sin \varepsilon' = \frac{n'}{n} \cdot \sin \beta',$$

$$\sin \varepsilon'' = \frac{n}{n'} \cdot \sin \beta'',$$

$$\sin \varepsilon''' = \frac{1}{n} \cdot \sin \beta''',$$

$$p + \varepsilon' - \beta = o$$
$$p' + \varepsilon'' - \beta' = o$$
$$p'' + \varepsilon''' - \beta'' = o.$$

Vermöge dieser sieben Gleichungen kann man ε', ε'', ε''', β, β', β'' eliminiren, und man erhält eine Gleichung zwischen ε, β'''.

§. 366.

Aus den drei letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe von ε', ε'', ε''', die man in die zweite, dritte und vierte substituiren kann; hierdurch wird

$$\sin \varepsilon = n . \sin \beta$$

$$\sin (\beta - p) = \frac{n'}{n} \cdot \sin \beta'$$

$$\sin (\beta' - p') = \frac{n}{n'} \cdot \sin \beta''$$

$$\sin (\beta'' - p'') = \frac{1}{n} \cdot \sin \beta'''.$$

Sind die Glasplatten, welche die Flüssigkeit einschliefsen, mit genau parallelen Flächen versehen, so ist $p = o$, $p'' = o$, und man erhält

$$\sin \beta''' = \cos p' . \sin \varepsilon - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2},$$

also nimmt dann der Strahl einen solchen Weg, als ob die Glasplatten gar nicht vorhanden wären. Denn diese Gleichung drückt den Sinus des Winkels des zweimal gebrochenen Strahls mit dem Einfallsloth für den Fall aus, wo der Einfallswinkel $= \varepsilon$, der brechende Winkel des Prisma $= p'$, und das Brechungsverhältnifs der Materie $= n'$ ist.

§. 367.

Eine vollständige Auflösung der vorigen Formeln für jede Werthe der Winkel p, p'' würde etwas zu weitläufig ausfallen; wir haben aber auch nicht nöthig, dieses zu thun, da man in der Ausübung immer solche Glastafeln wählt, die wenigstens so sehr als möglich sich dem Parallelismus rücksichtlich der Seitenflächen nähern, so dafs die Winkel p, p'', wenn sie auch nicht wirklich Null sind, doch sehr klein ausfallen. Nun giebt die Gleichung

$$\sin (\beta - p) = \frac{n'}{n} \cdot \sin \beta'$$

$$\sin \beta . \cos p - \cos \beta . \sin p = \frac{n'}{n} \cdot \sin \beta',$$

also, wenn man das Glied $\sin\beta \, . \cos p$ auf die andere Seite setzt, und quadrirt,

$$\sin\beta^2 \, . \cos p^2 - 2 \, . \sin\beta \, . \cos p \, . \sin\beta' \cdot \frac{n'}{n} + \sin\beta'^2 \cdot \frac{n'n'}{nn}$$
$$= \sin p^2 - \sin p^2 \, . \sin\beta^2.$$

Hieraus erhält man, indem $\cos p = 1$ gesetzt wird,

$$\sin\beta = \sin\beta' \cdot \frac{n'}{n} + \sin p \, . \sqrt{1 - \frac{n'n'}{nn} \cdot \sin\beta'^2},$$

also, da $\sin\varepsilon = n \, . \sin\beta$,

$$\sin\varepsilon = n' \, . \sin\beta' + \sin p \, . \sqrt{nn - n'n' \, . \sin\beta'^2}.$$

Eben so giebt die Gleichung

$$\sin(\beta'' - p'') = \frac{1}{n} \cdot \sin\beta''',$$

indem man sich erlaubt, $\cos p'' = 1$ zu nehmen,

$$\sin\beta'' = \frac{1}{n} \cdot \sin\beta''' + \sin p'' \, . \sqrt{1 - \frac{1}{nn} \cdot \sin\beta'''^2},$$

und da $\sin(\beta' - p') = \frac{n}{n'} \cdot \sin\beta''$, so wird

$$\sin(\beta' - p') = \frac{1}{n'} \cdot \sin\beta''' + \sin p'' \, . \sqrt{\frac{nn}{n'n'} - \frac{1}{n'n'} \cdot \sin\beta'''^2}.$$

Aus der Gleichung

$$\sin\varepsilon = n' \, . \sin\beta' + \sin p \, . \sqrt{nn - n'n' \, . \sin\beta'^2}$$

hat man nun auch näherungsweise

$$n' \, . \sin\beta' = \sin\varepsilon - \sin p \, . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$

$$n' \, . \cos\beta' = \sqrt{n'n' - \sin\varepsilon^2} + \sin\varepsilon \, . \sin p \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin\varepsilon^2}}$$

folglich wird hierdurch

$$n' \, . \sin(\beta' - p') = - \sin p' \, . \sqrt{n'n' - \sin\varepsilon^2}$$
$$- \sin\varepsilon \, . \sin p \, . \sin p' \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin\varepsilon^2}}$$
$$- \sin p \, . \cos p' \, . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$
$$+ \sin\varepsilon \, . \cos p',$$

und dieser Ausdruck mufs

$$= \sin\beta''' + \sin p'' \, . \sqrt{nn - \sin\beta'''^2}$$

gesetzt werden. Läfst man alle in $\sin p$ und $\sin p''$ multiplicirten Glieder weg, so behält man blofs

$$\sin \varepsilon . \cos p' - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} = \sin 6''',$$

und diesen genäherten Werth von $\sin 6'''$ kann man in die Radicalgröfse substituiren. Hierdurch ergiebt sich der Werth von $\sin 6'''$

$$\sin 6''' = - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} + \sin \varepsilon . \cos p'$$
$$- \sin p . \cos p' . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$
$$- \sin p'' . \sqrt{nn - \sin 6'''^2}$$
$$- \sin \varepsilon . \sin p . \sin p' . \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}}.$$

Hat man nun ε, $6'''$ beobachtet, und kennt man das Brechungsverhältnifs des Glases n, so wie die brechenden Winkel p, p', p'', so läfst sich hierdurch n' finden. Man würde zu diesem Ende zuerst n' aus der Gleichung

$$\sin \varepsilon . \cos p' - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} = \sin 6''',$$

aus der sich der Werth von

$$n' = \frac{\sqrt{\sin 6'''^2 - 2 . \cos p' . \sin \varepsilon . \sin 6''' + \sin \varepsilon^2}}{\sin p'}$$

ergiebt, suchen, wodurch man schon einen sehr genäherten Ausdruck erhält. Nimmt man nun an, der wahre sey $= n' + \delta n'$, so hat man zur Bestimmung von $\delta n'$ die Gleichung

$$o = \frac{n'\delta n' + \sin \varepsilon . \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}} . \sin p'$$
$$+ \sin p . \cos p' . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin p'' . \sqrt{nn - \sin 6'''^2},$$

aus welcher $\delta n'$ leicht gefunden wird. Was die bei der Brechung durch das Prisma Statt findende Farbenzerstreuung betrifft, so wird von dieser späterhin die Rede seyn.

§. 368.

Wir haben früher §. 343. untersucht, welche Erscheinungen ein belegter ebener Glasspiegel darbietet,

wenn die Brechung des Lichts in Betracht gezogen wird, und wir wollen jetzt die Aenderungen betrachten, welche wegen der Brechung in einem belegten gläsernen Hohlspiegel Statt finden, wobei wir der Allgemeinheit wegen annehmen, daſs die vordere und hintere Fläche desselben nicht aus einem und demselben Mittelpunkt beschrieben sind; zugleich machen wir die Voraussetzung, der leuchtende Punkt liege in der Axe so entfernt, daſs alle auf den Spiegel fallenden Strahlen als untereinander parallel angesehen werden können. Es seyen daher C, C' die Mittelpunkte der Bogen AB, $A'B'$ (Fig. 49.), LM ein mit der Axe CC' parallel einfallender Strahl, so ist CM das Einfallsloth, und wir setzen, wie schon in der Catoptrik bei dem Hohlspiegel geschehen ist, den Winkel $DCM = \alpha$, so wird α der Einfallswinkel. Hierauf geht der Strahl nach MM' fort, und setzt man $NMM' = \beta$, das Brechungsverhältniſs $= n$, so hat man

$$\sin \alpha = n . \sin \beta.$$

Man verlängere MM' rückwärts, bis sie die Axe in K schneidet, so ist im Dreieck CMK

$$MCK = 180^0 - \alpha,\ CKM = \alpha - \beta,\ CMK = \beta.$$

und man hat die Proportion

$$CM : CK = \sin MKC : \sin CMK.$$

Setzt man den Halbmesser der vordern Fläche $CM = r$, den Halbmesser der hintern Fläche $C'M' = r'$, die Dicke des Spiegels am Scheitel $DD' = c$, so wird

$$r : CK = \sin(\alpha - \beta) : \sin \beta$$

$$CK = \frac{r . \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$C'K = CK - CC'$$
$$= CK - C'D' + CD + DD';$$

folglich mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$C'K = \frac{r . \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + r + c - r',$$

und man erhält im Dreieck $C'M'K$ die Proportion

$$C'M' : C'K = \sin C'KM' : \sin C'M'K.$$

Bezeichnet man also den Winkel $C'M'K$ durch γ, so ist

$$r' : \frac{r \,.\, \sin 6}{\sin(\alpha - 6)} + r + c - r' = \sin(\alpha - 6) : \sin\gamma$$

$$\sin\gamma = \frac{r}{r'} \cdot \sin 6 - \frac{r' - r - c}{r'} \cdot \sin(\alpha - 6).$$

Man ziehe nun $M'P$ so, dafs der Winkel $PM'C'$ dem Winkel $MM'C'$ gleich ist, so wird $M'P$ den an der hintern belegten Fläche zurückgeworfenen Strahl darstellen, welcher verlängert die Axe in Q schneiden mag.

Ferner erhält man im Dreieck $C'M'Q$

$$C'M' : C'Q = \sin M'QD : \sin QM'C.$$

Es ist aber $M'QD = M'KD + QM'K = \alpha - 6 + 2\gamma$

$$QM'C = \gamma,$$

folglich läfst sich obige Proportion so schreiben:

$$r' : C'Q = \sin(\alpha + 2\gamma - 6) : \sin\gamma$$

$$C'Q = \frac{r' \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + 2\gamma - 6)}.$$

Zieht man den Halbmesser CP, der das Einfallsloth am Punkt P vorstellt, so kennt man im Dreieck CPQ die zwei Seiten CP, CQ und den Winkel $PQD = M'QD = \alpha - 6 + 2\gamma$; es wird also

$$PC : CQ = \sin PQC : \sin QPC.$$

Nun ist aber

$$CQ = C'Q - CC'$$

$$= \frac{r' \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + 2\gamma - 6)} - (r' - r - c),$$

und wenn man noch $QPC = \delta$ setzt, so wird

$$r : \frac{r' \,.\, \sin\gamma}{\sin(\alpha + 2\gamma - 6)} - (r' - r - c)$$

$$= \sin(\alpha + 2\gamma - 6) : \sin\delta$$

$$\sin\delta = \frac{r'}{r} \cdot \sin\gamma - \frac{r' - r - c}{r} \cdot \sin(\alpha + 2\gamma - 6).$$

Endlich werde der bei P aus dem Glase heraustretende Strahl nach PT gebrochen und schneide die Axe in T; bezeichnet man den Winkel CPT durch ε, so ist

$$\sin\varepsilon = n \,.\, \sin\delta.$$

Im Dreieck TPC ist dann der Winkel

$$PCT = \alpha - \beta + 2\gamma - \delta$$

$$PTC = 180^0 - (\alpha - \beta + 2\gamma - \delta + \varepsilon),$$

und man hat die Proportion

$$CT : CM = \sin TPC : \sin PTC$$

$$CT = \frac{r \,.\, \sin\varepsilon}{\sin(\alpha - \beta + 2\gamma - \delta + \varepsilon)}.$$

Setzt man noch $DT = u$, so kommt, da $CT = r - u$,

$$u = r - \frac{r \,.\, \sin\varepsilon}{\sin(\alpha - \beta + 2\gamma - \delta + \varepsilon)}.$$

§. 369.

Wir haben also folgende Reihe von Gleichungen:

1) $\sin\alpha = n \,.\, \sin\beta$

2) $\sin\gamma = \frac{r}{r'} \cdot \sin\beta - \frac{r' - r - c}{r'} \cdot \sin(\alpha - \beta)$

3) $\sin\delta = \frac{r'}{r} \cdot \sin\gamma - \frac{r' - r - c}{r} \cdot \sin(\alpha + 2\gamma - \beta)$

4) $\sin\varepsilon = n \,.\, \sin\delta$

5) $u = r - \frac{r \,.\, \sin\varepsilon}{\sin(\alpha + 2\gamma - \beta - \delta + \varepsilon)}$,

aus denen β, γ, δ, ε eliminirt werden müssen, so daſs nur eine Gleichung zwischen α, u übrig bleibt. Allein bloſs unter der Voraussetzung, alle vorkommenden Winkel seyen klein genug, daſs die höhern Potenzen derselben vernachlässigt werden können, werden wir dieselben auflösen, und diese Voraussetzung läſst sich bei den Hohlspiegeln immer anwenden.

§. 370.

Die Gleichungen des vorigen Paragraphen geben, wenn wir nur die erste Potenz von $\sin\alpha$ berücksichtigen, und der Kürze halber $r' - r - c = \varrho$ setzen, folgende Werthe:

$$\sin \beta = \frac{1}{n} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \gamma = \frac{r - \varrho . (n - 1)}{nr'} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \delta = \frac{r . (r' - 2\varrho) - 2\varrho . (r' - \varrho) . (n - 1)}{nrr'} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \varepsilon = \frac{r . (r' - 2\varrho) - 2\varrho . (r' - \varrho) . (n - 1)}{rr'} \cdot \sin \alpha$$

$$u = r - \frac{(r . (r' - 2\varrho) - 2\varrho . (r' - \varrho) . (n - 1)) . nr}{2rr_{,} + 2 . (n - 1) . (r . (r' - 2\varrho) - \varrho . (r' - \varrho) . (n - 1))}.$$

Vernachlässigen wir also die höhern Potenzen von $\sin \alpha$, so vereinigen sich auch hier alle mit der Axe parallel einfallenden Strahlen in einem einzigen Punkte derselben, dessen Entfernung von der vordern Fläche des Spiegels durch u ausgedrückt wird. Setzen wir $n = 1$, so findet keine Brechung Statt, und unsre Formel für u muſs in die §. 271. abgeleitete übergehen. Wir finden für diesen Fall

$$u = r - \frac{r'}{2} + \varrho = \frac{r'}{2} - c,$$

also, um die Entfernung des Vereinigungspunkts T von der spiegelnden Fläche zu bestimmen, haben wir

$$D'T = u + c = \frac{r'}{2},$$

wie im §. 271.

§. 371.

Der für u gefundene Ausdruck wird in dem Falle, wo die Mittelpunkte der beiden Bogen AB, $A'B'$ zusammenfallen, sehr einfach, unter dieser Voraussetzung ist $\varrho = o$, und wir finden

$$u = r - \frac{nrr'}{2 . (r + (n - 1) . r')},$$

also $D'T = r' - \dfrac{nrr'}{2.(r + (n-1).r')} = \dfrac{r'}{2} + \dfrac{nr' . (r' - r)}{2.(r + (n-1).r')},$

woraus folgt, daſs der Vereinigungspunkt bei einem belegten sphärischen Glasspiegel weiter von demselben

entfernt ist, als bei einem Metallspiegel, dessen Radius dem der belegten Glasfläche gleich ist. Setzen wir z. B. $r = r' = 48$ Zoll $= 576$ Linien, die Dicke des Spiegels $= 1$ Linie, $n = \frac{3}{2}$, so ist $D'T = 288.5$ Linien, während für einen Metallspiegel $D'T = 288$ seyn würde.

Nehmen wir, um unsre für u gefundene Näherungsformel zu prüfen, an, es sey $r' = 576$, $r = 574$, $c = 1$, $n = \frac{3}{2}$, $\alpha = 12^0$, so ist $\varrho = 1$, und wir finden nach den genauen Formeln des §. 369.

$$\begin{aligned}
\beta &= 5^0\ 19'\ 25''.5 \\
\gamma &= 5^0\ 18'\ 2'' \\
\delta &= 5^0\ 17'\ 44'' \\
\varepsilon &= 7^0\ 57'\ 30'' \\
u &= 284.63.
\end{aligned}$$

Die §. 370. aufgestellten Ausdrücke geben

$$\begin{aligned}
\beta &= 5^0\ 19'\ 25''.5 \\
\gamma &= 5^0\ 18'\ 2'' \\
\delta &= 5^0\ 17'\ 23'' \\
\varepsilon &= 7^0\ 55'\ 45'' \\
u &= 287.43,
\end{aligned}$$

also von den wahren Werthen nur wenig verschieden. Man erhält ferner $D'T = 289.03$, fände keine Refraction Statt, so wäre

$$D'T = r' - \frac{r'}{2 . \cos \alpha} = 284.6.$$

Von der Brechung des Lichts in den Glaslinsen.

§. 372.

Nimmt man auf der Linie AB (Fig. 50.) zwei Punkte C und D an, und beschreibt aus ihnen mit den beliebigen Halbmessern CF, DE zwei Kreisbogen GFH, GEH, die sich in G und H durchschneiden, so wird hierdurch in der Ebene ein Raum eingeschlossen, der aus zwei Kreissegmenten besteht. Wird nun diese Figur so herumgedreht, daſs die Linie AB eine unveränderte Lage beibehält, also als Drehungsaxe betrachtet wird, so beschreibt die Figur $GEHF$ einen Körper, der aus zwei Kugelsegmenten besteht, und die zu diesen Segmenten gehörigen Kugeln werden eben die Halbmesser haben, als die Kreise, aus deren Segmenten die ebene Figur zusammengesetzt war. Denkt man sich den von den Oberflächen der Kegelsegmente eingeschlossenen Raum mit irgend einer brechenden Materie angefüllt, so nennt man diesen Körper eine lichtbrechende Linse. Da in der Praxis das brechende Mittel fast immer aus Glas besteht, so heiſst dieser Körper gewöhnlich eine Glaslinse, obgleich die Schlüsse, welche rücksichtlich der bei dem Durchgang des Lichts durch solche Linsen Statt findenden Erscheinungen abgeleitet werden, sich ganz allgemein auf jede brechende Materie anwenden lassen, wenn man nur dem Brechungsverhältniſs den jeder besonde n Materie zukommenden numerischen Werth in jedem besondern Fall beilegt. Die Linie AB, welche die Mittelpunkte beider Kugeln verbindet, von welchen die Segmente, die die Glaslinse

ausmachen, genommen sind, heiſst die Axe der Linse, und es ist aus geometrischen Gründen bekannt, daſs diese Axe in *E* und *F* senkrecht auf der Linse stehen muſs. Die Entfernung der beiden Punkte *G* und *H* von einander, heiſst der Durchmesser der Oeffnung der Linse, und *EF* ihre Dicke.

§. 373.

Aus der im vorigen Paragraph angegebenen Entstehung der Linsen sieht man, daſs, zufolge der verschiedenen Lage der Mittelpunkte *C* und *D* rücksichtlich der aus ihnen mit beliebigen Halbmessern beschriebenen Kreisbogen, sehr verschiedene Gestalten der Linsen hervorgehen können. Die Fälle, welche hierbei Statt finden, sind folgende (Fig. 51.):

A) Die Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten der Linse, und die Kreisbogen durchschneiden sich, dann heiſst die Linse ein biconvexes Glas.

B) Die Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten der Linse, während die Kreisbogen sich nicht durchschneiden. Um in einem solchen Fall die Figur zu schlieſsen, muſs man sich die Endpunkte der Kreisbogen durch beliebige Linien, z. B. durch grade, welche der Axe des Glases parallel liegen, verbunden denken; diese Gestalt heiſst ein biconcaves Glas.

C) Die Mittelpunkte liegen auf einerlei Seite des Glases, und die Kreisbogen durchschneiden sich; dann heiſst die Linse ein Meniscus, oder ein concav-convexes Glas.

D) Die Mittelpunkte liegen auf einerlei Seite des Glases, und die Kreisbogen durchschneiden sich nicht; dann erhält man das convex-concave Glas.

Endlich sind noch zwei Arten von Glaslinsen übrig, die bloſs auf einer Seite gekrümmt sind, während die andere eine Ebene bildet, welche senkrecht auf dem durch die Mitte des Glases gezogenen Halbmesser oder seiner Verlängerung steht. Diese sind durch die Figuren *E* und *F* dargestellt, von denen das erste ein plan-

convexes, das zweite ein planconcaves Glas genannt wird. Man kann diese Arten als besondere Fälle der Gläser *A* und *B* ansehen, indem man nämlich den Halbmesser des Kugelschnitts der einen Seite unendlich grofs werden läfst. Die Gläser *A*, *C*, *E* heifsen allgemein convexe oder erhabene Gläser, so wie die unter *B*, *D*, *F* dargestellten, concave oder Hohlgläser genannt werden, da die erstern im Allgemeinen das Licht mehr concentriren, die letztern hingegen zerstreuen.

§. 374.

Um nun den Weg eines Lichtstrahls durch ein gewisses Glas zu untersuchen, mufs man rücksichtlich des Punktes, von welchem das Licht ausgeht, zwei besondere Fälle unterscheiden, je nachdem sich nämlich der leuchtende Punkt in der Axe selbst oder aufserhalb derselben befindet, und mit der Untersuchung des erstern Falles werden wir den Anfang machen.

Einen grofsen Vortheil gewährt bei diesen dioptrischen Untersuchungen die analytische Behandlung der Gegenstände, indem man nicht bei jeder Art von Gläsern die ganze Rechnung wieder von vorn anzufangen braucht, sondern es völlig hinreichend ist, ein einziges Glas als Normalfall zu betrachten, und aus den hierdurch gefundenen Resultaten blofs durch gehörige Aenderung der Vorzeichen die Erscheinungen, welche bei den übrigen Arten von Glaslinsen Statt finden, abzuleiten. Wir werden daher die ausführliche Betrachtung des Weges des Lichtstrahls an dem unter *A* vorgestellten biconvexen Glase vornehmen. Uebrigens ist es einleuchtend, dafs es bei dieser Untersuchung nicht nöthig ist, die Linse als Körper zu betrachten; denn da alle Schnitte, vermittelst Ebenen, die durch die Axe des Glases gehen, ganz gleiche Durchschnittsfiguren geben, so ist es hinreichend, einen dieser Durchschnitte zu betrachten, da alle aus dessen Eigenschaften abgeleiteten Resultate für alle übrigen Durchschnitte gleichfalls gelten müssen.

Es sey daher *HEGF* (Fig. 52.) der Durchschnitt eines biconvexen Glases, *C* und *D* die Mittelpunkte der Kreisbogen *GFH*, *GEH*, so daſs die durch *C* und *D* gezogene Linie die Axe des Glases vorstellt. In *A* befinde sich ein strahlender Punkt, der einen Lichtstrahl *AM* ausschickt, von welchem das Glas in *M* getroffen wird. Zieht man den Halbmesser *DM*, so ist dieser das Einfallsloth, und da wir das Glas von Luft, also einer weniger brechenden Materie, umgeben ansehen, so wird der Lichtstrahl *AM* so gebrochen, daſs er innerhalb des Glases seinen Weg nach *MO* fortsetzt, und *MO* dem Einfallsloth *MD* näher liegen wird, als die Verlängerung *MN* des einfallenden Strahls. Zieht man hierauf den Halbmesser *CO*, dessen Verlängerung durch *OQ* angegeben wird, so wird der in *O* aus dem Glase wieder in Luft oder den leeren Raum übertretende Strahl einen gröſsern Winkel mit *OQ* machen, als die Verlängerung *OP* von *OM*. Er wird also nach *OB* fortgehen, und in *B* die Axe treffen. Uebrigens ist es einleuchtend, daſs die Axe *AP* selbst den Weg eines Lichtstrahls darstellt; denn da auch *AE* als ein einfallender Lichtstrahl betrachtet werden kann, so geht dieser ungebrochen ins Glas nach der Richtung *EF* fort, da *AE* senkrecht auf der brechenden Fläche steht. Aus demselben Grunde geht der Strahl auch wieder ungebrochen nach *B* fort, und der Punkt *B* wird als der Durchschnitt zweier vom Punkt *A* herkommenden Strahlen angesehen werden können, folglich in *B* sich ein Bild des Punktes *A* befinden.

§. 375.

Man setze den Halbmesser der vordern Fläche $DM = r$, den der hintern $CO = \varrho$, die Dicke der Linse $EF = c$, so ist durch diese drei Gröſsen die Gestalt der Linse bestimmt; den Abstand *EA* des Objects von der vordern Seite des Glases nenne man h, die Entfernung *FB* des Bildes von der hintern Seite k,

setze ferner $MAC = \varphi$, $EDM = \theta$, $OPB = \varphi'$, $OCE = \theta'$, $OBD = \varphi''$, das Brechungsverhältniſs $= n$. Uebrigens ist die Verzeichnung der Figur für den Normalfall so angelegt, daſs das Object eine solche Entfernung vom Glase hat, bei welcher schon nach der ersten Brechung des Strahls in M die Verlängerung desselben die Axe hinter dem Glase in P schneidet, welches, wie man leicht sieht, nicht Statt haben kann, sobald das Object dem Glase sehr nahe liegt; dann muſs man sich die Linie MD rückwärts verlängert denken, und ihre Verlängerung schneidet dann die Axe der Glaslinse auf derselben Seite, auf welcher das Object liegt.

§. 376.

Es kommt nun darauf an, aus den zur Bestimmung der Linse und der Lage des Objects gegebenen Gröſsen die Lage des Bildes abzuleiten. Im Dreieck ADM ist

$$AD : DM = \sin AMD : \sin MAD.$$

Nun wird aber

$$AMD = 180^0 - NMD = 180^0 - (MDA + MAD)$$
$$= 180^0 - (\varphi + \theta)$$
$$AD = AE + ED = h + r; \quad DM = r,$$

folglich ist obige Proportion

$$h + r : r = \sin(\varphi + \theta) : \sin\varphi,$$

und hieraus

$$\sin(\varphi + \theta) = \frac{h + r}{r} \cdot \sin\varphi.$$

Vermöge der bekannten Gesetze der Lichtbrechung wird

$$\sin NMD : \sin OMD = n : 1,$$

oder da

$$OMD = MDA - MPD = \theta - \varphi',$$

so kommt

$$\sin(\varphi + \theta) : \sin(\theta - \varphi') = n : 1$$
$$\sin(\theta - \varphi') = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{n}.$$

Im Dreieck DMP hat man

$$DP : DM = \sin DMP : \sin MPD,$$

und da $DMP = \theta - \varphi'$, so wird

$$DP : r = \sin(\theta - \varphi') : \sin\varphi'$$

$$DP = r \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi')}{\sin\varphi'}.$$

§. 377.

Das Dreieck COP giebt die Proportion

$$CP : CO = \sin COP : \sin OPC.$$

Nun ist aber

$$COP = 180^0 - MOC = 180^0 - (OCP + OPC)$$
$$= 180^0 - (\theta' + \varphi')$$
$$CP = DP + CF + ED - EF$$
$$= DP + r + \varrho - c,$$

folglich wird vorige Proportion

$$DP + r + \varrho - c : \varrho = \sin(\theta' + \varphi') : \sin\varphi',$$

oder, wenn man hierin den Werth von DP aus voriger Gleichung substituirt,

$$(r + \varrho - c) . \sin\varphi' + r . \sin(\theta - \varphi') = \varrho . \sin(\theta' + \varphi')$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = \left(\frac{r - c}{\varrho} + 1\right) . \sin\varphi' + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - \varphi').$$

Die Relation zwischen den Winkeln QOP und QOB ergiebt sich aus der Proportion

$$\sin QOB : \sin QOP = n : 1.$$

Es ist aber in unsern Bezeichnungen

$$QOB = OCB + OBC$$
$$= \theta' + \varphi''$$
$$QOP = \theta' + \varphi',$$

folglich erhält man auch

$$\sin(\theta' + \varphi'') : \sin(\theta' + \varphi') = n : 1$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = n . \sin(\theta' + \varphi').$$

Endlich hat man im Dreieck COB die Proportion

$$CB : CO = \sin COB : \sin CBO$$
$$COB = 180^0 - (OCB + OBC)$$
$$= 180^0 - (\theta' + \varphi')$$
$$CB = CF + FB = \varrho + k,$$

folglich wird

$$\varrho + k : \varrho = \sin(\theta' + \varphi'') : \sin\varphi'',$$

und hieraus erhält man

$$k = \frac{\varrho . \sin(\theta' + \varphi'')}{\sin \varphi''} - \varrho,$$

wodurch der Abstand des Bildes von der hintern Seite des Glases gefunden ist.

§. 378.

Stellt man die in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Formeln zusammen, so hat man folgendes System:

1) $\sin(\theta + \varphi) = \frac{h + r}{r} \cdot \sin \varphi$

2) $\sin(\theta - \varphi') = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{n}$

3) $\sin(\theta' + \varphi') = \left(\frac{r - c}{\varrho} + 1\right) . \sin \varphi' + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - \varphi')$

4) $\sin(\theta' + \varphi'') = n . \sin(\theta' + \varphi')$

5) $k = \frac{\varrho . \sin(\theta' + \varphi'')}{\sin \varphi''} - \varrho,$

und diese fünf Gleichungen kann man als die Grundlage der Theorie des Weges der Lichtstrahlen durch Glaslinsen betrachten. Im Fall, dafs h unendlich grofs ist, oder wenigstens gegen die Dimensionen ϱ, r, c des Glases als unendlich betrachtet werden kann, wie dies z. B. dann eintritt, wenn der strahlende Punkt ein Himmelskörper ist, wird $\varphi = o$, und dann ist die erste der Formeln überflüssig, da die Gleichung $\sin \theta = o . \infty$ nichts Bestimmtes giebt. Um nun aus diesen Formeln alle vorkommenden Gröfsen zu bestimmen, mufs man jede derselben durch eine Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen eines der darin enthaltenen Winkel fortschreitet, wozu man sich sowohl des Winkels φ als des Winkels θ bedienen kann; φ ist der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Axe macht, θ der Winkel, den der aus dem Mittelpunkt der vordern Fläche der Glaslinse nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser mit der Axe bildet. Wir werden uns bei der Ent-

wickelung der Formeln in Reihen des Winkels θ bedienen, und die Reihen nach Potenzen des Sinus θ fortschreiten lassen.

§. 379.

Vernachlässigt man zuerst alle Potenzen, welche die erste übersteigen, so ergiebt sich ganz einfach

$$\sin\varphi = \frac{r}{h}\cdot\sin\theta$$

$$\sin\varphi' = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right).\sin\theta$$

$$\sin\theta' = \left[\frac{r}{\varrho} - \frac{c}{\varrho}\cdot\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right)\right].\sin\theta$$

$$\sin\varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho}\cdot\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right).\sin\theta$$

$$+ \frac{(n-1).r}{\varrho}\cdot\sin\theta$$

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1)-r)}.$$

Die Entfernung des Bildes von der hintern Seite des Glases ist also ganz unabhängig von der Lage des Einfallspunktes, in so fern die Strahlen so einfallen, daſs der Winkel θ bloſs in seiner ersten Potenz in Rechnung gezogen zu werden braucht.

§. 380.

Um nun die nächst folgende Potenz zu entwickeln, welche bei Untersuchung der Abweichung der Lichtstrahlen wegen der Kugelgestalt gebraucht wird, setze man der Kürze wegen

$$\frac{r}{h} = \alpha$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn} = \beta$$

$$\frac{r}{\varrho} - \frac{c}{\varrho}\cdot\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) = \gamma$$

$$\frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho}\cdot\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right)$$

$$+ \frac{(n-1).r}{\varrho} = \delta$$

und den oben angegebenen Werth von $k = \varkappa$. Man sieht nun leicht, daſs die Werthe von $\sin\varphi$, $\sin\varphi'$, $\sin\theta'$, $\sin\varphi''$, in Reihen entwickelt, bloſs nach den ungraden Potenzen von $\sin\theta$ fortschreiten, folglich dürfen wir annehmen, es sey

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \alpha . \sin\theta - A . \sin\theta^3 \\
\sin\varphi' &= \beta . \sin\theta - B . \sin\theta^3 \\
\sin\theta' &= \gamma . \sin\theta - C . \sin\theta^3 \\
\sin\varphi'' &= \delta . \sin\theta - D . \sin\theta^3 \\
k &= \varkappa \qquad\quad - \lambda . \sin\theta^2,
\end{aligned}$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, λ aus vorigen Gleichungen (§. 378.) bestimmt werden müssen.

§. 381.

Soll die Entwickelung bis zur dritten Potenz des $\sin\theta$ fortgesetzt werden, so muſs man statt des Cosinus jedes vorkommenden Winkels $1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2$ setzen. Die erste Gleichung giebt dann

$$\frac{h}{r} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot (\alpha^2 + \alpha),$$

oder, da $\frac{h}{r} = \frac{1}{\alpha}$ ist, so wird

$$A = \frac{1}{2} \cdot \alpha\alpha . (\alpha + 1).$$

Aus der zweiten Gleichung kommt

$$2B - \beta . (\beta - 1) = -\frac{2A}{n} - \frac{\alpha}{n} \cdot (\alpha + 1),$$

oder, wenn man statt A seinen Werth setzt,

$$2B - \beta . (\beta - 1) = -\frac{(\alpha + 1)^2 . \alpha}{n}$$

$$D = \beta . (\beta - 1) - \frac{(\alpha + 1)^2 . \alpha}{2n}.$$

Aus der dritten Gleichung erhält man

$$C + \frac{1}{2} \cdot \gamma\beta . (\gamma + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot \beta . (\beta - 1) - \frac{c}{\varrho} \cdot B.$$

Vermittelst der vierten Gleichung ergiebt sich

$$C + D + \frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma + \delta) = n.(C + B) + \frac{1}{2}.n\beta\gamma.(\gamma + \beta).$$

Endlich haben wir noch den Werth von λ, vermittelst der Gleichung

$$k.\sin\varphi'' = \varrho.\sin(\theta' + \varphi'') - \varrho.\sin\varphi'',$$

zu bestimmen, und man erhält durch die Entwickelung

$$\lambda\delta + \varkappa D = \varrho.\left[C + \frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma + \delta)\right].$$

Man sieht aber leicht, daſs der Werth von $\varkappa = \frac{\varrho\gamma}{\delta}$ ist, also wird

$$\lambda = \varrho\cdot\frac{C + \frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma + \delta)}{\delta} - \frac{\varrho\gamma D}{\delta\delta}.$$

§. 382.

In den Coefficienten A, B, C, D, λ darf man ohne merklichen Fehler die Dicke des Glases vernachlässigen. Man hat dann die Werthe der besagten Coefficienten

$$A = \frac{1}{2}.\alpha\alpha.(\alpha + 1)$$

$$B = -\frac{1}{2}.\beta.(1 - \beta) - \frac{1}{2n}.(\alpha + 1)^2.\alpha.$$

Ferner bestimmt sich C aus der Gleichung

$$C + \frac{1}{2}.\gamma\beta.(\gamma + \beta) = \frac{1}{2}.\frac{r}{\varrho}.\beta.(\beta - 1),$$

allein unter der Voraussetzung $c = o$, ist $\frac{r}{\varrho} = \gamma$, also kommt

$$C = -\frac{1}{2}.\gamma\beta.(\gamma + 1).$$

Eben so wird

$$D = (n-1).C + \frac{1}{2}.n\gamma\beta.(\gamma + \beta) - \frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma + \delta) + nB$$

$$= \frac{1}{2}.\beta.(\gamma + 1).[\gamma - n.(1 - \beta)]$$

$$- \frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma + \delta) - \frac{1}{2}.\alpha.(\alpha + 1)^2.$$

Endlich folgt aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{C + \frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma + \delta)}{\delta}.\varrho - \frac{\varrho\gamma D}{\delta\delta},$$

dieser Werth

$$\lambda.\frac{\delta\delta}{\varrho} = -\frac{1}{2}.6\gamma.(\gamma + 1).[\gamma + \delta - n.(1 - 6)]$$

$$+ \frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma + \delta)^2 + \frac{1}{2}.\alpha\gamma.(\alpha + 1)^2.$$

§. 383.

Die Werthe von α, 6, γ, δ sind folgende:

$$\alpha = \frac{r}{h},\quad 6 = \frac{h.(n-1) - r}{hn}$$

$$\gamma = \frac{r}{\varrho},\quad \delta = \frac{(n-1).(r+\varrho)}{\varrho} - \frac{r}{h},$$

allein statt diese in vorige Gleichungen zu substituiren, wollen wir an die Stelle der Halbmesser r, ϱ andere Grösen einführen. Setzt man nämlich

$$\frac{hnr}{h.(n-1) - r} = p,$$

so wird

$$r = \frac{ph.(n-1)}{p + hn},$$

und substituirt man diesen Werth in den Ausdruck $\varkappa$, indem die Dicke c des Glases vernachlässigt wird, so kommt

$$\varkappa = \frac{\varrho p}{p.(n-1) + \varrho n}$$

$$\varrho = \frac{\varkappa p.(n-1)}{p - \varkappa n}.$$

Setzt man diese Werthe von r, ϱ in die Ausdrücke von α, 6, γ, δ, so kommt

$$\alpha = \frac{p.(n-1)}{p + hn},\quad 6 = \frac{h.(n-1)}{p + hn}$$

$$\gamma = \frac{p - \varkappa n}{p + hn}.\frac{h}{\varkappa},\quad \delta = \frac{ph.(n-1)}{(p + hn).\varkappa}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1)^2.pp.(p+h)}{(p+hn)^3}$$

$$B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).h.(p+h)}{(p+hn)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p.(p+h)^2}{(p+hn)^3}$$

$$C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).hhp.(p-\varkappa n).(h+\varkappa)}{(p+hn)^3.\varkappa\varkappa}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).hhp.(p-\varkappa n)}{(p+hn)^3.\varkappa^3} \cdot [\varkappa.(h+\varkappa) - nh.(p-\varkappa)]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p.(p+h)}{(p+hn)^3.\varkappa} \cdot [h.(h+\varkappa) + n.(p+h).\varkappa]$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{nn.hh.(p-\varkappa)^2}{(p+hn)^2.\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{nn.\varkappa\varkappa.(p+h)^2}{(p+hn)^2.h}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{n\varkappa.(p+h).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{nh.(p-\varkappa).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2}.$$

§. 384.

Für einen sehr weit entfernten Gegenstand, wo $h = \infty$ gesetzt werden kann, werden die Werthe α, β, γ, δ mit Berücksichtigung der Dicke des Glases (§. 380.)

$$\alpha = o, \quad \beta = \frac{n-1}{n}$$

$$\gamma = \frac{p-\varkappa n}{\varkappa n} \cdot \frac{p-c}{p}$$

$$\delta = \frac{p.(n-1)}{\varkappa n} - \frac{c.(p-\varkappa n).(n-1)}{\varkappa np}.$$

Die Werthe der andern Coefficienten sind ferner für diesen Fall

$$A = o, \quad B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{nn}$$

$$C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p.(p-\varkappa n)}{n^3.\varkappa\varkappa}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p.(p-\varkappa n)}{n^3\varkappa^3} \cdot [\varkappa - np + \varkappa n]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p}{nn\varkappa}$$

$$\lambda = \frac{(p-\varkappa)^2}{2\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varkappa - p}{n}.$$

§. 385.

Aus den Halbmessern der beiden Flächen der Linse und aus ihrer Dicke läſst sich leicht auf folgende Art der Durchmesser ihrer Oeffnung berechnen. Es seyen C und D die Mittelpunkte zweier Kreise (Fig. 53.), die sich in E und F schneiden, so wird die Linie EF die gesuchte Gröſse seyn. Man setze $DE = r$, $CE = \varrho$, $GH = c$, so wird $CD = r + \varrho - c$, und

$$\sin EDC = \frac{\sqrt{c.(2\varrho - c).(2r - c).(2r + 2\varrho - c)}}{2r.(r + \varrho - c)}.$$

Da $EK = \frac{1}{2}EF$, und senkrecht auf CD steht, so hat man

$$EK = ED.\sin EDC$$
$$EF = 2ED.\sin EDC,$$

also, wenn man die Werthe von ED und $\sin EDC$ substituirt,

$$EF = \frac{\sqrt{c.(2\varrho - c).(2r - c).(2r + 2\varrho - c)}}{r + \varrho - c}.$$

Der Werth des Winkels EDC, welcher sich aus voriger Formel ergiebt, ist, wie man aus Vergleichung dieser Figur mit Figur 52 sieht, der gröſste Werth, den der Winkel θ bei der gegebenen Glaslinse erreichen kann.

Will man umgekehrt aus den Halbmessern der Flächen der Glaslinse und dem gröſsten Werth des Winkels θ die Dicke der Glaslinse finden, so hat man auf folgende Art zu verfahren. Im Dreieck CED erhält man $\varrho\varrho = rr + (r + \varrho - c)^2 - 2r.(r + \varrho - c).\cos\theta$, also, wenn diese Gleichung nach $r + \varrho - c$ aufgelöſst wird, so ergiebt sich

$$c = 2r.\sin\tfrac{1}{2}\theta^2 + \varrho - \sqrt{\varrho\varrho - rr.\sin\theta^2}.$$

Es sey z. B. $r = 4$ Fuſs, $\varrho = 2$ Fuſs, $\theta = 15^0$, so wird

$$c = 0{,}4250975.$$

§. 386.

Bei den angegebenen Werthen von r und ϱ, dem Brechungsverhältniſs $n = \frac{3}{2}$, und der Annahme eines

unendlich entfernten Gegenstandes, hat man

$$p = 12, \quad \varkappa = \frac{8}{3},$$

also mit Berücksichtigung der Dicke des Glases

$$\alpha = o, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = 1{,}929150$$

$$\delta = 1{,}464575, \quad \varkappa = 2{,}634417.$$

Was die Werthe der andern Coefficienten betrifft, so hat man

$$A = o, \quad B = -\frac{1}{9}, \quad C = -1$$

$$D = -\frac{19}{4}, \quad \lambda = +\frac{127}{9}.$$

Man hat daher nach den Formeln (§. 380.)

$$\sin \varphi' = \frac{1}{3} \cdot \sin \theta + \frac{1}{9} \cdot \sin \theta^3$$

$$\sin \theta' = 1{,}929150 \,.\, \sin \theta + \sin \theta^3$$

$$\sin \varphi'' = 1{,}464575 \,.\, \sin \theta + \frac{19}{4} \cdot \sin \theta^3$$

$$k = 2{,}634417 - \frac{127}{9} \cdot \sin \theta^2.$$

Setzt man z. B. $\theta = 12^0$, so erhält man

$$\varphi' = 4^0\ 1'\ 53''$$
$$\theta' = 24\ 12\ 36$$
$$\varphi'' = 20\ 18\ 56$$
$$k = 2{,}024432.$$

Führt man die Berechnung nach den genauen Formeln des §. 378. aus, so erhält man folgende Resultate:

$$\varphi' = 4^0\ 1'\ 58''$$
$$\theta' = 24\ 12\ 46$$
$$\varphi'' = 21\ 0\ 43$$
$$k = 1{,}959553.$$

Man sieht also, daſs die durch die Näherungsformeln gefundenen Resultate eben nicht sehr von den genauen abweichen, obgleich wir zu dem betrachteten Beispiel eine Glaslinse von beinahe einem halben Fuſs Dicke gewählt haben.

§. 387.

Setzt man in dem Ausdruck

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1)-r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1)-r)}$$

$\varrho = r$, und $c = 2r$, so erhält man

$$k = \frac{2.(h+r) - hn}{2h.(n-1) + (n-2).r}\cdot r.$$

Dies ist die Entfernung des Vereinigungspunktes von Strahlen, welche vermittelst einer Kugel vom Halbmesser r gebrochen werden. Ist $h = \infty$, so kommt

$$k = \frac{2-n}{2.(n-1)}\cdot r,$$

wo natürlich die Entfernung k vom hintern Ende der Kugel gerechnet werden muſs.

§. 388.

Vernachlässigt man im Ausdrucke von k die Dicke des Glases, so bleibt

$$k = \frac{h\varrho r}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}.$$

In diesem Ausdruck kann man r mit ϱ vertauschen, ohne daſs dadurch der Werth von k verändert wird. Berücksichtigt man also die Dicke der Glaslinse nicht, so ist es für die Entfernung des Sammlungspunktes der zweimal gebrochenen Strahlen einerlei, welche Seite der Glaslinse dem Gegenstand zugewendet wird. Dieses findet nicht Statt, sobald man die Dicke der Linse mit in Betracht zieht; denn setzt man der Kürze wegen

$$hnr\varrho + cr\varrho = p$$
$$h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho = q,$$

so erhält man

$$k = \frac{p - c\varrho h.(n-1)}{q - c.(n-1).(h.(n-1)-r)}.$$

Dreht man die Glaslinse um oder vertauscht man r mit ϱ, und bezeichnet dann die Sammlungsweite der gebrochenen Strahlen durch k', so erhält man, wenn man

bemerkt, dafs p und q bei dieser Vertauschung ihre Werthe nicht ändern,

$$k' = \frac{p - crh.(n-1)}{q - c.(n-1).(h.(n-1) - \varrho)}.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, und beschränkt sich blofs auf die erste Potenz der Dicke c, so kommt

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(qh-p)}{qq}.$$

Man hat aber, mit Vernachlässigung von c, $q = \frac{p}{k}$, folglich wird auch

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(h-k)}{p}.k,$$

oder, wenn man statt p seinen Werth $hnr\varrho$ setzt,

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(h-k).k}{hnr\varrho}.$$

Für einen unendlich entfernten Gegenstand wird

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).k}{nr\varrho}.$$

§. 389.

Aus der Formel

$$k = \frac{hr\varrho}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}$$

erhält man, indem auf beiden Seiten h addirt wird,

$$h + k = \frac{hh.(r+\varrho).(n-1)}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}$$

$$\frac{h+k}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1)}{r\varrho}.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen k dann annimmt, wenn $h = \infty$ wird, durch f, so erhält man

$$f = \frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

$$\frac{h+k}{k} = \frac{h}{f}$$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Die Gröſse f wird die Brennweite der Linse genannt, und man sieht aus der letzten Gleichung, welche einfache Relation zwischen der Entfernung des Objects, des Bildes und der Brennweite Statt findet, wenn dabei die Dicke der Glaslinse vernachlässigt wird.

§. 390.

Wenn man für die sechs verschiedenen Arten von Glaslinsen, welche im §. 372. angegeben sind, die Formel

$$f = \frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

näher betrachtet, so ergiebt sich, daſs für alle erhabenen Gläser f positiv, für alle Hohlgläser f negativ wird, vorausgesetzt, daſs n gröſser als die Einheit ist. Denn für das biconvexe Glas sind beide Radien r, ϱ positiv, also f positiv. Ist die eine Seite des Glases eben, wie bei dem planconvexen Glas, so setze man $\varrho = \infty$, so bleibt

$$f = \frac{r}{n-1}.$$

Bei dem Meniscus hat man eine hohle Fläche, also ϱ negativ, und es wird

$$f = -\frac{r\varrho}{(r-\varrho).(n-1)},$$

also scheinbar negativ. Allein man muſs in diesem Fall bedenken, daſs die hohle Fläche einen gröſsern Halbmesser haben muſs, als die erhabene, d. h. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen $\varrho > r$; es ist also $r - \varrho$ negativ, folglich erhält

$$f = \frac{r\varrho}{(\varrho - r).(n-1)}$$

einen positiven Werth.

§. 391.

Bei dem biconcaven Glase müssen beide Halbmesser r, ϱ als negativ betrachtet werden, dann ergiebt sich

$$f = -\frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

wirklich negativ. Das planconcave hat eine ebene Seite, es wird also r negativ und $\varrho = \infty$, folglich

$$f = -\frac{r}{n-1}.$$

Endlich ist das convex-concave Glas zu betrachten, bei welchem r als positiv, ϱ als negativ anzunehmen ist. Dann kommt

$$f = -\frac{r\varrho}{(r-\varrho).(n-1)},$$

und diese Gröſse ist wirklich negativ, da bei dem concav-convexen Glase der Halbmesser r der erhabenen Seite gröſser seyn muſs, als der Halbmesser ϱ der hohlen Seite. Uebrigens zeigt der negative Werth der Brennweite an, daſs der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen vor dem Glase auf derselben Seite liegt, wo sich das Object befindet. Es findet also bei diesen drei Hohlgläsern kein physischer, sondern bloſs ein mathematischer Sammlungspunkt Statt, indem die gebrochenen Strahlen, wenn sie sich schneiden sollen, rückwärts verlängert gedacht werden müssen. Man nennt daher auch diesen gedachten Durchschnittspunkt den virtuellen Brennpunkt des Hohlglases.

§. 392.

Es folgt hieraus, daſs der Werth von $\frac{1}{h} + \frac{1}{k}$, welcher dem Reciproken der Brennweite gleich ist, für die drei erhabenen Gläser positiv ausfallen muſs. So lange also $h > f$, wird $\frac{1}{h} < \frac{1}{f}$, und da

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

so ergiebt sich, daſs k positiv seyn wird. Liegt also der Gegenstand weiter vom Glase entfernt, als die Brennweite, so entsteht das Bild hinter dem Glase. Fällt der Gegenstand in die Entfernung der Brennweite, so ist $h = f$, also $\frac{1}{k} = o$, und man sieht hieraus,

dafs k unendlich grofs wird, d. h. die gebrochenen Strahlen gehen parallel unter einander hinter dem Glase fort. Wird $h < f$, so ist $\frac{1}{h} > \frac{1}{f}$, und um der Gleichung $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$ Genüge zu leisten, mufs k negativ seyn. Wenn daher die Entfernung des Gegenstandes vom Glase kleiner ist, als dessen Brennweite, so entsteht der Durchschnittspunkt vor dem Glase, und es findet eben so wenig als bei den Hohlgläsern ein wirkliches Bild Statt. Für alle Hohlgläser ist f negativ, also auch $\frac{1}{k} + \frac{1}{h}$, und da h immer als positiv betrachtet wird, so mufs k in allen Fällen negativ seyn. Man erhält also durch Hohlgläser in jeder Lage des Gegenstandes ein virtuelles Bild.

§. 393.

Um nun eine Vergleichung der Bilder von ausgedehnten Gegenständen mit den Gegenständen selbst anstellen zu können, mufs man auch den Fall untersuchen, wo sich der leuchtende Punkt aufserhalb der Axe befindet. Es sey daher AL (Fig. 54.) die Axe der Linse $GEHF$, C und D die Mittelpunkte der Kreisbogen GFH, GEH; R das Object, dessen Lage durch die Entfernung $AE = h$, welche auf der Axe vom Perpendikel AR abgeschnitten wird, und den Winkel $AER = \alpha$ bestimmt werden soll. Die Bezeichnungen der beiden Halbmesser des Glases so wie seiner Dicke bleiben wie vorher. Der Winkel RLA, unter welchem der Lichtstrahl RM die Axe verlängert schneidet, sey ψ, so hat man im Dreieck REL

$$RE : EL = \sin ELR : \sin ERL$$

$$\frac{h}{\cos\alpha} : EL = \sin\psi : \sin(\alpha - \psi)$$

$$EL = \frac{h \, . \sin(\alpha - \psi)}{\cos\alpha \, . \sin\psi}.$$

§. 394.

Nun sey der Winkel $MDE = \theta$, MK die Richtung des Strahls nach der ersten Brechung, $MKE = \psi'$, so hat man, vermöge des bekannten Gesetzes der Lichtbrechung,

$$\sin LMD = n \cdot \sin KMD,$$

d. h.

$$\sin(\theta - \psi) = n \cdot \sin(\theta - \psi').$$

Ferner hat man im Dreieck DMK

$$DM : DK = \sin DKM : \sin DMK$$
$$r : DK = \sin\psi' : \sin(\theta - \psi')$$
$$DK = \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi')}{\sin\psi'}.$$

Im Dreieck COK erhält man

$$CO : CK = \sin CKO : \sin COK.$$

Setzt man den Winkel $OCK = \theta'$, so kommt aus dieser Proportion

$$\varrho : CK = \sin\psi' : \sin(\psi' + \theta').$$

Nun ist aber

$$CK = CD + DK$$
$$= r + \varrho - c + \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi')}{\sin\psi'},$$

folglich ergiebt sich

$$\varrho \cdot \sin(\psi' + \theta') = (r + \varrho - c) \cdot \sin\psi' + r \cdot \sin(\theta - \psi').$$

§. 395.

Ist endlich OB der zum zweitenmal gebrochene Strahl, und setzt man $OBC = \psi''$, so wird

$$\sin QOB = n \cdot \sin QOK,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$\sin(\theta' + \psi'') = n \cdot \sin(\theta' + \psi'),$$

und das Dreieck COB giebt dann

$$CB : CO = \sin COB : \sin CBO$$
$$CB : \varrho = \sin(\psi'' + \theta') : \sin\psi''.$$

Setzt man $FB = u$, so wird $CB = \varrho + u$, folglich, wenn dieser Werth in vorige Proportion gesetzt wird, erhält man

$$u = \frac{\varrho \cdot \sin(\psi'' + \theta')}{\sin\psi''} - \varrho.$$

Im Dreieck DML hat man

$$DL = \frac{r.\sin(\theta - \psi)}{\sin\psi},$$

und da $EL - DL = ED = r$, so kommt

$$\frac{h.\sin(\alpha - \psi)}{\cos\alpha.\sin\psi} - \frac{r.\sin(\theta - \psi)}{\sin\psi} = r.$$

§. 396.

Nimmt man die im vorigen §. entwickelten Formeln zusammen, so erhält man

$$1)\quad \frac{h.\sin(\alpha - \psi) - r.\cos\alpha.\sin\psi}{r.\cos\alpha} = \sin(\theta - \psi)$$

$$2)\quad \sin(\theta - \psi') = \frac{\sin(\theta - \psi)}{n}$$

$$3)\quad \sin(\theta' + \psi') = \frac{r - c + \varrho}{\varrho}\cdot\sin\psi' + \frac{r}{\varrho}\cdot\sin(\theta - \psi')$$

$$4)\quad \sin(\theta' + \psi'') = n.\sin(\theta' + \psi')$$

$$5)\quad u = \frac{\varrho.\sin(\theta' + \psi'')}{\sin\psi''} - \varrho.$$

Da die in den vorigen Formeln vorkommenden Winkel insgemein als sehr klein betrachtet werden können, so lassen sich dieselben dadurch sehr vereinfachen, daſs man statt des Sinus den Bogen, statt des Cosinus die Einheit setzt. Hierdurch werden dieselben

$$1)\quad \frac{h}{r}\cdot(\alpha - \psi) = \theta$$

$$2)\quad \theta - \psi' = \frac{\theta - \psi}{n}$$

$$3)\quad \theta' = \frac{r\theta - c\psi'}{\varrho}$$

$$4)\quad \theta' + \psi'' = n.(\theta' + \psi')$$

$$5)\quad u = \frac{\varrho\theta'}{\psi''},$$

aus denen sich u vermittelst der als gegeben angenommenen Gröſsen bestimmen läſst.

§. 397.

Betrachtet man den Gang der Lichtstrahlen, die von einem auſserhalb der Axe liegenden Punkt herkommen, so sieht man bald, daſs einer derselben eine solche Lage haben kann, daſs nach seiner zweiten Brechung die Richtung desselben mit derjenigen, welche er vor den Brechungen hatte, parallel ist. Dies erfordert, daſs der Winkel ψ dem Winkel ψ'' gleich sey. Eliminirt man θ' aus 3 und 4, so kommt

$$\frac{r\theta - c\psi'}{\varrho} = \frac{\psi'' - n\psi'}{n - 1},$$

und da aus (2) $\psi' = \frac{(n - 1).\theta + \psi}{n}$, so kommt

$$\frac{(nr - c.(n - 1)).\theta - c\psi}{n\varrho} = \frac{\psi'' - \psi - (n - 1).\theta}{n - 1},$$

oder, da der Annahme zufolge $\psi'' - \psi = o$ seyn soll,

$$[n.(r + \varrho) - c.(n - 1)].\theta = c\psi.$$

Hierin kann man noch den Werth von θ aus (1) substituiren, und dann erhält man

$$\psi = \frac{n.(r + \varrho) - c.(n - 1)}{n.(r + \varrho) - c.(n - 1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha,$$

welchen Werth von ψ wir durch 6 bezeichnen wollen, so daſs

$$6 = \alpha \cdot \frac{n.(r + \varrho) - c.(n - 1)}{n.(r + \varrho) - c.(n - 1) + \frac{cr}{h}}$$

seyn wird.

§. 398.

Die Gleichung $\frac{h}{r} \cdot (\alpha - \psi) = \theta$ giebt dann

$$\theta = \frac{h}{r} \cdot (\alpha - 6),$$

und die Werthe der übrigen Winkel finden sich, wenn man bedenkt, daſs auch $\psi'' = 6$ gesetzt werden muſs,

$$\psi' = \frac{(n-1).(\alpha-\beta).h + \beta r}{nr}$$

$$\theta' = -\frac{h.(\alpha-\beta)}{r},\quad \psi'' = \beta$$

$$u = -\frac{\varrho h}{r}.\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right),$$

und diesen Werth von u wollen wir durch m bezeichnen, so daſs also

$$m = \frac{\varrho h}{r}.\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right).$$

Für den Fall eines unendlich weit entfernten Gegenstandes scheinen die Werthe von θ, ψ', θ', u unendlich groſs zu werden. Allein führt man den Ausdruck von β ein,

$$\beta = \frac{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}}.\alpha,$$

so erhält man

$$h.(\alpha-\beta) = \frac{cr}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}}.\alpha,$$

also für $h = \infty$

$$h.(\alpha-\beta) = \frac{cr}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha.$$

Man erhält also für einen unendlich entfernten Gegenstand folgende Werthe:

$$\theta = \frac{c}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$\psi' = \frac{(r+\varrho)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$\theta' = -\frac{c}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$u = -\frac{c\varrho}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.$$

§. 399.

Aus dem entwickelten Werth von β sieht man, daſs dieser Winkel nur wenig vom Winkel α verschieden

seyn wird, und vernachlässigt man die Dicke des Glases, so findet gar kein Unterschied zwischen denselben Statt, Man sagt daher im letztern Fall auch, ein durch die Mitte des Glases gehender Strahl setze seinen Weg ungebrochen fort, und man nennt diesen Strahl jedesmal den vom leuchtenden Punkt kommenden Hauptstrahl, auf welchem, wie bald gezeigt werden wird, das Bild des Punktes liegt. Der negative Werth von u zeigt an, dafs der Durchschnitt dieses Hauptstrahls mit der Axe auf derselben Seite der hintern Fläche des Glases liegt, als der leuchtende Punkt, indem wir im Normalfall, wenn dieser Durchschnitt hinter das Glas fiel, u als positiv betrachteten. Die gleichen und entgegengesetzten Werthe von θ und θ' zeigen ferner an, dafs die aus den Mittelpunkten der Krümmung der Flächen der Gläser gezogenen Einfallslothe einander parallel sind, und auf verschiedene Seiten der Axe fallen.

§. 400.

Die Entfernung, in welcher die Verlängerung des einfallenden Strahls neben dem zum zweitenmal gebrochenen hinläuft, läfst sich durch folgende Betrachtungen finden. Die Entfernung EL, in welcher ein einfallender Strahl verlängert die Axe schneidet, von der vordern Fläche des Glases an gerechnet, ist (§. 393.)

$$EL = \frac{h \, . \sin(\alpha - \psi)}{\cos \alpha \, . \sin \psi},$$

also, wenn man die Winkel als sehr klein betrachtet, und statt ψ seinen für diesen Fall, wo beide Strahlen parallel sind, passenden Werth 6 setzt, $= \frac{h \, . (\alpha - 6)}{6}$; addirt man hierzu den Werth von u, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, und zieht die Summe von der Dicke des Glases ab, so kommt

$$c - \frac{(r + \varrho) \, . (\alpha - 6)}{6 r} \, . \, h.$$

Dies ist die Entfernung der beiden Durchschnittspunkte

von einander, welche der verlängerte einfallende Strahl und der zum zweitenmal gebrochene und verlängerte Strahl mit der Axe bilden. Multiplicirt man diese Entfernung mit dem Sinus des Winkels, den beide Strahlen mit der Axe machen, d. h. durch sin 6, oder, da 6 sehr klein ist, bloſs durch 6, so ergiebt sich die Entfernung beider Strahlen von einander. Bezeichnen wir selbige durch p, so ist

$$p = c6 - \frac{r + \varrho}{r} \cdot h.(\alpha - 6).$$

Führt man statt 6 und $\frac{h.(\alpha - 6)}{r}$ ihre Werthe

$$6 = \frac{n.(r + \varrho) - c.(n - 1)}{n.(r + \varrho) - c.(n - 1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha,$$

$$\frac{h.(\alpha - 6)}{r} = \frac{c}{n.(r + \varrho) - c.(n - 1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha$$

ein, so erhält man

$$p = \frac{(n - 1).(r + \varrho - c)}{(\varrho + r).n - c.(n - 1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha . c,$$

oder, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von c,

$$p = \frac{(n - 1).\alpha c}{n}.$$

§. 401.

Nun sey $EHFG$ ein biconvexes Glas (Fig. 55.), EN seine Axe, KL der Hauptstrahl, so wie ML ein von demselben Object herkommender Strahl nach der zweiten Brechung. Dieser schneidet den Hauptstrahl in L und die Axe in N, so daſs ein Dreieck KNL sich bildet. In diesem hat man die Proportion

$$KN : KL = \sin KLN : \sin PNL,$$

oder da $FN = u$, $KF = m$, $PNL = \psi''$, $NKL = 6$, so wird

$$u + m : KL = \sin(\psi'' - 6) : \sin \psi'',$$

also hieraus, wenn man statt der Sinus der Winkel die Bogen setzt,

$$LK = \frac{(u + m) . \psi''}{\psi'' - 6}.$$

Nun wird aber KF von KQ wegen der Kleinheit des Winkels 6 nicht verschieden seyn; denn zieht man CQ, wo C der Mittelpunkt des Kreisbogens FQ ist, so kennt man im Dreieck KCQ

$$CQ = \varrho, \quad KCQ = \theta'', \quad FKQ = 6,$$

folglich verhält sich, wenn statt der Sinus gleich die Winkel gesetzt werden,

$$\varrho : KQ = 6 : \theta''.$$

Es war aber ohne Rücksicht auf das negative Vorzeichen, das hier nicht betrachtet zu werden braucht,

$$\theta'' = \frac{h . (\alpha - 6)}{r},$$

folglich erhält man

$$KQ = \frac{h\varrho . (\alpha - 6)}{6r} = m.$$

Es wird daher

$$QL = KL - KQ$$

$$= \frac{(u + m) . \psi''}{\psi'' - 6} - m$$

$$= \frac{u\psi'' + m6}{\psi'' - 6} = K,$$

und dieser Werth K giebt die Entfernung des Bildes hinter dem Glase an, das von einem aufserhalb der Axe liegenden Punkt herkommt.

§. 402.

Aus §. 396. haben wir die Gleichungen

$$\frac{h}{r} \cdot (\alpha - \psi) = \theta$$

$$\theta - \psi' = \frac{\theta - \psi}{n}$$

$$\theta' = \frac{r\theta - c\psi'}{\varrho}$$

$$\theta' + \psi'' = n . (\theta' + \psi')$$

$$u = \frac{\varrho\theta'}{\psi''},$$

und wenn man diesen Werth von u in die Gleichung für K substituirt, so erhält man

$$K = \frac{\varrho\theta' + m\beta}{\psi'' - \beta}.$$

Man erhält aber aufserdem aus vorigen Gleichungen

$$\psi'' = \frac{h.(n-1)}{nr\varrho}\cdot[n.(r+\varrho)-(n-1).c].\alpha$$
$$- \frac{h.(n-1)}{nr\varrho}\cdot[n.(r+\varrho)-(n-1).c].\psi$$
$$+ \frac{n\varrho-(n-1).c}{n\varrho}\cdot\psi$$
$$\theta' = \frac{nr-c.(n-1)}{\varrho n}\cdot\frac{h}{r}\cdot\alpha$$
$$- \frac{nr-c.(n-1)}{\varrho n}\cdot\frac{h}{r}\cdot\psi - \frac{c}{\varrho n}\cdot\psi.$$

Ferner ist

$$\beta = \alpha\cdot\frac{n.(r+\varrho)-(n-1).c}{n.(r+\varrho)-(n-1).c+\frac{cr}{h}}.$$

Zieht man diesen Werth von ψ'' ab und macht die gehörigen Reductionen, so bleibt

$$\psi''-\beta = \frac{hn.(n-1).(r+\varrho)-nr\varrho-c.(n-1).(h.(n-1)-r)}{nr\varrho}\cdot(\beta-\psi).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem von k §. 379., so sieht man sogleich, dafs der Zähler dieses Bruchs dem Nenner des Bruchs, welcher k ausdrückt, gleich ist, und man kann daher statt dessen auch

$$[hnr - c.(h.(n-1)-r)].\frac{\varrho}{k}$$

setzen, wodurch der Werth von $\psi'' - \beta$ folgende Form annimmt

$$\psi'' - \beta = \frac{hnr - c.(h.(n-1)-r)}{nrk}\cdot(\beta-\psi).$$

Da man ferner $m = \frac{\varrho h}{r}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ hat (§. 398.), so wird auch, mit Einführung des Werthes von β,

$$m\beta = \frac{\varrho c}{n.(r+\varrho) - (n-1).c + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha,$$

folglich

$$\varrho\theta' + m\beta = \frac{hnr - c.(h.(n-1) - r)}{nr} \cdot (\beta - \psi).$$

Da nun

$$K = \frac{\varrho\theta' + m\beta}{\psi'' - \beta},$$

so erhält man hierdurch ganz einfach

$$K = k,$$

d. h. die Punkte, welche außerhalb der Axe liegen, geben ihre Bilder in derselben Entfernung vom Glase, als diejenigen Punkte, welche in der Axe der Glaslinse selbst befindlich sind, und wenn man die Dicke des Glases bei Seite setzt, so wird das Bild auf der Linie liegen, welche den leuchtenden Punkt mit der Mitte der Glaslinse verbindet.

§. 403.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls über, wenn derselbe mehrere Glaslinsen durchlaufen muſs. Hierbei vernachlässigen wir die Dicke der Gläser, und setzen zugleich die Sinus den Bogen proportional, so daſs die höhern Potenzen der Winkel gänzlich wegfallen. Im Normalfall nehmen wir ferner an, alle Glaslinsen seyen convex, und so gestellt, daſs zwischen je zwei ein Bild fällt. Nehmen wir nun die Entfernung des Objects von der ersten Glaslinse h, die des ersten Bildes von der zweiten Glaslinse h', u. s. w., die Entfernung des ersten Bildes von der ersten Glaslinse k, die des zweiten Bildes von der zweiten Glaslinse k', u. s. w., die Brennweite der Gläser f, f', f'', und bedenken, daſs jedes Bild für das folgende Glas als Object angesehen werden kann, so haben wir nach §. 389. folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''},$$

u. s. w. fort. Sind nun die Entfernungen der Gläser von einander l, l', l'', u. s. w., so hat man noch folgende Gleichungen:

$$k + h' = l$$
$$k' + h'' = l'$$
$$k'' + h''' = l'' \quad \text{u. s. w.},$$

folglich erhält man auch, indem die Gröfsen h', h'', h'''... durch l, l', l''..., k, k', k''... ausgedrückt werden,

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{l-k} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{l'-k'} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''} \quad \text{u. s. w.}$$

Hat man z. B. nur zwei Gläser, so erhält man

$$k' = \frac{lf'.(h-f) - ff'h}{(l-f').(h-f) - hf},$$

und wenn dieser Werth von k' unendlich grofs werden soll, d. h. wenn die Strahlen hinter dem zweiten Glase unter einander und der Axe parallel fortgehen sollen, so erhält man

$$(l-f').(h-f) - hf = o$$
$$\frac{h.(f+f') - ff'}{h-f} = l.$$

Ist der Gegenstand so entfernt, dafs man $\frac{f}{h} = o$ setzen kann, so bleibt blofs $f + f' = l$, d. h. der Abstand der Gläser ist der Summe ihrer Brennweiten gleich, wenn Strahlen, die auf das erste parallel einfallen, hinter dem zweiten auch wieder parallel fortgehen sollen.

Wenn beide Gläser an einander liegen, so dafs l sehr klein ist, so kommt, da man ohne Fehler dann $l = o$ setzen kann,

$$k' = \frac{hff'}{f'.(h-f) + hf},$$

und für einen unendlich entfernten Gegenstand

$$k' = \frac{ff'}{f+f'}, \quad \frac{1}{k'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

Legt man eine beliebige Menge Gläser zusammen, so wird für einen unendlich entfernten Gegenstand das Umgekehrte der Entfernung des Bildes vom Glase durch

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \ldots\ldots$$

ausgedrückt.

Uebrigens läſst sich die Gröſse k für jede beliebige Menge Gläser leicht durch einen Kettenbruch darstellen. Bezeichnet man die reciproken Gröſsen von $f, f', f'' \ldots$ durch $F, F', F'' \ldots$, die reciproken Gröſsen von $k, k', k'' \ldots$ durch $K, K', K'' \ldots$, und setzt $\frac{1}{h} = H$, so wird für ein Glas

$$K = F - H,$$

für zwei Gläser

$$K' = F' - \cfrac{1}{l - \cfrac{1}{F - H}},$$

für drei Gläser

$$K'' = F'' - \cfrac{1}{l' - \cfrac{1}{F' - \cfrac{1}{l - \cfrac{1}{F - H}}}},$$

wo das Gesetz der Fortschreitung deutlich vor Augen liegt.

§. 404.

Es läſst sich nun auch leicht bestimmen, in welcher Entfernung von der Axe der Gläser ein vom Object, das in der Axe angenommen wird, herkommender Strahl alle folgenden Gläser trifft. Bezeichnet man nämlich diese Entfernungen durch t, t', t'', die Entfernung des Durchschnittspunkts des Strahls mit der Axe von den Gläsern durch h, h', h'', so geben die Quotienten $\frac{t}{h}$, $\frac{t'}{h'}$, $\frac{t''}{h''}$..... die Tangenten der Winkel an, unter welchen der durchgehende Strahl die Axe

zwischen jedem Paar von Gläsern schneidet. Bezeichnet man diese Winkel durch φ, $\varphi_{,}$, $\varphi_{,,}$, ... und bedenkt, dafs man bei so kleinen Winkeln, als hier betrachtet werden, die Bogen statt der Tangenten setzen kann, so erhält man

$$t = h\varphi,\quad t' = h'\varphi_{,},\quad t'' = h''\varphi_{,,} \text{ etc.}$$

Nach §. 379. hat man aber $h.\sin\varphi = r.\sin\theta$, oder $h\varphi = r\theta$, also auch $t = r\theta$, und da der Winkel, unter welchem der zum zweitenmal gebrochene Strahl die Axe trifft, durch die Gleichung desselben Paragraphen,

$$\sin\varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho}.\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right).\sin\theta.$$
$$+ \frac{(n-1).r}{\varrho}.\sin\theta$$

gegeben wird, so erhält man, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases, indem φ'', θ' statt $\sin\varphi''$ und $\sin\theta$ gesetzt wird,

$$\varphi'' = \frac{\varrho.[(n-1).h - r] + (n-1).hr}{\varrho h}.\theta$$
$$= \frac{(n-1).h.(r+\varrho) - r\varrho}{r\varrho h}.t.$$

Der Coefficient von t ist aber nichts anders, als der reciproke Werth von k, wenn man die Dicke des Glases vernachlässigt, man hat also

$$\varphi'' = \frac{t}{k},$$

und wenn man für die folgenden Gläser die analogen Gröfsen $\varphi_{,}''$, $\varphi_{,,}''$ durch k', k''.... bezeichnet, so kommt

$$\varphi_{,}'' = \frac{t'}{k'},\quad \varphi_{,,}'' = \frac{t''}{k''}.....$$

Es ist nun aber natürlich, dafs der einfallende Strahl auf dem zweiten Glase die Axe unter demselben Winkel schneidet, als der im ersten gebrochenen Strahl, da beide Strahlen eine und dieselbe grade Linie bilden, nur sind sie einander entgegengesetzt, weil sie auf ver-

schiedene Seiten der Axe fallen; man hat daher

$$\varphi_{,} = -\varphi'', \quad \varphi_{,,} = -\varphi_{,}'' \quad \text{u. s. w.},$$

folglich

$$t' = -h'\varphi'', \quad t'' = -h''\varphi_{,}''$$

$$t''' = -h'''\varphi_{,,}'', \quad t^{IV} = -h^{IV}\varphi_{,,,}'' \quad \text{u. s. w.}$$

Substituirt man statt φ'', $\varphi_{,}''$, $\varphi_{,,}''$... ihre Werthe, so kommt

$$t' = -\frac{h'}{k} \cdot t$$

$$t'' = +\frac{h'h''}{kk'} \cdot t$$

$$t''' = -\frac{h'h''h'''}{kk'k''} \cdot t$$

u. s. w. fort, so daſs die Zeichen abwechselnd positiv und negativ ausfallen. Man sieht zugleich, daſs die Halbmesser der Oeffnungen der Gläser die Werthe t', t'', t'''.... haben müssen, wenn die in der Entfernung t von der Axe auf das erste Glas fallenden Strahlen durch die folgenden Gläser hindurchgehen sollen.

§. 405.

Es seyen (Fig. 55 b.) AB, $A'B'$, $A''B''$ u. s. w. mehrere Glaslinsen, deren gemeinschaftliche Axe durch die Linie CE'' ausgedrückt wird, in CD befinde sich ein Object, in F, F' die Sammlungspunkte der Gläser, so werden nach §. 402. Ff, $F'f'$ die Bilder der graden Linie CD vorstellen. Setzt man nach und nach $CD = \lambda$, $Ff = \lambda'$, $F'f' = \lambda''$ u. s. w., und wie vorher

$$EC = h, \quad FE' = h', \quad F'E'' = h'' \ldots\ldots$$

$$EF = k, \quad E'F' = k', \ldots\ldots\ldots$$

so erhält man sogleich, wenn man, um die entgegengesetzte Lage zu bezeichnen, das negative Vorzeichen anwendet,

$$\lambda' = \frac{k\lambda}{h}$$

$$\lambda'' = \frac{k'\lambda'}{h'} = \frac{kk'}{hh'} \cdot \lambda$$

$$\lambda''' = \frac{k''\lambda''}{h''} = \frac{kk'k''}{hh'h''} \cdot \lambda$$

u. s. w. fort, oder, wenn man den scheinbaren Durchmesser des Objects durch α bezeichnet, so wird $CED = \alpha$, und man hat auch, wenn der Winkel α als sehr klein betrachtet wird, $\lambda = h\alpha$, folglich ist

$$- \lambda' = k\alpha$$

$$+ \lambda'' = \frac{kk'}{h'} \cdot \alpha$$

$$- \lambda''' = \frac{kk'k''}{h'h''} \cdot \alpha,$$

wobei man immer bemerken mufs, dafs zwischen den Gröfsen k, k', k'', h, h', h'' die Relationen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''} \text{ u. s. w.}$$

$$h' + k = l$$

$$h'' + k' = l'$$

$$h''' + k'' = l'' \text{ u. s. w.}$$

Statt finden, wo l, l', l'' die Abstände der Gläser von einander, und f, f', f'' ihre Brennweiten bedeuten.

§. 406.

Der Weg des Hauptstrahls DE, welcher von einem Punkt des Objects durch die Mitte des ersten Glases geht, und auf welchem alle Bilder dieses Punktes liegen müssen, die durch die verschiedenen Brechungen in den Glaslinsen nach und nach gebildet werden, wird in der Figur durch die gebrochene Linie $DEHH'$ angedeutet. Die Entfernung, in welcher ein Strahl, der unter dem Winkel ψ gegen die Axe einfällt, nach seiner zweimaligen Brechung die Axe hinter dem Glase trifft, wurde in §. 396. durch u bezeichnet, und es ergab sich $u = \frac{\varrho\theta'}{\psi''}$, wo, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases, (§. 402.)

$$\psi'' = \frac{h.(n-1)}{r\varrho}.(r+\varrho).\alpha$$
$$- \frac{h.(n-1).(r+\varrho) - r\varrho}{r\varrho}.\psi$$
$$\theta' = \frac{h}{\varrho}.(\alpha - \psi)$$

ist. Uebrigens bezeichnet ψ'' den Winkel, unter welchem der zweimal gebrochene Strahl die Axe schneidet. Nun ist aber

$$\frac{1}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}{hr\varrho}$$
$$\frac{k+h}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1)}{r\varrho},$$

also wird auch

$$\psi'' = \frac{(k+h)}{k}.\alpha - \frac{h}{k}.\psi = \alpha + \frac{h}{k}.(\alpha - \psi),$$

und hieraus ergiebt sich

$$u = \frac{kh.(\alpha - \psi)}{k\alpha + h.(\alpha - \psi)}.$$

§. 407.

Für das erste Glas ist nun $\psi = DEC = \alpha$, also $\psi'' = \alpha$; da der Einfallswinkel auf jedes folgende Glas dem Winkel gleich ist, welchen der durch das vorhergehende Glas gebrochene Strahl mit der Axe bildet, nur im entgegengesetzten Sinne, so würde man für das zweite Glas nur $-\alpha$ statt ψ zu setzen haben; allein da in dem Normalfall, welchen wir in den §§. 393. 394. 395. untersuchten, der einfallende Strahl die Axe hinter dem Glase schnitt; hier aber der Durchschnittspunkt immer vor dem Glase liegt, so wird das entgegengesetzte Zeichen wieder entgegengesetzt genommen werden müssen, also das ursprüngliche Vorzeichen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir daher die Einfallswinkel für alle Gläser nach und nach durch ψ, $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$, ... die Winkel, welche der zum zweitenmal gebrochene Strahl mit der Axe macht, durch ψ'', $\psi_{,}''$, $\psi_{,,}''$, ...

die Winkel *DEC*, *FE'f*, *F'E''f'* durch α, α', α'', ... so erhält man folgende Gleichungen

$$\psi'' = \alpha + \frac{h}{k} \cdot (\alpha - \psi)$$

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \psi_{,})$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \psi_{,,}) \text{ u. s. w.}$$

$$\psi_{,} = \psi'', \quad \psi_{,,} = \psi_{,}'', \quad \psi_{,,,} = \psi_{,,}''.$$

Nun ist aber für das erste Glas $\psi'' = \alpha$, also kommt für die folgenden Gläser

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \psi_{,}'')$$

$$\psi_{,,,}'' = \alpha''' + \frac{h'''}{k'''} \cdot (\alpha''' - \psi_{,,}''),$$

oder auch

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \alpha') - \frac{h'h''}{k'k''} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,,}'' = \alpha''' + \frac{h'''}{k'''} \cdot (\alpha''' - \alpha'') - \frac{h'''h''}{k'''k''} \cdot (\alpha'' - \alpha') + \frac{h'''h''h'}{k'''k''k'} \cdot (\alpha' - \alpha).$$

Bezeichnet man ferner, wie §. 405., durch λ, λ', λ''.... die wirkliche Gröſse des Objects und der Bilder, so hat man

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{h'}, \quad \alpha'' = \frac{\lambda''}{h''}, \ldots\ldots$$

und man kann hierin die Werthe von λ', λ''...., aus §. 405., substituiren

$$\alpha' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = + \frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha$$

$$\alpha''' = - \frac{kk'k''}{h'h''h'''} \cdot \alpha$$

u. s. w. fort, wodurch auch die Winkel α', α'', α''' bestimmt sind.

§. 408.

Bezeichnet man die Entfernungen, in welchen dieser Strahl die Axe hinter jedem Glase schneidet, durch u, u', u'', so hat man

$$u = \frac{kh.(\alpha - \psi)}{k\alpha + h.(\alpha - \psi)}$$

$$u' = \frac{k'h'.(\alpha' - \psi_{,})}{k'\alpha' + h'.(\alpha' - \psi_{,})}$$

$$u'' = \frac{k''h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}{k''\alpha'' + h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}$$

$$u''' = \frac{k'''h'''.(\alpha''' - \psi_{,,,})}{k'''\alpha''' + h'''.(\alpha''' - \psi_{,,,})}$$

u. s. w. fort, und vermittelst der Einführung der Werthe von ψ'', $\psi_{,}''$,.... der vorigen Paragraphen, lassen sich diese Gröſsen auch so schreiben:

$$u = \frac{h.(\alpha - \psi)}{\psi''} = o$$

$$u' = \frac{h'.(\alpha' - \psi_{,})}{\psi_{,}''} = \frac{h'.(\alpha' - \psi'')}{\psi_{,}''}$$

$$u'' = \frac{h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}{\psi_{,,}''} = \frac{h''.(\alpha'' - \psi_{,}'')}{\psi_{,,}''}.$$

Um nun die Abstände von der Axe zu finden, in welchen der gebrochene, vom obern Ende D des Objects herkommende Hauptstrahl die Gläser nach und nach schneidet, setze man diese Abstände τ', τ'', τ''' Man sieht dann sogleich, daſs man nur den Abstand des Glases $E'E''$ um $E'K$ oder den zum vorherge-

henden Glase gehörigen Werth von u zu vermindern braucht, und dann den Rest mit dem Winkel multiplicirt, unter welchem der Strahl die Axe schneidet, um den gesuchten Abstand zu erhalten. Will man aufserdem die Abstände über der Axe, wie $E''H'$, positiv, die Abstände unter der Axe, wie $E'H$, negativ nehmen, so mufs man dem besagten Product noch das negative Vorzeichen geben. Es wird daher

$$\tau' = (u - l) . \psi''$$
$$\tau'' = (u' - l') . \psi_{,}''$$
$$\tau''' = (u'' - l'') . \psi_{,,}'' \quad \text{u. s. w.}$$

§. 409.

Nehmen wir z. B. vier Gläser, deren Brennweiten $f = 2$ Fufs, $f' = \frac{3}{2}$, $f'' = 1$, $f''' = \frac{1}{2}$, und deren Entfernungen von einander $l = 12$ Fufs, $l' = 6$ Fufs, $l'' = 3$ sind, und nehmen den Gegenstand als unendlich entfernt an, so hat man nach §. 403.

$$k = 2 \qquad h' = 10$$
$$k' = 1{,}765 \qquad h'' = 4{,}235$$
$$k'' = 1{,}309 \qquad h''' = 1{,}691.$$
$$k''' = 0{,}710.$$

Ist nun der Halbmesser der Oeffnung des ersten Glases $t = \frac{1}{10}$ Fufs, so erhält man die Oeffnungen der übrigen Gläser nach §. 404.

$$t' = 0{,}5$$
$$t'' = 1{,}2$$
$$t''' = 1{,}550.$$

Beträgt der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes $\alpha = 15$ Minuten $= \frac{1}{229}$, so werden die Halbmesser der Bilder nach §. 405.

$$- \lambda' = 0{,}0087$$
$$+ \lambda'' = 0{,}0015$$
$$- \lambda''' = 0{,}0005$$
$$+ \lambda^{\text{IV}} = 0{,}0002,$$

wo die negativen Vorzeichen bedeuten, dafs das Bild, im Vergleich mit dem Gegenstande, eine entgegengesetzte Lage hat.

Die Winkel α, α', α''...., unter welchen der Gegenstand und die Bilder, aus dem Mittelpunkt der auf einander folgenden Gläser gesehen, erscheinen, werden (§. 407.)

$$\alpha = + \tfrac{1}{229} = + 15'$$
$$\alpha' = - \tfrac{1}{1146} = - 3'$$
$$\alpha'' = + \tfrac{1}{2750} = + 1'\ 15''$$
$$\alpha''' = - \tfrac{1}{3552} = - 0'\ 58''.$$

Hieraus erhält man die Winkel, unter welchen der vom Endpunkte des Objects herkommende Hauptstrahl nach und nach die Axe schneidet (§. 407.),

$$\psi'' = + 15'\ 0''$$
$$\psi_{\prime}'' = - 105'\ 0''$$
$$\psi_{\prime\prime}'' = + 346'$$
$$\psi_{\prime\prime\prime}'' = - 827'\ 24''.$$

Ferner erhält man

$$u = 0, \quad u' = 1{,}714$$
$$u'' = 1{,}300, \quad u''' = 0{,}709,$$

und hieraus endlich die Werthe von τ, τ', τ''....

$$\tau = 0, \quad \tau' = - 0{,}0524$$
$$\tau'' = + 0{,}1309, \quad \tau''' = - 0{,}1711.$$

§. 410.

Das Auge, in gesundem Zustande, sieht die Gegenstände nur dann deutlich, wenn die Strahlenkegel, welche von den einzelnen Punkten der Gegenstände herkommen, aus divergenten Strahlen bestehen; sind daher die Strahlenkegel vermittelst eines convexen Glases zur Convergenz gebracht, und bringt man das Auge in die Strahlenkegel, ehe sie das Bild hervorgebracht haben, so wird man, vermittelst dieser convergenten Strahlen, nur ein höchst undeutliches Bild des Punktes, von welchem die Strahlen herkommen, erhalten. Allein sobald das Auge vom Glase weiter entfernt ist, als das Bild hinter demselben, so sind die von diesem ausgehenden Strahlen divergent, und das Auge ist im Stande, das Bild auf eben die Art zu betrachten, als einen wirk-

lichen Gegenstand. Hieraus folgt jedenfalls, dafs der Abstand des Auges vom Glase gröfser seyn mufs, als der Abstand des Bildes, d. h. wenn wir den Abstand des Auges von der Glaslinse durch g bezeichnen, so mufs $g - k$ eine positive Gröfse seyn. Aus der Gleichung

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

hat man aber $k = \frac{hf}{h - f}$, folglich wird $g - \frac{hf}{h - f}$ positiv, wo h den Abstand des Objects vom Glase bedeutet, und f die Brennweite angiebt.

§. 411.

Die Entfernung des Gegenstandes vom Auge ist dann $h + g$, und wenn wir den Durchmesser desselben senkrecht auf die Gesichtsaxe durch λ bezeichnen, so ist der Gesichtswinkel, unter welchem der Gegenstand dem Auge erscheint, vorausgesetzt, dafs dieser Winkel klein genug ist, um statt des Sinus den Bogen setzen zu können,

$$= \frac{\lambda}{h + g}.$$

Der Durchmesser des Bildes wird, nach §. 405., $\lambda' = \frac{k\lambda}{h}$, und da das Auge von selbigem die Entfernung $g - k$ hat, so ist der Gesichtswinkel, unter welchem dies Bild erscheint,

$$= \frac{k\lambda}{h.(g - k)}.$$

Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft der letztere Gesichtswinkel den ersten enthält, giebt die Vergröfserung an. Bezeichnen wir dieselbe durch m, so kommt

$$m = \frac{k.(h + g)}{h.(g - k)}.$$

§. 412.

Für sehr entfernte Gegenstände ist $\frac{h+g}{h} = 1$, $k = f$, also $m = \frac{f}{g-f}$. Bezeichnet man also die Entfernung, auf welche das Auge nahe Gegenstände deutlich sieht, durch ω, so hat man $m = \frac{f}{\omega}$, wo im Allgemeinen für ein gesundes Auge ω = acht Zoll gesetzt werden kann. Wird also, vermittelst eines Linsenglases, von der Brennweite f ein Bild eines sehr entfernten Gegenstandes hervorgebracht, und bringt man das Auge in die Entfernung von acht Zoll hinter das Bild, so wird durch dieses Glas der Gegenstand so oft vergröſsert erscheinen, als acht Zoll in der Brennweite des Glases enthalten sind. Man sieht also hieraus, daſs schon durch ein einzelnes Glas von groſser Brennweite ziemliche Vergröſserungen hervorgebracht werden könnten, wenn nicht durch die später zu erwähnende Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt und der Zerlegung des Lichts in Farben eine zu groſse Undeutlichkeit hervorgebracht würde.

§. 413.

Befindet sich das Auge sehr nahe am Glase, wie dies z. B. bei Brillengläsern der Fall ist, so kann man $g = o$ setzen, und da der Ausdruck

$$g - \frac{hf}{h-f}$$

eine positive Gröſse seyn muſs, so wird $-\frac{hf}{h-f}$ an sich schon positiv werden müssen. Da nun h als die Entfernung des Objects vom Glase immer als positiv betrachtet werden muſs, so folgt, daſs, wenn f einen positiven Werth hat, d. h. das Glas zu den erhabenen Gläsern gehört, h kleiner als f seyn muſs; der Gegenstand muſs also dann dem Glase näher liegen, als die

Brennweite der Glaslinse beträgt. Ist f negativ, d. h. bildet die Linse ein concaves Glas, so ist der Ausdruck $-\frac{hf}{h-f}$ wirklich positiv. Das Auge wird also durch concave Gläser die Gegenstände immer deutlich sehen, wenn nur die Strahlen nicht eine zu grofse Divergenz erhalten. Setzt man ferner in dem Ausdruck

$$m = \frac{k.(h+g)}{h.(g-k)},$$

den Abstand des Auges vom Glase $g = o$, so kommt $m = -1$, d. h. es findet gar keine Vergröfserung Statt. Das negative Vorzeichen bezieht sich blofs auf die Lage des Bildes, die dem des Normalfalles, wo das Bild gegen den Gegenstand eine verkehrte Lage hatte, entgegengesetzt ist.

§. 414.

Diese Angabe, dafs, wenn man das Auge sehr nahe hinter das Glas bringt, keine Vergröfserung Statt finde, scheint der Erfahrung zu widerstreiten, indem man sich doch der convexen Gläser als Loupen bedient, um kleine Gegenstände genauer zu beobachten. Allein der Satz, dafs der Gesichtswinkel nicht geändert werde, wir mögen das Object durch ein Glas oder mit blofsen Augen betrachten, bleibt mathematisch genau richtig, und die hierbei Statt findende scheinbare Vergröfserung liegt blofs in dem deutlichern Sehen. Denn halten wir einen Gegenstand vor das Auge, so wird der Gesichtswinkel, unter welchem wir denselben sehen, durch den Bruch $\frac{\lambda}{\omega}$ ausgedrückt, wo λ den Durchmesser des Objects, den wir hier als sehr klein betrachten, und ω seine Entfernung vom Auge bedeutet. Es giebt aber im Allgemeinen für jedes Auge nur einen bestimmten Werth von ω, bei welchem es den Gegenstand am deutlichsten sieht, indem bei gröfserer Nähe die Strahlen zu sehr, bei gröfserer Entfernung zu wenig divergiren, als dafs

sie sich gehörig im Auge auf der Netzhaut in einen Punkt concentrirten. Da nun schon früher erwähnt worden ist, dafs, wenn der Gesichtswinkel auf eine gewisse Grenze abgenommen hat, der Gegenstand für das Auge verschwindet, so kann der Fall eintreten, dafs bei der bestimmten Entfernung, unter welcher das Auge einen gröfsern Gegenstand deutlich sieht, der Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{\omega}$ die besagte Grenze erreicht, also dieser kleine Gegenstand für das Auge nicht mehr erkennbar bleibt. Wenn man nun schon den Gesichtswinkel dadurch vergröfserte, dafs man den Gegenstand näher ans Auge rückte, so würde dadurch nichts gewonnen werden, da die stärkere Divergenz die Deutlichkeit des Sehens aufhebt, also der Gegenstand doch unkenntlich bleiben würde. Bringt man hingegen ein convexes Glas zwischen das Object und das Auge, so läfst sich dieses Glas immer so wählen, dafs die Divergenz der direct aus dem Gegenstand ausfahrenden Strahlen durch dasselbe so geschwächt wird, dafs dieselben von einem Gegenstand herzukommen scheinen, der die erforderliche Entfernung für das deutliche Sehen besitzt, während doch der Gesichtswinkel, unter welchem dieses Bild erscheint, derselbe ist, als ob man das Object ohne dazwischen gehaltenes Glas mit blofsem Auge betrachtete.

§. 415.

Nimmt man nun an, die Brennweite der Glaslinse sey $= f$, die Entfernung, auf welche das Auge deutlich sieht, $= \omega'$, so mufs das Object in einer solchen Entfernung vom Glase gehalten werden, dafs das Bild in die Entfernung ω' vor das Glas fällt; es wird daher

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\omega'}$$

$$h = \frac{\omega' f}{\omega' + f},$$

und da wir diese Gröfse, mit Vernachlässigung der

Dicke des Glases, auch für die Entfernung des Objects vom Auge annehmen können, so erscheint der Gegenstand, dessen Durchmesser λ ist, durch das Glas deutlich gesehen, unter einem Gesichtswinkel

$$= \frac{\lambda.(\omega' + f)}{\omega' f},$$

während mit bloſsen Augen derselbe in der Entfernung des deutlichen Sehens unter dem Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{\omega'}$ erscheinen würde. Man müſste also die Statt findende scheinbare Vergröſserung durch den Quotienten ausdrücken, welcher entsteht, indem der erste Gesichtswinkel $\frac{\lambda.(\omega' + f)}{\omega' f}$ durch den zweiten $\frac{\lambda}{\omega'}$ dividirt wird, d. h. durch

$$\frac{\omega' + f}{f},$$

und man sieht hieraus, daſs die scheinbare Vergröſserung desto stärker wird, je kleiner man die Brennweite f des Glases wählt.

§. 416.

Die Weite des deutlichen Sehens ist nicht bei allen Augen gleich groſs; weitsichtige Personen müssen die Gegenstände in eine bedeutendere Entfernung vom Auge bringen, um sie deutlich zu sehen; kurzsichtige Personen hingegen müssen dieselben dem Auge sehr nähern, welches beides in vielen Fällen sehr unbequem seyn kann. Dieser Unbequemlichkeit läſst sich aber durch den Gebrauch einfacher Glaslinsen, der sogenannten Brillengläser, abhelfen. Gesetzt z. B., ein Auge sieht auf die Entfernung Ω deutlich; es soll aber auf die Entfernung ω' deutlich sehen, so läſst sich die Brennweite des anzuwendenden Glases leicht durch die Gleichung

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{f}$$

finden, indem man in der allgemeinen Gleichung

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$h = \omega$, $k = -\Omega$ setzt. Solange nun $\omega < \Omega$, wird f positiv, d. h. für weitsichtige Leute mufs man convexe Gläser anwenden; ist aber $\omega > \Omega$, so wird f negativ, folglich wird der Kurzsichtigkeit durch concave Gläser abgeholfen.

§. 417.

Wenn das Auge sich hinter einer Verbindung von mehrern Gläsern befindet, und zwar nahe hinter dem letzten Glase, so mufs, wenn das Auge durch diese Verbindung etwas sehen will, das letzte Glas in eine solche Stellung gegen das vorhergehende Bild gebracht werden, dafs die zuletzt gebrochenen Strahlen die gehörige Divergenz bei ihrem Eintritt ins Auge erhalten. Nennt man nämlich die Brennweite des letzten Glases f^0, die Entfernung des Bildes vom Glase h^0, die Sehweite des Auges ω, so wird

$$\frac{1}{h^0} = \frac{1}{f^0} + \frac{1}{\omega}$$

$$h^0 = \frac{\omega f^0}{\omega + f^0},$$

und der Gesichtswinkel, unter welchem das letzte Bild erscheint, wenn λ^0 die Gröfse des letztern bedeutet,

$$= \frac{\lambda^0}{h^0} = \frac{\lambda^0 . (\omega + f^0)}{\omega f^0}.$$

Alle Zusammensetzungen der Gläser haben den Zweck, entweder entfernte Gegenstände vergröfsert zu zeigen, oder sehr nahe Gegenstände, die dem Auge wegen ihrer Kleinheit unkenntlich sind, deutlich zu machen. Im ersten Fall kann die Entfernung des Auges vom ersten Glase gegen die Entfernung des Objects vernachlässigt werden. Gesetzt nun, man habe n Gläser, so ist, nach §. 405., die Gröfse des Bildes, welches hinter dem $(n - 1)$ten Glase entsteht,

$$\lambda^{(n-1)} = \frac{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' . h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} . \alpha,$$

folglich der Gesichtswinkel, unter welchem dieses Bild durch das nte Glas gesehen erscheint, wenn dasselbe in die vorhin bestimmte gehörige Entfernung vom Bilde gebracht ist,

$$= \frac{k \, . \, k' \, . \, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' \, . \, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0} \cdot \alpha,$$

und da α der Winkel ist, unter welchem das Object dem bloſsen Auge erscheint, so wird die Vergröſserung, in dem Fall eines sehr entfernten Gegenstandes, durch

$$\frac{k \, . \, k' \, . \, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' \, . \, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0}$$

ausgedrückt werden, und diese Formel würde bei Fernröhren und Telescopen anzuwenden seyn. Bemerkt man ferner, daſs, nach §. 405., $\lambda = h\alpha$ ist, so läſst sich der Winkel α aus vorigem Ausdruck von $\lambda^{(n-1)}$ eliminiren, und es bleibt

$$\lambda^{(n-1)} = \frac{k \, . \, k' \, . \, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h \, . \, h' \, . \, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \lambda,$$

also der Gesichtswinkel, unter welchem dies Bild, durch das letzte Glas gesehen, erscheint,

$$= \frac{k \, . \, k' \, . \, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h \, . \, h' \, . \, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0} \cdot \lambda.$$

In der Entfernung ω des deutlichen Sehens erscheint dieser Gegenstand dem bloſsen Auge unter dem Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{\omega}$, also wird die Vergröſserung bei dieser Zusammensetzung von Gläsern

$$= \frac{k \, . \, k' \, . \, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h \, . \, h' \, . \, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{f^0},$$

welche Formel bei der Angabe der Vergröſserung durch Microscope angewendet werden muſs.

§. 418.

Wir wollen z. B. annehmen, es sey eine Verbindung von drei Gläsern, deren Brennweiten $f = 4$ Fuſs,

$f' = 2$ Fuſs, $f^0 = \frac{1}{12}$ seyen. Die Entfernung des ersten Glases vom zweiten sey 2 Fuſs, und der Gegenstand unendlich entfernt, also $h = \infty$; dann wird

$$k = 4, \quad h' = -2$$
$$k' = 1.$$

Nimmt man ferner $\omega = 8$ Zoll $= \frac{2}{3}$ Fuſs, so ist

$$\frac{\omega + f^0}{\omega f^0} = \frac{27}{2},$$

also die Vergröſserung $= -\frac{4 \cdot 1}{2} \cdot \frac{27}{2} = -27$, so daſs das Object 27 mal vergröſsert, und in umgekehrter Stellung erscheint. Die Entfernung des letzten Glases vom letzten Bilde ist

$$= \frac{\omega f^0}{\omega + f^0} = \frac{2}{27},$$

also die Entfernung der beiden letzten Gläser von einander $= 1\frac{2}{27}$ Fuſs.

§. 419.

Es sey C ein in der gemeinschaftlichen Axe CD'' der Gläser AB, $A'B'$, $A''B''$ (Fig. 56.) liegender leuchtender Punkt, den wir als eine unendlich kleine Kreisfläche, die senkrecht auf der Axe steht, betrachten können. Von selbigem gehe unter dem Winkel $DCE = \varphi$ ein Strahl aus, so ist $CDD'D''$ dessen Weg bis ans letzte Glas, und alle Strahlen, die Anfangs in dem Strahlenkegel ECD enthalten waren, werden, wenn wir das bei der Brechung durch die Gläser verloren gegangene Licht unberücksichtigt lassen, zuletzt im Strahlenkegel $D''C'''E''$ vorhanden seyn. Bezeichnet man die in C befindliche Kreisfläche durch a, die Intensität des Lichts durch i, die Entfernung CE durch h, die Gröſse ED durch t (§. 404.), so wird die Lichtmasse, welche auf das erste Glas innerhalb einer mit dem Halbmesser $ED = t$ beschriebenen Kreisfläche fällt, indem wir von der Krümmung des Glases abstrahiren,

$$= \frac{ia\pi tt}{hh}.$$

Diese Lichtmasse geht durch das in C''' entstehende Bild, und befindet sich das Auge in O, so daſs OF der Halbmesser der Pupille ist, so gelangt auch diese ganze Lichtmasse ins Auge.

Wenn nun die Vergröſserung dieser Zusammensetzung von Gläsern m ist, so wird die Fläche des Bildes in $C''' = amm$, da m bloſs die lineare Vergröſserung bedeutet; und setzt man $OC''' = \omega$, so läſst sich die Fläche des Bildes, welches auf der Netzhaut entsteht, durch

$$\frac{bb}{\omega\omega} \cdot amm$$

ausdrücken, wo b eine Gröſse bedeutet, die von den Dimensionen des Auges abhängt, für jedes Auge insbesondere aber einen constanten Werth besitzt. Dividiren wir mit dieser Fläche $= \frac{bb}{\omega\omega} \cdot amm$ in die Lichtmenge $= \frac{ia\pi tt}{hh}$, welche das Auge erhält, so kommt die Dichtigkeit des Lichts in dem Bilde auf der Netzhaut, d. h. die scheinbare Helligkeit des Bildes C''',

$$= \frac{i\pi tt}{hhmm} \cdot \frac{\omega\omega}{bb}.$$

§. 420.

Aus §. 405. ergiebt sich aber das Verhältniſs des Halbmessers des Bildes C''' nach einer Brechung durch n Gläser zum Halbmesser des Objects, oder die sogenannte Vergröſserungszahl

$$m = \frac{k \,.\, k' \,.\, k'' \ldots\ldots k^{(n-1)}}{h \,.\, h' \,.\, h'' \ldots\ldots h^{(n-1)}},$$

und den Werth von $D''E'' = t^{(n-1)}$ erhält man aus §. 404., indem man das Vorzeichen unberücksichtigt läſst,

$$t^{(n-1)} = \frac{h'.h''.h'''\ldots\ldots h^{(n-1)}}{k.k'.k''\ldots\ldots k^{(n-2)}}.t$$

$$\frac{t}{h} = \frac{k.k'.k''\ldots\ldots k^{(n-1)}}{h.h'.h''\ldots\ldots h^{(n-1)}}.\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}$$

$$= m.\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}},$$

und hieraus

$$\frac{t}{hm} = \frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}.$$

Wird dieser Werth von $\frac{t}{hm}$ in dem Ausdruck der scheinbaren Helligkeit

$$= \frac{i\pi tt.\omega\omega}{bb.hh.mm}.$$

substituirt, so kommt dieselbe

$$= \frac{i\pi\omega\omega}{bb}.\left(\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}\right)^2.$$

Es ist nun aber

$$\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}} = \frac{D''E''}{C'''E''} = \frac{OF}{OC'''} = \frac{OF}{\omega},$$

folglich läfst sich die scheinbare Helligkeit des Bildes C''' auch so ausdrücken:

$$\frac{i\pi}{bb}.OF^2,$$

wo OF den Halbmesser der Pupille des Auges darstellt. Das Product $\pi.OF^2$ selbst giebt also die Fläche der Pupille.

§. 421.

Wenn nun das Auge die Kreisfläche a in der Entfernung $= h$ ohne Gläser betrachtet, so ist die ins Auge gelangende Lichtmenge

$$= \frac{ia}{hh}.\pi.OF^2,$$

da dieselbe dem Quadrat der Entfernung umgekehrt, und der Fläche der Augenöffnung direct proportional gesetzt werden muſs. Die Fläche des Bildes, welches auf der Netzhaut entsteht, wird $= \frac{abb}{hh}$, folglich, wenn man mit dieser Fläche in die Lichtmenge, die auf dieselbe fällt, dividirt, so bleibt die Dichtigkeit des Lichts auf der Netzhaut, oder die scheinbare Helligkeit des Objects

$$= \frac{i\pi}{bb} \cdot OF^2.$$

Dies ist ganz übereinstimmend mit dem Ausdruck, welchen wir für die scheinbare Helligkeit eines durch eine beliebige Anzahl von Gläsern gesehenen Gegenstandes gefunden haben, folglich kann durch keine Zusammensetzung von Gläsern die scheinbare Helligkeit eines Gegenstandes vermehrt werden, im Gegentheil wird sie immer geringer seyn müssen, als wenn der Gegenstand mit bloſsem Auge gesehen wird, weil durch die Gläser einestheils eine Menge Licht verloren geht, und anderntheils der Durchschnitt des Strahlenkegels oft kleiner ausfällt, als die Oeffnung der Pupille.

§. 422.

Wenn EH derjenige Lichtstrahl ist, welcher, durch die Mitte des ersten Glases gehend, den Rand des zweiten Glases trifft, so wird der Winkel $E'EH$, den selbiger mit der Axe der Gläser bildet, das halbe Gesichtsfeld genannt. Hierbei wird nun vorausgesetzt, daſs die folgenden Gläser eine Oeffnung besitzen, die hinreichend groſs ist, um diesen Lichtstrahl ebenfalls durchzulassen. Die nöthigen Oeffnungen der Gläser bei gegebenem Gesichtsfelde werden durch die Gröſsen τ', τ'', τ''' des §. 408. gefunden. Nehmen wir z. B. die Zusammensetzung der drei Gläser §. 418., wo

$$\begin{array}{lll} f = 4, & f' = 2, & f'' = \frac{1}{12} \\ k = 4, & k' = 1, & k'' = \frac{2}{3} \\ h = \infty, & h' = -2, & h'' = \frac{2}{27} \\ l = 2, & l' = 1\frac{2}{27}, & \end{array}$$

und setzen das halbe Gesichtsfeld $= 30'$, so ist daselbst $\alpha = 30'$, und es ergiebt sich

$$\alpha' = + 60', \quad \alpha'' = - 810'$$
$$\psi'' = 30', \quad \psi_{,}'' = 0, \quad \psi_{,,}'' = - 720'$$
$$u = 0, \quad u' = \infty, \quad u'' = + \tfrac{1}{12}$$
$$\tau' = - 0{,}0175, \quad \tau'' = - 0{,}0175,$$

also müssen die Durchmesser der Oeffnungen der beiden letzten Gläser ungefähr einen halben Zoll betragen.

§. 423.

Um nun aber auch die ganze Gröſse des Gesichtsfeldes benutzen zu können, muſs man das Auge hinter dem letzten Glase an einen Ort stellen, wo es im Stande ist, die Strahlenkegel, die vom äuſsersten Punkt herkommen, aufzufangen. Ist nun $A'B'$ (Fig. 55 b.) das letzte Glas, so sieht man leicht, daſs das Auge in den Durchschnittspunkt K gestellt werden muſs, weil sich daselbst die Hauptstrahlen der von dem mittelsten Punkt C und dem äuſsersten Punkt D ausflieſsenden Strahlenkegel treffen. Man muſs also dem Abstand des Auges vom letzten Glase einen solchen Werth beilegen, welcher dem diesem Glase entsprechenden Werth von u gleich kommt. Dies würde in vorigem Beispiel $u'' = \frac{1}{12}$ Fuſs $= 1$ Zoll betragen. Erhielte man den hierher gehörigen Werth von u negativ, so wäre dies ein Zeichen, daſs der Durchschnittspunkt vor das Glas fiele, wohin man das Auge nicht bringen kann; in diesem Fall muſs man das Auge dem letzten Glase so sehr als möglich nähern, um das möglichst gröſste Gesichtsfeld zu erhalten.

§. 424.

Es sey O der Punkt (Fig. 56.), in welchen das Auge gestellt werden muſs, um das Gesichtsfeld ganz zu übersehen, nachdem die Strahlen durch n Gläser gezogen sind, so ist $E''O = u^{(n-1)}$, und da in C''' das letzte Bild liegt, so wird $E''C''' = k^{(n-1)}$

$$OC''' = u^{(n-1)} - k^{(n-1)}.$$

In den beiden Dreiecken $D''E''C'''$, $OC'''F$ erhält man die Proportion

$$C'''O : OF = E''C''' : E''D'',$$

also, wenn man OF für den Halbmesser der Pupille annimmt, und denselben durch μ bezeichnet,

$$E''D'' = \frac{\mu . k^{(n-1)}}{u^{(n-1)} - k^{(n-1)}}.$$

Diesen Werth muſs die halbe Oeffnung des letzten Glases haben, wenn der von einem Punkte in der Axe der Gläser herkommende Strahlenkegel die Pupille grade ausfüllen soll. Es ist aber $E''D''$ nichts anders, als die in §. 404. durch $t^{(n-1)}$ bezeichnete Gröſse, und man hat auch daselbst, wenn t die halbe Oeffnung des ersten Glases bedeutet, die Gleichung

$$t^{(n-1)} = \pm \frac{h'.h''.h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}{k.k'.k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}} \cdot t.$$

Setzt man also $E''D'' = t^{(n-1)}$, und sucht aus der dadurch entstehenden Gleichung die Gröſse t, so kommt

$$t = \frac{k'.k''.k''' \ldots\ldots k^{(n-1)}}{h'.h''.h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}} \cdot \frac{\mu k}{u^{(n-1)} - k^{(n-1)}},$$

und diesen Werth t muſs die halbe Oeffnung des ersten Glases haben, wenn der durchgehende Strahlenkegel groſs genug seyn soll, die Pupille auszufüllen. Im vorigen Beispiel hat man

$$k = 4, \quad k' = 1, \quad k'' = -\tfrac{2}{3}$$
$$h' = -2, \quad h'' = \tfrac{2}{27}, \quad u'' = \tfrac{1}{12},$$

also hieraus $t = 24\mu$, d. h. die Oeffnung des ersten Glases muſs 24 mal so groſs seyn, als die der Pupille.

§. 424.

Die allgemeinen Formeln, welche wir von §. 403. an über den Weg eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von Gläsern entwickelt haben, sind aber bloſs als Annäherungen zu betrachten, in so fern die aus gegebenen Bedingungen vermittelst der angegebenen Re-

lationen abgeleiteten Zusammensetzungen von Gläsern, wirklich praktisch ausgeführt und dann zu den Beobachtungen benutzt werden sollen. Es ist nämlich erstens zu berücksichtigen, dafs die immer gemachte Annahme, dafs alle auf das Glas fallenden Strahlen sich in einem Punkte vereinigen, nicht genau ist, indem die von der Axe entfernter auffallenden Strahlen, nach der erlittenen zweimaligen Brechung, die Axe des Glases in gröfserer Nähe vom Glase schneiden, als diejenigen, welche ganz nahe bei der Axe auffallen. Aus diesem Grunde wird das Bild eines Punktes kein Punkt werden, sondern als eine kreisförmige Fläche erscheinen, und bei starker Vergröfserung mufs dann eine bedeutende Undeutlichkeit im Bilde entstehen. Zweitens hat die Erfahrung gelehrt, dafs das Licht bei seinem Durchgange durch brechende Mittel nicht einfach bleibe, sondern der einfache auffallende Strahl wird in der brechenden Materie in farbige Strahlen zerlegt, die verschiedene Werthe des Brechungsverhältnisses geben, und dieser Umstand der Zerlegung des Lichts wirkt noch bei Weitem stärker auf die Undeutlichkeit des Bildes ein, als der Umstand, dafs die Lage des Sammlungspunktes gegen das Glas von der Lage des einfallenden Strahles abhängt.

Von der Zerstreuung des Lichts in Farben.

§. 425.

Wir haben früher gezeigt, welchen Weg ein Strahl nimmt, der auf ein Prisma von beliebiger brechender Materie fällt, und auch zugleich angegeben, dafs die von einem Punkt herkommenden Strahlen, unter der Voraussetzung, dafs ihr Licht gleichartig sey, d. h., dafs für alle Strahlen ein und dasselbe Brechungsverhältnifs gilt, wenn die äufsersten Strahlen des einfallenden Strahlenkegels einen sehr kleinen Winkel bilden, so gebrochen werden, dafs die Verlängerungen dieser gebrochenen Strahlen sich in einem Punkt schneiden. Bezeichnen wir, nach §. 355., den Winkel des einfallenden Strahls mit dem Einfallsloth durch ε, den des zum zweitenmal gebrochenen Strahls mit dem am Austrittspunkt errichteten Einfallsloth durch β', den brechenden Winkel des Prisma durch p, das Brechungsverhältnifs durch n, und nehmen als Normalfall an, dafs der einfallende Strahl, wie früher, auf der der Kante des Prisma entgegengesetzten Seite des Einfallslothes liegt, nach der ersten Brechung aber die zweite Fläche des Prisma so trifft, dafs er mit der Kante auf derselben Seite des Einfallslothes, nach der zweiten Brechung also auf der der Kante entgegengesetzten Seite liegt, welcher Fall der gewöhnlichere ist, so haben wir

$$\sin \beta' = \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin \varepsilon \,.\, \cos p.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dafs, wenn n etwas zunimmt, bei gleichbleibendem Werth von ε und p, auch β' zunehmen wird. Bezeichnet man die Zunahme von n durch dn, die von β' durch $d\beta'$, so wird

$$d\beta' = \frac{\sin p'}{\cos \beta'} \cdot \frac{ndn}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

§. 426.

Wenn nun in dem einfallenden Lichtstrahl Lichttheilchen vorhanden sind, auf welche das Prisma mit verschiedener brechender Kraft einwirkt, so wird der von einem leuchtenden physischen Punkt herkommende Lichtstrahl, nach seiner zweimaligen Brechung, fächerartig ausgebreitet erscheinen. Hat man z. B. die Sonne als leuchtenden Gegenstand genommen, und fängt man die zum zweitenmal gebrochenen Strahlen mit einer Ebene auf, die senkrecht auf den letzten Strahlen steht, so wird das Bild nicht kreisförmig, sondern in der Richtung der Brechungsebene sehr in die Länge gezogen seyn. Der hierüber angestellte Versuch zeigt, dafs die verschiedene Brechbarkeit des Lichts durch die verschiedenen Farben angedeutet wird.

§. 427.

Befindet sich nämlich das Prisma in einer solchen Lage, dafs der brechende Winkel nach unten gekehrt ist, so zeigt sich von unten nach oben folgende Reihe von Farben: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Dunkelblau, Violet. Da also in diesem Fall für Roth der Winkel $\mathit{6}'$ am kleinsten, für Violet am gröfsten ist, so wird auch für Roth der Werth von n am kleinsten, für Violet am gröfsten, und man sagt daher, die rothen Strahlen seyen die am wenigsten brechbaren, die violetten die am stärksten brechbaren Strahlen. Bis jetzt hat man noch keine brechende Materie gefunden, in welcher nicht die angegebene Ordnung der Farben jedesmal Statt gefunden hätte, wenn auch die Werthe der Brechungsverhältnisse für die einzelnen Strahlen sehr von einander verschieden waren.

§. 428.

Wir haben in den §§. 326 bis 337. gezeigt, auf welche Art die Brechung sich sowohl nach dem Emanationssystem als nach dem Undulationssystem erklären lasse, und wir wollen hier nur noch einige Bemerkun-

gen rücksichtlich der Farbenzerstreuung hinzufügen. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum durch c, das Brechungsverhältnifs des Körpers durch n, seine Dichtigkeit durch ϱ, und durch N eine constante Gröfse, die von der anziehenden Kraft des Körpers gegen das Licht abhängt, so hatten wir aus §. 331. die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}.$$

In so fern nun die Erfahrung zeigt, dafs für einen und denselben Körper n einen verschiedenen Werth hat, je nachdem Lichttheilchen von dieser oder jener Farbe von demselben gebrochen werden, so könnte man, voriger Formel gemäfs, auf die Idee kommen, den verschieden gefärbten Lichttheilchen noch verschiedene Geschwindigkeiten im leeren Raum beizulegen, weil, wenn die Geschwindigkeit c abnimmt, das Brechungsverhältnifs n nothwendig zunehmen mufs.

§. 429.

Ist z. B. für einen bestimmten Körper c die Geschwindigkeit des rothen Lichts, n das Brechungsverhältnifs der rothen Strahlen, $c - dc$ die Geschwindigkeit des violetten Lichts, $n + dn$ das Brechungsverhältnifs der violetten Strahlen, so hat man die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho},$$

und wenn man differentiirt, indem c und n als veränderlich betrachtet werden,

$$- \frac{4Ndc}{c^3} = \frac{ndn}{\varrho}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die erste, so fallen die Constanten N, ϱ weg, und es bleibt ganz einfach

$$\frac{dc}{c} = - \frac{ndn}{nn - 1}.$$

Bei einem andern brechenden Körper sey nun das Brechungsverhältnifs für rothes Licht $= n'$, für violettes

Licht $= n' + dn'$, so hat man, da c und dc immer unverändert bleiben, ebenfalls

$$\frac{dc}{c} = - \frac{n'dn'}{n'n' - 1},$$

folglich, wenn beide Werthe von $\frac{dc}{c}$ einander gleich gesetzt werden,

$$\frac{ndn}{nn - 1} = \frac{n'dn'}{n'n' - 1}.$$

§. 430.

Wenn also die gemachte Annahme, daſs die verschiedene Brechbarkeit der Strahlen von ihrer verschiedenen Geschwindigkeit im Raume abhinge, richtig wäre, so lieſse sich die Zerstreuung dn' für jeden Körper a priori finden, wenn sein Brechungsverhältniſs n' bekannt ist, und man auſserdem für einen bestimmten Körper die Zerstreuung dn und das Brechungsverhältniſs n kennt. Man hätte dann nämlich die Gleichung

$$dn' = dn \cdot \frac{n}{n'} \cdot \frac{n'n' - 1}{nn - 1}.$$

Diesem widerspricht aber die Erfahrung, denn man hat z. B. für Kronglas $n = 1{,}50$; $dn = 0{,}02$; für Flintglas $n' = 1{,}58$, so daſs nach voriger Formel für Flintglas

$$dn' = 0{,}0228$$

würde, während die Beobachtung $dn' = 0{,}04$ giebt. Man kann also die gemachte Annahme nicht bestehen lassen, wenigstens ist die verschiedene Geschwindigkeit nicht hinreichend, um das verschiedene Brechungsverhältniſs der gefärbten Strahlen zu erklären. Uebrigens ist zu bemerken, daſs bis jetzt noch kein Gesetz bekannt ist, welches die Zerstreuung dn durch das Brechungsverhältniſs n ausdrückte.

§. 431.

Es läſst sich indessen aus andern Erscheinungen darthun, daſs die Geschwindigkeiten der Lichttheilchen, welche verschiedene Farben hervorbringen, im leeren

Raum gleich grofs seyn müssen. Wird z. B. ein Trabant des Jupiters, indem er in den Schatten des Hauptplaneten tritt, verfinstert, so müfste, bei der allmähligen Fortpflanzung des Lichts, der Trabant bei anfangender völliger Verfinsterung mit derjenigen Farbe erscheinen, deren Lichttheilchen die geringste Geschwindigkeit besitzen, d. h. Violet. Umgekehrt würde der Trabant, sobald er wieder bei seinem Austritt aus dem Schatten von der Sonne erleuchtet wird, zuerst sich in der Farbe zeigen, welcher die schnellsten Lichttheilchen entsprechen, d. h. in Roth. Da nun aber diese Erscheinungen sich nicht zeigen, sondern der Trabant immer in demselben Licht gesehen wird, so müssen wir hieraus nothwendig schliefsen, dafs keine verschiedene Geschwindigkeit für die Lichttheilchen, welche die Empfindung der verschiedenen Farben verursachen, Statt finde.

§. 432.

Wir sind also genöthigt, anzunehmen, um die verschiedene Brechbarkeit des Lichts zu erklären, die Gröfse N in dem Ausdruck

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}$$

habe für Lichttheilchen verschiedener Art auch einen verschiedenen Werth. Sonderbar ist es freilich, dafs diese Gröfse bei allen Körpern für violettes Licht ihr Maximum, für rothes Licht ihr Minimum hat.

Man wird also nach der Emanationstheorie das weifse Licht als eine Mischung von Lichttheilchen ansehen, die den angeführten sieben Grundfarben entsprechen, diese bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit im leeren Raume, werden durch die Dazwischenkunft eines brechenden Körpers aber getrennt, und nehmen im brechenden Körper, den früher entwickelten Formeln zufolge, wegen der verschiedenen Brechungsverhältnisse, auch verschiedene Geschwindigkeiten an.

§. 433.

Der Vibrationstheorie zufolge bestimmen sich die Farben für das Auge auf eine analoge Weise, wie die tiefern und höhern Töne für das Ohr. Die gröfsere oder geringere Ausweichung der Aethertheilchen bei den Vibrationen bestimmt nämlich die verschiedene Farbe, und zwar geben die gröfsten Ausweichungen die Empfindung des rothen, die kleinsten Ausweichungen die des violetten Lichts. Allein hierdurch erklären sich wohl die verschiedenen Farben, keinesweges aber die Farbenzerstreuung. Man kann nämlich in der Lehre von der Bewegung der elastischen Flüssigkeiten beweisen, dafs kürzere und längere Vibrationen sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen; dies lehrt die Erfahrung bei dem Schall, wo auch die hohen und tiefen Töne mit einerlei Geschwindigkeit fortgehen, indem die Schnelligkeit, womit eine Welle fortgeht, blofs von der Elasticität des Mittels abhängt, in welchem die Vibrationen erregt werden. Tritt also eine Reihe gemischter Vibrationen in ein brechendes Mittel, so gehen sie in dem darin enthaltenen Aether, zwar mit einer von der äufsern verschiedenen, aber unter sich gleichen Geschwindigkeit fort, und da wir früher gezeigt haben, dafs das Verhältnifs des Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels blofs von diesem Verhältnifs der Geschwindigkeiten abhängt, so folgt hieraus, dafs für alle Farben einerlei Brechungsverhältnifs, und daher keine Farbenzerstreuung Statt finde. Dieser Umstand ist einer der Haupteinwürfe, die sich gegen die Vibrationstheorie machen lassen, und um ihn zu heben, hat man wohl angenommen, dafs durch die Schwingungen des Aethers auch zugleich die Körpertheilchen in Schwingungen geriethen, wodurch freilich eine Aenderung der Geschwindigkeit der Fortpflanzung bei verschiedenen Amplituden der Schwingungen hervorgebracht werden könnte. Uebrigens bemerken wir, dafs Cauchy uns im zehnten Band der *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*

de l'Institut de France Hoffnung macht, diesen Umstand theoretisch aufzuklären. Er drückt sich über diesen Gegenstand Seite 316. folgendermaſsen aus: *Pour réduire les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, aux formules dont il s'agit, on est obligé de négliger plusieurs termes, par exemple ceux qui renferment les puissances supérieures des déplacemens* ξ, η, ζ *et de leurs dérivés, prises par rapport aux variables indépendantes* x, y, z. *Lorsqu'on cesse de négliger ces mêmes termes, on obtient, comme je le montrerai dans un nouveau Mémoire, déjà présenté à l'Académie, des formules à l'aide desquelles on peut non seulement assigner la cause de la dispersion des couleurs par le prisme, mais encore découvrir les lois de ce phénomène qui, malgré les nombreux et importans travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.* Man sieht hieraus, daſs alles, was man nur für die Theorie des Lichts, aus dem Gesichtspunkt des Undulationssystems betrachtet, noch wünschen kann, hier versprochen wird.

§. 434.

Es sey ABC ein Prisma von beliebiger brechender Materie (Fig. 57.), LM ein einfallender Strahl, der nach zweimaliger Brechung ein anderes Prisma DEF in P trifft, dessen vordere Fläche DF der hintern BC des ersten Prisma parallel ist, und dessen brechender Winkel nach oben gekehrt ist, während der des ersten nach unten zu liegt. Deuten wir nun durch die gebrochene Linie $LMKPQR$ den Weg der rothen Strahlen an, und bezeichnen den Einfallswinkel für das erste Prisma durch ε, den Brechungswinkel von KP durch β', den Einfallswinkel von KP auf das zweite Prisma durch ε', den Brechungswinkel von QR durch β'', nennen ferner n das Brechungsverhältniſs der rothen Strah-

len, und p den brechenden Winkel für das erste und n', p' eben diese Gröfsen für das zweite Prisma, so ist, wenn wir bedenken, dafs $6' = \varepsilon'$, weil BC und DF parallel sind,

$$\sin \varepsilon' = \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p \,.\, \sin \varepsilon$$
$$\sin 6'' = \sin p' \,.\, \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon'^2} - \cos p' \,.\, \sin \varepsilon'.$$

Eliminirt man $\sin \varepsilon'$ aus diesen Gleichungen, so bleibt:

$$\sin 6'' = \cos p' \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon - \cos p' \,.\, \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' \,.\, \sqrt{[n'n' - \sin p^2 \,.\, (\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p \,.\, \sin \varepsilon)^2]}.$$

§. 435.

Bezeichnen wir die Gröfsen, welche wir für den rothen Strahl n, n', ε', $6''$ genannt haben, für irgend einen anders gefärbten Strahl durch N, N', E', B'', so findet sich für diesen

$$\sin B'' = \cos p' \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon - \cos p' \,.\, \sin p \,.\, \sqrt{NN - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' \,.\, \sqrt{[N'N' - \sin p^2 \,.\, (\sqrt{NN - \sin \varepsilon^2} - \cos p \,.\, \sin \varepsilon)^2]}.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit der für $\sin 6''$ gefundenen, läfst sich nun immer der Winkel $B - b$, welchen die aus dem zweiten Prisma hervorkommenden rothen Strahlen mit denen irgend einer anderen Farbe machen, finden. Bedenken wir indessen, dafs N und N' wenig von n, n' verschieden sind, also auch die Differenzen $B'' - 6''$, $E' - \varepsilon'$ sehr klein seyn werden, so können wir zur Kenntnifs von $B'' - 6''$ einfacher gelangen, indem wir in den Gleichungen des §. 434.

$$\sin \varepsilon' = \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p \,.\, \sin \varepsilon$$
$$\sin 6'' = \sin p' \,.\, \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon'^2} - \cos p' \,.\, \sin \varepsilon',$$

die Gröfsen n, n' sich ändern lassen, und die daraus für ε', $6''$ sich ergebenden Aenderungen mit Vernachlässigung der höhern Potenzen der Incremente, also durch einfache Differentiation, ableiten. Auf diese Weise ergiebt sich, indem man $N - n = \delta n$, $N' - n' = \delta n'$ setzt,

$$\cos\varepsilon' d\varepsilon' = \frac{\sin p n \delta n}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}$$

$$\cos 6'' d6'' = \frac{\sin p' . (n'\delta n' - \sin\varepsilon' . \cos\varepsilon' d\varepsilon')}{\sqrt{n'n' - \sin\varepsilon'^2}} - \cos p' . \cos\varepsilon' d\varepsilon' .$$

Eliminirt man $d\varepsilon'$ aus beiden Gleichungen, so kommt

$$\sqrt{n'n' - \sin\varepsilon'^2} . \cos 6'' d6'' = \sin p' n' \delta n' - \frac{\sin\varepsilon' . \sin p' . \sin p . n\delta n}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}$$

$$- \frac{\cos p' . \sin p n . \delta n . \sqrt{(n'n' - \sin\varepsilon'^2)}}{\sqrt{(nn - \sin\varepsilon^2)}} .$$

Diese Gleichung giebt uns den Werth von $d6''$, also von dem Winkel, welchen der rothe Strahl mit einem anders gefärbten bildet, für den in den beiden Prismen die Brechungsverhältnisse $n + \delta n$, $n' + \delta n'$ gelten.

§. 436.

Setzt man der Kürze wegen

$$\sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \cos p . \sin\varepsilon = n' . \sin\theta ,$$

so erhält man aus den Gleichungen der §§. 434 und 435.

$$\sin 6'' = n'' . \sin(p' - \theta)$$

$$\cos 6'' . \cos\theta\delta 6'' = \delta n' . \sin p' - \frac{n\delta n . \sin p . \cos(p' - \theta)}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} ,$$

und wenn man noch $\sin\varepsilon = n . \sin\mu$ setzt,

$$\cos 6'' . \cos\theta\delta 6'' = \delta n' . \sin p' - \frac{\delta n . \sin p . \cos(p' - \theta)}{\cos\mu} ,$$

oder, wenn man $d6''$ in Secunden haben will,

$$\cos 6'' . \cos\theta d6'' = 206265 . \delta n' . \sin p' - 206265 . \frac{\delta n . \sin p . \cos(p' - 6)}{\cos\mu} .$$

§. 437.

Um an einem Beispiel zu zeigen, wie grofs der Winkel $\delta 6''$ wird, wollen wir das erste Prisma aus Kronglas, das zweite aus Flintglas bestehend, annehmen, und den Einfallswinkel $\varepsilon = o$ setzen. Die brechenden Winkel nehmen wir

$$p = 20^\circ, \quad p' = 15^\circ,$$

außerdem hat man noch für die erwähnten Glasarten

$$n = 1{,}50\,; \quad n' = 1{,}58,$$

und für die violette Farbe $\delta n = 0{,}02$, $\delta n' = 0{,}04$.

Dann wird $\sin\theta = \frac{n}{n'} \cdot \sin p$.

$$\begin{array}{rl}
\log n = & 0\,.\,1760913 \\
C\,.\log n' = & 9\,.\,8013429 \\
\log \sin p = & \underline{9\,.\,5340517} \\
\sin\theta \;\ldots & 9\,.\,5114859 \\
\theta = & 18^0\ 56'\ 51'',\ 2 \\
p' - \theta = & -\ 3\,.\,56\,.\,51'',\ 2 \\
\sin(p' - \theta) \ldots & 8\,.\,8378620\,.\,\mathrm{n} \\
n' \ldots & \underline{0\,.\,1986571} \\
\sin\vartheta'' \ldots & 9\,.\,0365191\,.\,\mathrm{n} \\
\vartheta'' = & -\ 6^0\ 14'\ 40'',\ 4 \\
\cos\vartheta'' \ldots & 9\,.\,99743 \\
\cos\theta \ldots & \underline{9\,.\,97581} \\
 & 9\,.\,97324
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl}
\delta n' \ldots & 8\,.\,60206 & \delta n \ldots & 8\,.\,30103 \\
206265 \ldots & 5\,.\,31443 & 206265 \ldots & 5\,.\,31443 \\
\sin p' \ldots & 9\,.\,41300 & \sin p \ldots & 9\,.\,53405 \\
 & \underline{0\,.\,02676} & \cos(p' - \theta) \ldots & 9\,.\,99897 \\
 & \underline{3\,.\,35625} & & \underline{0\,.\,02676} \\
 & 2271'',\ 2 & & \underline{3\,.\,17524} \\
 & \underline{1497'',\ 1} & & 1497'',\ 1
\end{array}$$

$$d\vartheta'' = 774''\ 1 = 12'\ 54'',\ 1.$$

§. 438.

Man sieht nun leicht aus der Gleichung, welche den Werth von $\delta\vartheta''$ ausdrückt, daſs es möglich seyn wird, für einen bestimmten Werth des brechenden Winkels p des ersten Prisma, und einen gegebenen Einfallswinkel ε, den brechenden Winkel des zweiten Prisma p' so zu bestimmen, daſs $d\vartheta''$ Null wird, d. h. daſs die rothen Strahlen nebst den Strahlen einer bestimmten andern Farbe, z. B. violet, parallel hinter dem zweiten

Prisma wieder austreten. Dies geschieht dann, wenn

$$\delta n' . \sin p' . \cos \mu = \delta n . \sin p . \cos (p' - \theta),$$

und hieraus erhält man, indem

$$\cos (p' - \theta) = \cos p' . \cos \theta + \sin p' . \sin \theta$$

gesetzt, und die ganze Gleichung durch $\cos p'$ dividirt wird,

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\delta n . \sin p . \cos \theta}{\delta n' . \cos \mu - \delta n . \sin p . \sin \theta}.$$

Nimmt man, wie im vorigen Beispiel, den Einfallswinkel $\varepsilon = o$, $\delta n = 0{,}02$, $\delta n' = 0{,}04$, $p = 20^0$, so ergiebt sich nach dieser Formel der brechende Winkel des zweiten Prisma

$$p' = 9^0\ 44'\ 28''.$$

§. 439.

Haben die beiden Prismen sehr kleine brechende Winkel, und fallen die Strahlen nahe senkrecht auf das erste Prisma, so kann man alle Potenzen der Winkel p, p', ε vernachlässigen; und da in diesem Falle $\cos \theta = 1$, $\cos \mu = 1$, so geht die Formel

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\delta n . \sin p . \cos \theta}{\delta n' . \cos \mu - \delta n . \sin p . \sin \theta}$$

in diese über

$$p' = \frac{p \delta n}{\delta n' - p . \delta n},$$

oder, da man das Glied $p\delta n$ im Nenner auch noch vernachlässigen kann,

$$p' = \frac{p \delta n}{\delta n'}.$$

Verhalten sich also bei zwei Prismen mit kleinen brechenden Winkeln p, p' diese brechenden Winkel umgekehrt wie die Zerstreuungswinkel δn, $\delta n'$ der brechenden Materien, so werden beide Prismen, zusammengenommen, für Strahlen, welche fast senkrecht auf das erste fallen, die Wirkung haben, daſs der aus dem zweiten ausfahrende Strahl sich wenigstens rücksichtlich zweier Farben nicht fächerartig ausbreitet, sondern zwei

Farbenstrahlen parallele Richtung besitzen. Wäre das Verhältnifs $\delta n : \delta n'$ für alle Farben völlig gleich, so würden auch alle Farbestrahlen parallel ausfahren. Wenn nun auch dies nicht mathematisch genau der Fall ist, so sind doch die Abweichungen der übrigen Strahlen vom Parallelismus so gering, dafs man sie physisch für parallel ansehen kann. Bringt man also das Auge in die Richtung dieses ausfahrenden Strahls, so vereinigen sich alle verschieden gefärbten Strahlen auf einer Stelle der Netzhaut, und da die Mischung der sieben verschiedenen Grundfarben weifses Licht giebt, so folgt hieraus, dafs der Gegenstand, von welchem das Licht ausgieng, ohne die farbigen Ränder erscheinen wird, die sich durch ein einfaches Prisma zeigen. Man nennt daher ein so zusammengesetztes Prisma ein achromatisches Prisma.

§. 440.

Es mufs nun noch untersucht werden, ob bei dieser Einrichtung des achromatischen Prisma eine Ablenkung der Richtung des ausfahrenden Strahls von der Richtung des einfallenden Statt findet, oder ob beide Strahlen einander parallel werden. Denn wäre letzteres der Fall, so würden wir aus diesem Achromatismus der Prismen gar keinen Nutzen für die Zusammensetzung der Glaslinsen, um bei diesen die Farbenzerstreuung aufzuheben, ziehen können.

Der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem ausfahrenden bildet, läfst sich folgendermafsen finden. Nach §. 358. ist, wenn der Einfallswinkel auf das erste Prisma durch ε, der Brechungswinkel des ausfahrenden Strahls, in dem §. 425. angegebenen Sinne genommen, durch β' bezeichnet wird, der Winkel, den beide Strahlen mit einander bilden,

$$= \varepsilon + \beta' - p.$$

Nun ist für das zweite Prisma der Einfallswinkel ebenfalls β', der Brechungswinkel β'', also der Winkel beider

$$= \beta' + \beta'' - p'.$$

Der Unterschied beider Winkel giebt dann den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem aus dem zweiten Prisma ausfahrenden bildet. Bezeichnet man denselben durch δ, so ist

$$\delta = \varepsilon - \theta'' - (p - p').$$

§. 441.

In so fern nun aber alle Winkel ε, p, p' als sehr klein angenommen werden, wird auch θ'' sehr klein, und man erhält aus der Gleichung (§. 434.)

$$\sin\theta'' = \cos p' . \cos p . \sin\varepsilon - \cos p' . \sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' . \sqrt{[n'n' - (\sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \cos p . \sin\varepsilon)^2]},$$

mit Vernachlässigung aller Potenzen der Winkel

$$\theta'' = n'p' + \varepsilon - np,$$

und wenn man diesen Werth von θ'' in die Gleichung

$$\delta = \varepsilon - \theta'' - (p - p')$$

substituirt, so kommt

$$\delta = (n - 1) . p - (n' - 1) . p'.$$

Dieser Winkel ist nicht Null, so lange nicht

$$p : p' = (n' - 1) : (n - 1),$$

und da wir schon früher gefunden hatten, dafs bei dem achromatischen Prisma die Proportion

$$p : p' = dn' : dn$$

Statt finden mufs, so folgt hieraus, dafs, im Fall der Winkel δ verschwindet,

$$n' - 1 : n - 1 = dn' : dn$$

$$\frac{dn}{n - 1} = \frac{dn'}{n' - 1}$$

seyn wird.

§. 442.

Die Quotienten $\frac{dn}{n - 1}$, $\frac{dn'}{n' - 1}$ kann man die Zerstreuungsverhältnisse der brechenden Materien nennen, und man darf daher sagen, wenn die Zerstreuungsverhältnisse der brechenden Materien, aus welchen die Prismen bestehen, ungleich sind, so wird eine Ablenkung des

ausfahrenden Strahls von der Richtung des einfallenden Statt finden.

Newton war durch einen Versuch verleitet worden, anzunehmen, daſs bei allen brechenden Materien die Gleichung

$$\frac{dn}{n-1} = \frac{dn'}{n'-1}$$

erfüllt würde, daſs also der Strahl nur dann ungefärbt austritt, wenn derselbe dem einfallenden Strahl parallel ist. Hieraus folgerte er ganz richtig, daſs es keine Mittel gäbe, die Fernröhre so zusammenzusetzen, daſs dieselben achromatische Bilder darstellten. Er verlieſs daher die Untersuchung über die Verbesserung der Fernröhre gänzlich, und wandte sich zu der Verfertigung der Spiegeltelescope, bei denen keine Farben entstehen konnten, weil durch die Reflexion keine Zerlegung des Lichts hervorgebracht wird. Späterhin wurde jedoch dieser Fehlschluſs entdeckt, und die Mittel aufgefunden, achromatische Fernröhre zu verfertigen.

§. 443.

Ehe wir nun zur Anwendung der bisher vorgetragenen Lehren über die Zerlegung des Lichts in Farben und die durch passende brechende Materien wieder erfolgende Mischung der Farben zu weiſsem Licht auf die Zusammensetzung von Glaslinsen übergehen, wollen wir zu der Erklärung der Erscheinung des Regenbogens schreiten. Es sey MNO der Durchschnitt einer Kugel, welche aus irgend einer brechenden Materie besteht, deren Brechungsverhältniſs wir für irgend einen bestimmten Farbenstrahl, z. B. den rothen, durch n bezeichnen. In C sey der Mittelpunkt des Kreises, so stellen die Halbmesser desselben die Einfallslothe vor. LM sey ein von einem sehr entfernten Object, z. B. dem Mittelpunkt der Sonne, einfallender Strahl, und nennt man den Einfallswinkel ε, den Brechungswinkel NMC, β, so hat man

$$\sin\varepsilon = n \cdot \sin\beta.$$

Der gebrochene Strahl MN trifft nun in N die Oberfläche der Kugel, wo ein grofser Theil des Lichts austritt, dieses berücksichtigen wir nicht; allein ein Theil desselben wird nach NO zurückgeworfen, und tritt dann erst wieder nach OP aus, so dafs ein Auge, welches sich in der Richtung des Strahls OP befindet, den Gegenstand, welcher vermittelst LM sein Licht auf die Kugel schickt, sehen würde.

§. 444.

Da nun

$$MNC = CMN = \delta,$$

und vermöge der Zurückwerfungsgesetze $CNO = CNM$ seyn wird, so ist ebenfalls $CON = \delta$, folglich der Winkel POS, welchen der austretende Strahl mit dem verlängerten Halbmesser bildet, $= \varepsilon$. Man verlängere den einfallenden Strahl, bis er die ebenfalls verlängerten Strahlen ON, OP in Q und S schneidet, so hat man im Dreieck MNQ

$$QMN + MQN = MNO,$$

und da $QMN = \varepsilon - \delta$, $MNO = 2\delta$, so ergiebt sich der Winkel, welchen der einmal zurückgeworfene Strahl mit den einfallenden bildet,

$$MQN = 3\delta - \varepsilon.$$

Im Dreieck QRO hat man

$$MQN = QRO + QOR,$$

und da $QOR = \varepsilon - \delta$, so wird auch

$$QRO = 4\delta - 2\varepsilon.$$

Bezeichnet man daher den Winkel, den der ausfahrende Strahl nach einmaliger Zurückwerfung mit dem einfallenden bildet, durch E', so hat man

$$E' = 4\delta - 2\varepsilon.$$

§. 445.

So wenig nun aber bei N alles Licht aus der Kugel austrat, eben so wenig wird auch bei O alles Licht austreten, sondern ein Theil desselben wird zurückgeworfen, und dann erst die Kugel verlassen. Auf

diese Weise wird jeder ausfahrende gebrochene Strahl wiederum eine neue Zurückwerfung mit sich führen. Bezeichnet man den Winkel des ausfahrenden Strahls mit dem einfallenden nach zweimaliger Zurückwerfung durch E'', nach dreimaliger Zurückwerfung durch E''' u. s. w. fort, so erhält man leicht folgende Reihe von Gleichungen:

$$E' = 4\beta - 2\varepsilon;$$
$$E'' = 6\beta - 2\varepsilon;$$
$$E''' = 8\beta - 2\varepsilon; \text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus sogleich, daſs nach m maliger Zurückwerfung der Winkel des ausfahrenden Strahls mit dem einfallenden

$$E^{(m)} = 2.(m + 1).\beta - 2\varepsilon$$

werden wird, wo ε und β mit einander durch die Gleichung $\sin\varepsilon = n.\sin\beta$ verbunden sind.

§. 446.

Differentiirt man diese beiden letzten Gleichungen, so kommt

$$dE^{(m)} = 2.(m + 1).d\beta - 2d\varepsilon$$
$$\cos\varepsilon.d\varepsilon = n.\cos\beta.d\beta,$$

und wenn man hieraus $d\beta$ eliminirt

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dE^{(m)}}{d\varepsilon} = \frac{(m + 1).\cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} - 1,$$

welche Gleichung zeigt, in wiefern sich $E^{(m)}$ durch eine Veränderung von ε vermehrt oder vermindert. Nehmen wir nun den Werth von ε, dem die geringste Aenderung von $E^{(m)}$ entspricht, so werden dann die in der Nähe des Punktes M parallel auffallenden Strahlen so zurückgeworfen und gebrochen, daſs die ausfahrenden Strahlen untereinander parallel werden, und hierdurch, bei dieser Lage der einfallenden Strahlen, dem Auge das meiste Licht zugeführt wird. Dies geschieht natürlich dann, wenn $dE^{(m)}$ Null ist, und man erhält dann zur Bestimmung von ε die Gleichung

$$(m + 1)^2.\cos\varepsilon^2 = nn - \sin\varepsilon^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - nn}{mm + 2m}}.$$

§. 447.

Setzt man in dieser Formel nach und nach 1, 2, 3 u. s. w. statt m, so kommen nach und nach die Werthe von $\sin \varepsilon$

$$1)\quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{4 - nn}{3}}$$

$$2)\quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{9 - nn}{8}}$$

$$3)\quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{16 - nn}{15}}$$

$$4)\quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{25 - nn}{24}} \quad \text{u. s. w.,}$$

für $m = \infty$ wird $\sin \varepsilon = 1$, dann berührt der Strahl LM die Kugel. Für Wasser nehme man

$n = 1{,}330$ bei rothen Strahlen,
$n = 1{,}342$ - violetten -

so ergiebt sich in Zahlen, wenn man bis zur sechsten Zurückwerfung geht,

	Roth.	Violet.
1)	$\varepsilon = 59^0\ 35'\ 2''$	$58^0\ 53'\ 14''$
2)	$\varepsilon = 71\ 56\ 22$	$71\ 33\ 10$
3)	$\varepsilon = 76\ 54\ 51$	$76\ 38\ 21$
4)	$\varepsilon = 79\ 41\ 21$	$79\ 28\ 26$
5)	$\varepsilon = 81\ 28\ 35$	$81\ 17\ 56$
6)	$\varepsilon = 82\ 43\ 44$	$82\ 34\ 40.$

	Roth.	
1)	$\delta = 40^0\ 25'\ 16''$	$39^0\ 38'\ 25''$
2)	$\delta = 45\ 37\ 47$	$44\ 58\ 51$
3)	$\delta = 47\ 5\ 3$	$46\ 28\ 4$
4)	$\delta = 47\ 42\ 33$	$47\ 6\ 22$
5)	$\delta = 48\ 2\ 13$	$47\ 26\ 27$
6)	$\delta = 48\ 13\ 51$	$47\ 38\ 20.$

	Roth.			Violet.		
$E' =$	42^0	$31'$	$0''$	40^0	$47'$	$12''$
$E'' =$	129	53	54	126	46	38
$E''' =$	222	50	42	218	27	50
$E^{\text{iv}} =$	317	42	48	312	6	48
$E^{\text{v}} =$	53	29	26	46	41	32
$E^{\text{vi}} =$	149	46	26	141	47	20.

§. 448.

Man sieht hieraus, dafs die Winkel des einfallenden Strahls mit dem ausfahrenden, die wir durch E bezeichnet haben, bis zu 360^0 wachsen. Es fragt sich nun aber, wie diese Winkel dann genommen werden müssen, wenn sie gröfser als 90^0 werden. Der Normalfall der Zeichnung stellt den Fall vor, wenn die Verlängerungen des einfallenden Strahls sowohl, als des ausfahrenden sich durchschneiden, wobei zugleich angenommen ist, der einfallende Strahl treffe den obern Theil der Wasserkugel. Befindet sich also das Auge auf derselben Seite der Wasserkugel, auf welcher die Sonne steht, und zugleich dem Erdboden näher, als die Kugel, so wird das Auge die unter dem Winkel von $42^0\ 31'$ gegen den einfallenden Strahl ausgehenden Strahlen sehen können. Wird nun der Winkel E gröfser als 90^0, so findet man leicht, dafs nicht die Verlängerungen der Strahlen, sondern die Strahlen selbst sich schneiden, und zwar unter einem Winkel $180^0 - 129^0\ 53'\ 54''$ $= 50^0\ 6'\ 6''$. Es ist aber zugleich einleuchtend, dafs in diesem Fall der einfallende Strahl in den untern Theil der Wasserkugel gehen mufs, damit der aus dem obern Theil ausgehende Strahl das tiefer stehende Auge treffen könne. Liegt der Winkel E zwischen 180^0 und 270^0, so durchschneiden sich die Strahlen ebenfalls, aber unter einem stumpfen Winkel. Ist endlich der Winkel zwischen 270^0 und 360^0 enthalten, so durchschneiden sich die Verlängerungen des einfallenden und des ausfahrenden Strahls unter einem stumpfen Winkel.

§. 449.

Die Reihe der Winkel E', E''.... u. s. w. mufs also nach den Bemerkungen des vorigen §. so geschrieben werden:

	Roth.			Violet.		
$E' =$	42°	31'	0"	40°	47'	12"
$E'' =$	50	6	6	53	13	22
$E''' =$	137	9	18	141	32	10
$E^{IV} =$	137	42	48	132	6	48
$E^{V} =$	53	29	26	46	41	32
$E^{VI} =$	30	13	34	38	12	40.

Bezeichnet man die Unterschiede dieser Winkel

Roth weniger Violet

durch Δ', Δ'', Δ'''......, so erhält man

$$\Delta' = +\ 1^\circ\ 43'\ 48''$$
$$\Delta'' = -\ 3\ \ 7\ \ 16$$
$$\Delta''' = -\ 4\ \ 22\ \ 52$$
$$\Delta^{IV} = +\ 5\ \ 36\ \ 0$$
$$\Delta^{V} = +\ 6\ \ 47\ \ 54$$
$$\Delta^{VI} = -\ 7\ \ 59\ \ 6.$$

Das positive Vorzeichen bedeutet, dafs bei dieser Anzahl von Zurückwerfungen das Violet weiter unten sich zeigt, als das Roth. Der umgekehrte Fall wird durch das negative Vorzeichen angedeutet.

§. 450.

Es ist bekannt, dafs, wenn ein Regenbogen entstehen soll, das Auge sich zwischen der Sonne und einer regnenden Wolke befinden mufs. Ein jeder Regentropfen ist als eine kleine Wasserkugel anzusehen, und obgleich selbiger jeden Augenblick im Fallen seine Lage verändert, so wird seine Stelle doch immer durch einen andern ersetzt, und wir dürfen denselben daher als stillstehend betrachten. Da ferner blofs die an der dem Auge zugekehrten äufsersten Grenze befindlichen Regentropfen das Licht hinreichend zurückwerfen können, so werden wir uns eine verticale Ebene vorstellen,

die mit lauter stillstehenden Regentropfen besetzt ist, und von der Sonne beschienen wird. Ferner denken wir uns durch das Auge und den Mittelpunkt der Sonne eine auf dem Horizont senkrecht stehende Ebene gelegt, so schneidet diese Ebene die Regenwand in einer auf dem Horizont senkrecht stehenden Linie, die eine Reihe vertical übereinanderliegender Regentropfen enthalten wird.

§. 451.

Es sey nun, zur Zeit der Erscheinung eines Regenbogens, die Höhe der Sonne über dem Horizont, d. h. der Winkel, den die nach ihrem Mittelpunkt gezogene Gesichtslinie mit dem Horizont bildet, $= H$, die Höhe des Auges über der Horizontalebene $= a$, die Entfernung der Regenwand vom Auge $= e$, die Höhe irgend eines Regentropfens über der Horizontalebene $= x$, der Winkel, welchen die nach diesem Regentropfen gezogene Gesichtslinie mit der Horizontalebene bildet, $= \xi$, so wird erstens

$$\text{tang}\, \xi = \frac{x - a}{e},$$

wo der Winkel ξ, wenn die Tangente positiv ist, zwischen 0 und $+ 90^0$, wenn die Tangente negativ ist, zwischen 0 und $- 90^0$ genommen werden muſs. Zweitens wird noch zwischen den Winkeln H, ξ, E die Relation

$$H + \xi = E$$

Statt finden. Wenn ferner der Beobachter sich nicht auf einem erhöhten Punkte, sondern in der Ebene befindet, so wird man allgemein a gegen x vernachlässigen können, und es würde dann ξ immer positiv. Hieraus folgt, daſs die Höhe der Sonne H höchstens dem Winkel E gleich seyn darf, wo dann die dem Winkel E correspondirende Farbe im Horizont erscheint. Gesetzt nun, die Höhe der Sonne sey kleiner als $40^0\ 47'\ 12''$, welcher Winkel nach voriger Tabelle dem Violet der ersten Zurückwerfung entspricht, und um eine bestimmte Zahl zu haben, setzen wir sie $= 38^0\ 28'\ 11''$,

so erscheint in der Höhe von $2^0\ 19'\ 1''$ das erste violette Bild, und in der Höhe von

$$42^0\ 31'\ 0'' - 38^0\ 28'\ 11'' = 4^0\ 2'\ 49''$$

das erste rothe Bild. Zwischen diesen beiden Höhen liegen die übrigen Farben des Regenbogens, und wenn wir die Brechungsverhältnisse derselben in arithmetischer Proportion wachsen lassen, so erhalten wir folgende Höhen für die verschiedenen Farben

ξ violet	$=$	2^0	$19'$	$1''$
dunkelblau	$=$	2	36	19
blau	$=$	2	53	37
grün	$=$	3	10	55
gelb	$=$	3	28	13
orange	$=$	3	45	31
roth	$=$	4	2	49.

§. 452.

Wenn also bloſs vom Mittelpunkte der Sonne Licht herkäme, so würden sich in den angegebenen Höhen über dem Horizont die verschieden gefärbten Bilder des leuchtenden Punkts zeigen, welche den ersten Regenbogen ausmachen. Nun ist aber die Sonne eine ausgedehnte scheinbar kreisförmige Fläche, von deren jedem Punkt Strahlen ausgehen; es wird also statt dieses einzelnen Bildes von jeder Farbe immer eine unendliche Reihe von Bildern innerhalb eines bestimmten Raumes hervorgebracht werden, und die Werthe von ξ, welche jeder Farbe entsprechen, zwischen denen sie eingeschlossen ist, ergeben sich aus den Gleichungen

$$H - 16' + \xi = E$$
$$H + 16' + \xi = E,$$

indem wir den Halbmesser der Sonne $= 16$ Minuten setzen. Man sieht hieraus, daſs die Breite jeder Farbe dem scheinbaren Durchmesser der Sonne gleich kommt, und daſs die vorhin angeführten Werthe von ξ für die verschiedenen Farben der Mitte jeder Farbe entsprechen. Die Breite des ganzen Regenbogens wird also durch

diesen Umstand auch um den Durchmesser der Sonne vermehrt, indem das Violet schon bei einer Höhe von

$$2^0\,19' - 16' = 2^0\,3'$$

anfängt, das Roth hingegen sich erst bei einer Höhe von

$$4^0\,3' + 16' = 4^0\,19'$$

endigt. Die mittlern Farben werden sich ferner sehr undeutlich zeigen, da sie sich theilweise decken.

§. 453.

Wird die in §. 450. durch das Auge und den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebene um die Linie, welche das Auge mit dem Mittelpunkt der Sonne verbindet, als Axe gedreht, so lassen sich auf die dadurch entstehenden Durchschnitte der Regenwand dieselben Schlüsse anwenden, welche wir bei dem verticalen Durchschnitt auseinandergesetzt haben. Eine jede Linie, welche dann mit der besagten Drehungslinie einen Winkel bildet, der einem der Werthe von E entspricht, wird die correspondirende Farbe haben. Hieraus folgt, dafs alle Gesichtslinien, die vom Auge nach einer und derselben Farbe gezogen werden, auf einer Kegeloberfläche liegen, deren Axe die vom Auge nach dem Mittelpunkt der Sonne gezogene Linie ist. Folglich bilden die Farben des Regenbogens am Himmelsgewölbe Zonen, die von kleinen Kreisen eingeschlossen sind, und deren geometrischer Pol so tief unter der Horizontalebene liegt, als der Mittelpunkt der Sonne sich über derselben befindet.

§. 454.

Diese erste Reihe von Farben, welche nach einmaliger Reflexion der Sonnenstrahlen in den Regentropfen entstehen, bilden den sogenannten Hauptregenbogen, von welchem in manchen Fällen, wo die Regenwand nicht Ausdehnung genug hat, nur ein Stück zu sehen ist. Gewöhnlich zeigt sich aufser diesem ersten Regenbogen noch ein zweiter oder Nebenregenbogen, mit schwächern Farben, welche, in Bezug auf die des

ersten genommen, in umgekehrter Ordnung auf einander folgen. Dieser erklärt sich aus den Werthen von E'', wo §. 449.

$$E'' \text{ roth} = 50^0\ 6'\ 6''$$
$$E'' \text{ violet} = 53\ \ 13\ \ 22$$

gefunden ist. Da hier der Winkel, den die rothen Strahlen mit der Axe des Kegels bilden, kleiner ist, als der der violetten, so liegt der rothe Streifen bei diesem zweiten Regenbogen dem Horizont näher, als der violette, folglich gegen den ersten umgekehrt, welches mit der Beobachtung übereinstimmt. Zieht man die beiden Werthe von E'' von einander ab, und addirt den Durchmesser der Sonne von 32′ hinzu, so kommt die Breite des Nebenregenbogens

$$= 3^0\ 39'\ 16'',$$

während die des ersten $2^0\ 16'$ betrug, also das Verhältnifs beider Breiten ungefähr wie 3 : 2 ist. Das äufserste Roth des ersten Regenbogens bildet einen Winkel

$$E' = 42^0\ 31' + 16',$$

das innerste Roth des zweiten Regenbogens hingegen einen Winkel

$$E'' = 50^0\ 6' - 16',$$

also ist der kleinste Abstand des Nebenregenbogens vom Hauptregenbogen

$$= 7^0\ 3'.$$

§. 455.

Um die Lichtstärke dieser beiden Regenbogen mit einander zu vergleichen, wollen wir annehmen, es werde be ieinem Einfallswinkel $= \varepsilon$ die Lichtmenge p zurückgeworfen, während die einfallende Lichtmenge als Einheit betrachtet wird. Ferner kann man, so viel die Versuche hierüber lehren, wohl annehmen, dafs bei einem Zurückwerfungswinkel θ im Innern der brechenden Materie ebenfalls die Lichtmenge p zurückgeworfen wird, wenn θ und ε durch die Gleichung

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \theta$$

mit einander verbunden sind, wo n das Brechungsverhältniſs der Materie bezeichnet. In den Regentropfen tritt also die Lichtmenge $1 - p$, und der im Innern zurückgeworfene Theil wird $= (1 - p) \cdot p$, also der nach der Zurückwerfung austretende

$$(1 - p) \cdot p - (1 - p) \cdot p^2 = (1 - p)^2 \cdot p.$$

Wird ein Theil von $(1 - p) \cdot p$ nochmals zurückgeworfen, so ist die nach zweimaliger Zurückwerfung übrig bleibende Lichtmenge $= (1 - p) \cdot p^2$, folglich der nach der Zurückwerfung austretende Theil

$$(1 - p) \cdot p^2 - (1 - p) \cdot p^3 = (1 - p)^2 \cdot p^2.$$

Fährt man so weiter fort, so ergiebt sich leicht, daſs allgemein nach m maliger Zurückwerfung die austretende Lichtmenge

$$= (1 - p)^2 \cdot p^m$$

seyn wird.

§. 456.

Für den ersten Regenbogen haben wir (§. 447.)

$$\begin{array}{ll} \text{roth} & \varepsilon = 59^0\ 35'\ 2'' \\ \text{violet} & \varepsilon = 58\ \ 53\ \ 14 \\ \text{Mittel} & \varepsilon = 59\ \ 14\ \ \ 8, \end{array}$$

und für diesen Werth von ε geben **Bouguer's** Versuche über die Zurückwerfung des Lichts vom Wasser $p = \frac{1}{15}$; es wird also für den ersten Regenbogen

$$(1 - p)^2 \cdot p = 0{,}0581.$$

Für den zweiten Regenbogen hat man

$$\begin{array}{ll} \text{roth} & \varepsilon = 71^0.56'.22'' \\ \text{violet} & \varepsilon = 71\ .33\ .10 \\ \text{Mittel} & \varepsilon = 71\ .44\ .46. \end{array}$$

Hierzu gehört nach **Bouguer's** Versuchen der Werth $p = \frac{1}{6}$, also wird für den zweiten Regenbogen

$$(1 - p)^2 \cdot p^2 = 0{,}0193.$$

Das Verhältniſs der Helligkeit wäre also wie 581 : 193 oder wie 3 : 1 *).

*) Es ist noch ein zweiter Grund vorhanden, der den zweiten Regenbogen schwächer erscheinen läſst, als den ersten. Die

§. 457.

Die Theorie zeigt, dafs aufser diesen beiden ersten eine unendliche Menge von Regenbogen noch folgt;

Strahlen nämlich, welche unter einem Einfallswinkel von 59° 35′ einfallen und nach einmaliger Reflection ins Auge gelangen, divergiren weit weniger, als die, welche nahe bei 71° 36′ einfallen und nach zweimaliger Reflection das Auge treffen, so dafs jeder Tropfen des zweiten Regenbogens uns in eben dem Verhältnisse weniger Strahlen zusendet, als diese stärker divergiren, und desshalb weniger hell erscheinen mufs. Um dieses darzuthun, lassen wir in der Gleichung für E

$$E^{(m)} = 2.(m+1).6 - 2\varepsilon,$$

wo $\sin\varepsilon = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - nn}{mm+2m}}$ und $\sin 6 = \frac{1}{n}.\sin\varepsilon$ ist, den Einfallswinkel ε um die unendlich kleine Gröfse $d\varepsilon$ sich ändern, so geht $E^{(m)}$ über in:

$$E^{(m)} + \frac{dE^{(m)}}{d\varepsilon}.d\varepsilon + \frac{ddE^{(m)}}{d\varepsilon^2}.\frac{d\varepsilon^2}{2} + \ldots.$$

und da in unserm Falle $\frac{dE^{(m)}}{d\varepsilon} = o$ ist, so wird die Aenderung von $E^{(m)}$, also die Divergenz der ausfahrenden Strahlen, dem zweiten Differentialcoefficienten $\frac{ddE^{(m)}}{d\varepsilon^2}$ proportional seyn. Nun ist

$$\frac{ddE^{(m)}}{d\varepsilon^2} = 2.(m+1).\frac{dd6}{d\varepsilon^2}$$

$$\frac{d6}{d\varepsilon} = \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{(nn - \sin\varepsilon^2)}}$$

$$\frac{dd6}{d\varepsilon^2} = -\frac{(nn-1).\sin\varepsilon}{\sqrt{(nn-\sin\varepsilon^2)^3}},$$

und substituiren wir den Werth $\sqrt{\left(\frac{(m+1)^2 - nn}{(m+1)^2 - 1}\right)}$ statt $\sin\varepsilon$, so kommt nach gehöriger Reduction

$$\frac{dd6}{d\varepsilon^2} = -\frac{((m+1)^2 - 1).\sqrt{((m+1)^2 - nn)}}{(m+1)^3.\sqrt{(nn-1)}}$$

also

allein dieselben sind zu schwach, um einen Eindruck auf das Auge des Menschen machen zu können. Denn nimmt man z. B. für den dritten Regenbogen $p = \frac{1}{4}$ an, so findet man, daſs seine Helligkeit sich zu der des ersten wie 1 : 21 verhält. Auſserdem ist seine Lage gegen das Auge höchst ungünstig. Für rothe Strahlen ist nämlich $E''' = 135^0\ 34'\ 40''$, also folgt aus der Gleichung

$$H + \xi = E'''$$
$$H = E''' - \xi.$$

Nun kann ξ, der Natur der Sache nach, nicht gröſser als 90^0 werden, also wird H gewiſs gröſser als 45^0 seyn

$$\frac{ddE^{(m)}}{d\xi^2} = - \frac{2.((m+1)^3 - 1).\sqrt{((m+1)^2 - nn)}}{(m+1)^2.\sqrt{(nn-1)}}.$$

Die Lichtstärke des Regenbogens, der durch m malige Reflection entsteht, wird also dieser Gröſse umgekehrt proportional seyn, insofern sie von der Divergenz der Strahlen herrührt, und da die Stärke der Strahlen, die zu uns gelangen (§. 455.), $= (1-p)^2.p^m$ ist, so haben wir die Lichtstärke

$$L^{(m)} \quad \frac{(1-p)^2.p^m.(m+1)^2}{((m+1)^2 - 1).\sqrt{((m+1)^2 - nn)}}.$$

Also ist für den ersten Regenbogen

$$L' = \frac{4.(1-p)^2.pp}{3.\sqrt{(4-nn)}},$$

für den zweiten

$$L'' = \frac{9.(1-p)^2.p^3}{8.\sqrt{(9-nn)}},$$

für den dritten

$$L''' = \frac{16.(1-p)^2.p^4}{15.\sqrt{(16-nn)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Nehmen wir für p die im Texte angegebenen Werthe, und setzen für die mittlern Strahlen $n = 1.336$, so ist

$$L' = 0.05203$$
$$L'' = 0.00808$$
$$L''' = 0.00249.$$

Der erste Regenbogen ist also etwa $6\frac{1}{2}$ mal so hell, als der zweite, und 21 mal so hell, als der dritte. G.

müssen, wenn dieser dritte Regenbogen erscheinen soll, der dem Zenith dann sehr nahe liegt. Allein bei einem solchen Werth von H ist der erste Regenbogen gar nicht sichtbar, und der zweite liegt auch ganz nahe am Horizont, wo man dann, da die Aufmerksamkeit durch das Erscheinen des Regenbogens nicht aufgeregt ist, nicht eben auf den Gedanken gerathen wird, den dritten aufzusuchen, wenn seine Lichtstärke auch wohl noch im Stande wäre, einen Eindruck im Auge hervorzubringen.

Von den achromatischen Glaslinsen.

§. 458.

Vernachlässigt man in den Gleichungen des Weges eines Lichtstrahls durch eine Glaslinse die Potenzen der Winkel, so wie die Dicke der Glaslinse, so hat man nach §. 379. die Gleichungen

$$1)\quad \varphi = \frac{r}{h} \cdot \theta$$

$$2)\quad \varphi' = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \theta$$

$$3)\quad \theta' = \frac{r}{\varrho} \cdot \theta$$

$$4)\quad \varphi'' = \left(n - 1 - \frac{r}{h}\right) . \theta + \frac{(n-1) . r}{\varrho} \cdot \theta$$

$$5)\quad k = \frac{hr\varrho}{h . (r + \varrho) . (n - 1) - r\varrho} .$$

Wenn nun n das Brechungsverhältniſs für die mittlern Strahlen bedeutet, d. h. für diejenigen, für welche das Brechungsverhältniſs das arithmetische Mittel aus dem gröſsten und kleinsten Brechungsverhältniſs ist, und welches meistentheils mit dem der grünen Strahlen zusammen fällt, so kann man fragen, welche Veränderungen

die Gröſsen φ', θ'.... erleiden, indem das Brechungsverhältniſs sich um δn ändert. Da man diese Veränderungen alle als sehr klein betrachten kann, indem δn selbst sehr klein ist, so wird man diese Gröſsen als Differentiale ansehen können, und man erhält

$$\delta\varphi' = \theta \,.\, \delta n \,.\, \frac{h + r}{hnn}$$

$$\delta\varphi'' = \theta \,.\, \delta n \,.\, \frac{r + \varrho}{\varrho}$$

$$\delta k = - \frac{hhr\varrho\delta n \,.\, (r + \varrho)}{(h \,.\, (r + \varrho) \,.\, (n - 1) - r\varrho)^2}.$$

Der letzte Ausdruck giebt auch noch, wenn auf beiden Seiten mit kk dividirt wird,

$$\frac{\delta k}{kk} = - \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho}.$$

Wenn also auf einen Punkt der Vorderfläche eines Glases ein Lichtstrahl auffällt, so wird dieser Strahl in sieben andere zerlegt, die die Axe nach erlittener doppelter Brechung ebenfalls in verschiedenen Punkten schneiden. Ist nun k die Sammlungsweite für die mittlern Strahlen, so wird für die am stärksten brechbaren oder violetten die Sammlungsweite

$$= k - \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk;$$

für die am wenigsten brechbaren oder rothen wird die Sammlungsweite

$$= k + \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk.$$

Bezeichnet man die Brennweite des Glases für die mittlern Strahlen durch f, so hat man die Gleichung

$$f = \frac{r\varrho}{(n - 1) \,.\, (r + \varrho)},$$

und wenn man das Zerstreuungsverhältniſs (§. 443.) $\frac{dn}{n - 1} = \delta\nu$ setzt, so hat man auch

$$\delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk = \frac{kk}{f} \cdot \delta\nu.$$

Diese Gröfse wird die Längenabweichung der Strahlen, wegen der Farbenzerstreuung, genannt, vorausgesetzt, dafs $\delta\nu$ das Zerstreuungsverhältnifs für die äufsersten Strahlen bedeutet. Für unendlich entfernte Gegenstände wird die Längenabweichung $= f\delta\nu$.

§. 459.

Der Abstand des Punktes von der Axe, auf welchen der Strahl einfällt, sey $= t$, so ist bekanntlich $t = r.\theta$, und die Gleichung des rothen Strahls wird

$$y - t = -\frac{ft}{kf + kk\delta\nu}\cdot x.$$

Auf gleiche Weise erhält man die Gleichung des violetten Strahls, welcher von einem Punkt des Glases herkommt, der den Abstand $-t$ von der Axe hat, also eben so weit unterhalb der Axe liegt, als ersterer sich über der Axe befand,

$$y + t = \frac{ft}{kf - kk\delta\nu}\cdot x.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so bleibt

$$2 = \frac{fx}{kf - kk\delta\nu} + \frac{fx}{kf + kk\delta\nu},$$

und hieraus ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Potenzen von $\delta\nu$, $x = k$, also wird die Abscisse des Durchschnittspunktes gleich der Sammlungsweite der mittlern Strahlen. Substituirt man diesen Werth von x in eine der beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$y = \pm\frac{tk}{f}\cdot\delta\nu.$$

Diese Ordinate y wächst mit t; bezeichnet also t den gröfsten Werth des Abstandes von der Axe, oder die halbe Oeffnung des Glases, so erreicht y seinen gröfsten Werth für einen Randstrahl, und man nennt dann den Ausdruck $\frac{tk}{f}\cdot\delta\nu$ die Seitenabweichung wegen der Farbenzerstreuung. Zugleich sieht man, dafs die

Seitenabweichung erhalten wird, indem die Längenabweichung mit dem Quotienten $\frac{t}{k}$ multiplicirt wird.

§. 460.

Beschreibt man mit der Seitenabweichung $\frac{tk}{f} \cdot \delta v$ einen Kreis, der senkrecht auf der Axe steht, und dessen Fläche der des Glases parallel liegt, so wird dieser der Abweichungskreis genannt. Nun sey $T < t$, $\Delta v < \delta v$, so wird die Gleichung eines Strahls, welcher im Abstand T von der Axe auffällt, und dessen Zerstreuungsverhältniſs durch Δv ausgedrückt wird,

$$y - T = - \frac{fT}{kf + kk\Delta v} \cdot x.$$

Setzt man hierin $x = k$, so wird

$$y = \frac{Tk}{f} \cdot \Delta v.$$

Dieser Werth von y drückt die Entfernung von der Axe aus, in welcher der Strahl den Abweichungskreis trifft, und da das Product $T\Delta v$ mit T und Δv zugleich wächst, so wird dieser Werth von y immer kleiner ausfallen, als die Seitenabweichung, also werden alle Strahlen, die auf das Glas fallen, durch diesen Abweichungskreis gehen. Der Winkel endlich, welchen der mittlere Randstrahl mit dem violetten oder rothen bildet, wird der Abweichungswinkel genannt, und sein Werth ergiebt sich aus der Gleichung (§. 458.)

$$\delta\varphi'' = \theta\delta n \cdot \frac{r + \varrho}{\varrho}.$$

Man kann diese Gleichung noch etwas anders schreiben, indem man bemerkt, daſs

$$r\theta = t, \quad \frac{r\varrho}{r + \varrho} = (n - 1) . f$$

$$\frac{dn}{n - 1} = dv$$

ist, und es ergiebt sich dann

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{f} \cdot \delta v.$$

Da in diesem Ausdruck weder h noch k vorkommt, so folgt hieraus, daſs der Abweichungswinkel gar nicht von der Entfernung des Objects vom Glase abhängt.

§. 461.

Um nun die Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung durch mehrere Gläser zu finden, nehme man zuerst zwei Gläser, deren Brechungsverhältnisse n, n' sind, und deren Zerstreuungsverhältnisse $\frac{dn}{n-1}$, $\frac{dn'}{n'-1}$ durch dv, dv' bezeichnet werden. Man hat dann nach §. 403. die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$k + h' = l.$$

Da nun h und l hierin unveränderlich sind, so hat man durch Differentiation dieser Gleichungen, indem statt des Zeichens d, das Zeichen δ gebraucht wird,

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'}$$

$$\delta k + \delta h' = o.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen δk, $\delta h'$, so bleibt

$$\frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'} + \frac{\delta f}{ff} \cdot \frac{kk}{h'h'}.$$

Sind nun die Halbmesser der Krümmungen des ersten Glases r, ϱ, die des zweiten r', ϱ', so sind die Brennweiten f, f'

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)}$$

$$f' = \frac{r'\varrho'}{(n'-1).(r'+\varrho')},$$

also, wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt,

$$\log f = \log \frac{r\varrho}{r + \varrho} - \log (n - 1)$$

$$\log f' = \log \frac{r'\varrho'}{r' + \varrho'} - \log (n' - 1).$$

Differentiirt man diese Gleichungen, indem man δ statt d setzt, und bemerkt, dafs die Gröfsen r, ϱ, r', ϱ' unveränderlich sind, so kommt

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{\delta n}{n - 1} = -\delta \nu$$

$$\frac{\delta f'}{f'} = -\frac{\delta n'}{n' - 1} = -\delta \nu'.$$

Folglich läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\delta k' = -k'k' . \left(\frac{\delta \nu'}{f'} + \frac{\delta \nu}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'}\right).$$

§. 462.

Für drei Gläser hat man die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''},$$

$$k + h' = l,$$

$$k' + h'' = l',$$

also, wenn man diese Ausdrücke differentiirt,

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'}$$

$$\frac{\delta h''}{h''h''} + \frac{\delta k''}{k''k''} = \frac{\delta f''}{f''f''}$$

$$\delta k + \delta h' = o, \quad \delta k' + \delta h'' = o.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen δk, $\delta h'$, $\delta k'$, $\delta h''$, so bleibt

$$\frac{\delta k''}{k''k''} = \frac{\delta f''}{f''f''} + \frac{\delta f'}{f'f'} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} + \frac{\delta f}{ff} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} \cdot \frac{kk}{h'h'}.$$

Bemerkt man nun, daſs

$$\delta f = - f\delta v, \quad \delta f' = - f'\delta v', \quad \delta f'' = - f''\delta v'',$$

so erhält man auch

$$\delta k'' = - k''k'' \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta v''}{f''} + \frac{\delta v'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} \\ &+ \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} \end{aligned} \right\}$$

Man sieht aus der Bildung dieser Ausdrücke leicht, wie diese Formeln bei einer noch gröſsern Anzahl von Gläsern beschaffen seyn würden. So erhielte man z. B. bei vier Gläsern

$$\delta k''' = - k'''k''' \left\{ \begin{aligned} &\frac{\delta v'''}{f'''} + \frac{\delta v''}{f''} \cdot \frac{k''k''}{h'''h'''} \\ &+ \frac{\delta v'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} \cdot \frac{k''k''}{h'''h'''} \\ &+ \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'} \cdot \frac{k'k'}{h''h''} \cdot \frac{k''k''}{h'''h'''} \end{aligned} \right\}$$

Alle einzelnen Glieder der in den Parenthesen eingeschlossenen Ausdrücke sind positiv, solange die Brennweiten der in Betracht gezogenen Glaslinsen positiv sind, folglich wird die Längenabweichung durch mehrere Gläser, wenn sie erhaben sind, immer gröſser, je gröſser die Anzahl der Gläser ist. Soll daher die Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung vermittelst der Zusammensetzung von mehreren Glaslinsen aufgehoben, d. h. δk Null werden, so muſs wenigstens eine Brennweite negativ seyn.

§. 463.

Bleiben wir z. B. bei zwei Gläsern stehen, so ist

$$\delta k' = - k'k' \left[\frac{\delta v'}{f'} + \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'}\right],$$

und wenn die Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung durch zwei Gläser aufgehoben werden soll, so muſs

$$\frac{\delta v'}{f'} + \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'} = o$$

seyn. Nun ist aber auch noch

$$k = \frac{hf}{h - f}$$

$$h' = \frac{l.(h - f) - hf}{h - f},$$

folglich, wenn man diese Werthe von k und h' in vorige Gleichung substituirt,

$$\frac{\delta v'}{f'} \cdot [l.(h - f) - hf]^2 + \delta v . hhf = o.$$

Werden diese beiden Gläser so nahe zusammen gestellt, daſs ihre gegenseitige Entfernung l, rücksichtlich der Brennweiten f, f', als verschwindend betrachtet werden kann, so ist $l = o$, und es bleibt

$$\frac{\delta v'}{f'} \cdot f + \delta v = o,$$

wo die Entfernung h des Gegenstandes ganz herausgefallen ist. Es ergiebt sich hieraus $f' = - f \cdot \frac{\delta v'}{\delta v}$.

Wenn nun, nach Newton's irriger Ansicht, die Zerstreuungsverhältnisse aller brechenden Materien gleich wären (§. 442.), so hätte man $\delta v' = \delta v$, also $f' = - f$. Dann erhält man aber auch statt der drei Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

$$k + h' = l,$$

diese anderen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = - \frac{1}{f}$$

$$k + h' = o,$$

und hieraus erhielte man in allen Fällen $h + k' = o$, d. h. das Bild würde mit dem Gegenstande zusammen-

fallen, oder die Strahlen würden durch diese Zusammensetzung von Gläsern ganz ungebrochen durchgehen. Es würde also in diesem Fall völlig unmöglich seyn, Fernröhre zu verfertigen, in denen die Bilder achromatisch wären. Da wir aber in der That die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = -\frac{\delta\nu}{f\delta\nu'}$$

$$k + h' = o$$

haben, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{h} - \frac{\delta\nu}{f\delta\nu'}.$$

Ist die Entfernung h sehr groſs, so bleibt bloſs

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f}\cdot\left(\frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}\right).$$

Da nun hierbei verlangt wird, daſs sich das Bild hinter dem Glase befinde, so muſs k' positiv seyn, also, wenn die Brennweite des ersten Glases als positiv betrachtet wird, so muſs $\delta\nu' > \delta\nu$ werden, d. h. dasjenige Glas, welches die negative Brennweite besitzt, muſs aus der Materie bestehen, welche das stärkste Zerstreuungsverhältniſs hat.

§. 464.

Wir wollen annehmen, die Entfernung, auf welche die Zusammensetzung zweier Gläser ein Bild eines unendlich entfernten Gegenstandes darstelle, betrage

$$k' = 5 \text{ Fuſs}.$$

Besteht das vordere Glas aus Kronglas, und das hintere aus Flintglas, so hat man die Werthe

$$n = 1{,}515162;$$
$$\delta n = 0{,}010814;$$
$$n' = 1{,}601770;$$
$$\delta n' = 0{,}019960;$$

Hieraus erhält man die Zerstreuungsverhältnisse

$$\delta\nu = 0{,}020991$$
$$\delta\nu' = 0{,}033169,$$

also vermöge der Formeln

$$f = k' \cdot \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}$$

$$f' = -k' \cdot \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu},$$

die numerischen Werthe der Brennweiten

$$f = +1{,}835761$$
$$f' = -2{,}900705.$$

Nimmt man nun an, die beiden Gläser besitzen auf beiden Seiten gleiche Krümmung, so ist

$$r = \varrho = 2f.(n-1)$$
$$r' = \varrho' = 2f'.(n'-1),$$

folglich die Zahlenwerthe der Krümmungshalbmesser

$$r = \varrho = +1{,}891428$$
$$r' = \varrho' = -3{,}491114.$$

Nach §. 385. erhält man die Dicke des Glases, wenn beide Krümmungshalbmesser einander gleich sind,

$$c = 4r.\sin\tfrac{1}{2}\theta^2,$$

und nimmt man $\theta = 6^0$ an, so wird die Dicke des ersten convexen Glases $c = 0{,}020732$ *); die Dicke des concaven Glases ist willkürlich, und wir wollen dieselbe $= 0{,}010366$ setzen. Da die Krümmung des convexen Glases stärker, als die des concaven ist, so darf man beide Gläser in der Mitte aneinander gelegt denken, so daſs also der Abstand der Vorderfläche des zweiten von der Hinterfläche des ersten Null wird.

§. 465.

Um nun zu sehen, wie weit diese genäherten Formeln von den genauen, wo die Dicke des Glases mit berücksichtigt wird, abweichen, nehmen wir die Glei-

*) Der hier angegebene Werth von c ist nicht ganz richtig, gehörig berechnet findet sich $c = 0.020723$, da die Differenz so gering ist, so hat man für unnöthig gehalten, den wahren Werth in die folgenden Rechnungen einzuführen, um so mehr, da durch eine Aenderung von $\theta = 6^0$ in $\theta = 6^0\,4''$ der im Texte angegebene Werth von c hervorgeht. G.

chung für k aus §. 379. für Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen. Man hat daselbst

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1)-r)}.$$

Setzt man hierin zuerst $h = \infty$, so wird

$$k = \frac{nr\varrho - c\varrho.(n-1)}{(r+\varrho).n.(n-1) - c.(n-1)^2},$$

und da außerdem $r = \varrho$ angenommen wurde, so bleibt für ein auf beiden Seiten gleichgekrümmtes convexes Glas

$$k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{nr - c.(n-1)}{2n - \frac{c}{r}\cdot(n-1)},$$

oder, wenn man statt r seinen Werth $2f.(n-1)$ setzt,

$$k = \frac{2nf - c}{2n - \frac{c}{2f}}.$$

Man hat nun aber

$$f = +\,1{,}835761,$$

und für die mittlern Strahlen das Brechungsverhältniſs im Kronglas

$$n = 1{,}515162$$
$$2nf - c = 5{,}542217$$
$$\log\,(2nf - c) = 0{,}7436835$$
$$2n - \frac{c}{2f} = 3{,}024677$$
$$\log\left(2n - \frac{c}{2f}\right) = 0{,}4806790$$
$$\log k = 0{,}2630045$$
$$k = 1{,}832334.$$

Für die violetten Strahlen ist

$$n = 1{,}525976,$$

und wenn man sich in diesem Fall der Gleichung

$$k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{nr - c.(n-1)}{2n - \frac{c}{r}\cdot(n-1)}$$

bedient, und außer dem angegebenen Werth von n

$$r = 1{,}891428$$
$$c = 0{,}020732$$

setzt, so erhält man

$$nr - c.(n-1) = 2{,}875368$$

$$2n - \frac{c}{r}\cdot(n-1) = 3{,}046187$$

$$k = 1{,}794617.$$

Man sieht, daſs die beiden Werthe von k für die mittlern und für die violetten Strahlen ziemlich von einander abweichen, wenn man ihren Weg bloſs durch ein Glas von den angegebenen Dimensionen sucht. Der Unterschied beider Werthe von k beträgt nämlich 0,037717, welches die Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung seyn würde, und wobei, wie in allen vorigen Rechnungen, der Fuſs als Einheit betrachtet wurde. Nach der abgekürzten Formel $\delta k = f\delta v$ würde man die Längenabweichung = 0,038535, also nur um 0,000818 gröſser erhalten haben.

§. 466.

Diese für die mittlern und violetten Strahlen gefundenen Werthe von k geben den Abstand der correspondirenden Farbenbilder von der hintern Seite des vordern Glases an. Diese Bilder können nun freilich nicht wirklich zur Darstellung kommen, weil das hinter dem convexen Glase liegende concave Glas die Strahlen sogleich wieder bricht. Allein zur Berechnung der Entfernung der Bilder hinter dem zweiten Glase sind diese Werthe zu wissen nothwendig. Nimmt man nämlich die Gleichung

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{h.(r+\varrho).(n-1).n - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1)-r)},$$

und setzt in derselben $-k$, n', $-r'$, c' statt h, n, r und ϱ, c, so wird

$$k' = -\frac{kn'r' + c'.(k.(n'-1) - r')}{2kn'.(n'-1) - n'r' + \frac{c'}{r'}.(n'-1).(k.(n'-1)-r')},$$

und dieser Werth von k' giebt dann die Abstände der verschiedenen Bilder vom zweiten Glase. Man hat für die mittlern Strahlen

$$k = 1{,}832334$$
$$n' = 1{,}601770$$
$$r' = 3{,}491114$$
$$c' = 0{,}010366,$$

und hieraus ergiebt sich

$$kn'r' = 10{,}246343$$
$$n'r' = 5{,}591961$$
$$2kn'.(n'-1) = 3{,}532363$$
$$c'.(k.(n'-1)-r') = -0{,}024759$$
$$\frac{c'}{r'}\cdot(n'-1).(k.(n'-1)-r') = -0{,}004268$$
$$k' = +4{,}952638.$$

Für die violetten Strahlen finden folgende Werthe Statt:

$$k = 1{,}794617$$
$$n' = 1{,}621730$$
$$r' = 3{,}491114$$
$$c' = 0{,}010366,$$

und man findet hieraus

$$kn'r' = 10{,}160477$$
$$n'r' = 5{,}661643$$
$$2kn'.(n'-1) = 3{,}618946$$
$$c'.(k.(n'-1)-r') = -0{,}024622$$
$$\frac{c'}{r'}\cdot(n'-1).(k.(n'-1)-r') = -0{,}004385$$
$$k' = +4{,}951367.$$

Diese beiden Werthe von k' für die mittlern und violetten Strahlen weichen nur sehr wenig von einander ab: der ganze Unterschied beträgt 0,001267 Fuſs, d. h. noch nicht den fünften Theil einer Linie, um welche Gröſse der Sammlungspunkt der violetten Strahlen dem Glase näher liegt, als der der mittlern Strahlen, und es ist hieraus einleuchtend, daſs, trotz der Vernachlässigung der Dicke der Gläser und aller Potenzen der Zerstreuungsverhältnisse, die genäherten Formeln ziemlich genaue Resultate geben.

Da in dem Fall, wo die mittlern und äuſsersten violetten oder äuſsersten rothen Strahlen in einem Punkt vereinigt werden, auch die übrigen Strahlen sich äuſserst

nahe in demselben Punkt schneiden, so entsteht daselbst ein farbloses Bild, und man nennt eine so zusammengesetzte Glaslinse, die dies hervorzubringen im Stande ist, eine achromatische Glaslinse.

§. 467.

Was die Winkelabweichung betrifft, so haben wir dieselbe in §. 460. für ein Glas $= \frac{t}{f} \cdot \delta\nu$ gefunden. Aus §. 404. hat man ferner, wenn t die Entfernung von der Axe bedeutet, in welcher ein Strahl auffällt, und t', t'', t''' dieselben Gröfsen für die folgenden Gläser angeben, wenn man die abwechselnden Vorzeichen unberücksichtigt läfst,

$$t' = \frac{h'}{k} \cdot t;$$

$$t'' = \frac{h'h''}{k'k} \cdot t;$$

$$t''' = \frac{h'h''h'''}{kk'k''} \cdot t;$$

u. s. w. Nennt man nun die Winkel, unter welchen der Strahl die Axe schneidet, φ'', $\varphi_{,}''$, $\varphi_{,,}''$, so hat man

$$t' = h'\varphi'', \quad t'' = h''\varphi_{,}'', \quad t''' = h'''\varphi_{,,}''$$

u. s. w., also kann man die obigen Gleichungen auch so schreiben:

$$\varphi'' = \frac{t}{k}$$

$$\varphi_{,}'' = \frac{h'}{k'} \cdot \frac{t}{k}$$

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h'h''}{k'k''} \cdot \frac{t}{k},$$

wo man das Gesetz der Fortschreitung für eine beliebige Anzahl von Gläsern sogleich übersieht. Dafs die Gläser hinter dem ersten eine hinreichende Oeffnung haben, um die Strahlen durchzulassen, wird hierbei nothwendig vorausgesetzt.

Die erste Gleichung giebt, durch Differentiation,

$$\delta\varphi'' = -\frac{t\delta k}{kk},$$

oder da

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff} = -\frac{\delta v}{f} \text{ (§. 461.)},$$

so folgt hieraus die schon entwickelte Formel der Winkelabweichung durch ein einzelnes Glas

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{f} \cdot \delta v.$$

§. 468.

Nimmt man den Ausdruck für zwei Gläser

$$\varphi_{\prime}'' = \frac{h'}{k'} \cdot \frac{t}{k},$$

so wird auch, wenn man sich der Logarithmen bedient, und den logarithmischen Ausdruck nach dem Zeichen δ differentiirt,

$$\frac{\delta\varphi_{\prime}''}{\varphi_{\prime}''} = \frac{\delta h'}{h'} - \frac{\delta k'}{k'} - \frac{\delta k}{k}.$$

Nun ist aber auch, nach §. 461.,

$$\frac{\delta k}{kk} = -\frac{\delta v}{f}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = -\frac{\delta v'}{f'}$$

$$\delta k + \delta h' = o.$$

und hieraus ergiebt sich

$$\frac{\delta k}{k} = -\frac{k\delta v}{f}, \quad \frac{\delta h'}{h'} = +\frac{kk\delta v}{fh'}$$

$$\frac{\delta k'}{k'} = -\frac{k'\delta v'}{f'} - \frac{k'kk\delta v}{fh'h'},$$

also, wenn man diese Werthe in obige Gleichung substituirt,

$$\frac{\delta\varphi_{,}''}{\varphi_{,}''} = \frac{k k \delta v}{f h'} + \frac{k' \delta v'}{f'} + \frac{k' k k}{f h' h'} \cdot \delta v$$

$$+ \frac{k \delta v}{f}$$

$$= \frac{k \delta v}{f} \cdot \left(1 + \frac{k}{h'} + \frac{k k'}{h' h'}\right) + \frac{k' \delta v'}{f'}$$

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{t h' \delta v}{f k'} \cdot \left(1 + \frac{k}{h'} + \frac{k k'}{h' h'}\right) + \frac{t h'}{f' k} \cdot \delta v'.$$

Da bei der Winkelabweichung vorzüglich der Fall zu betrachten ist, in welchem die ausfahrenden mittlern Strahlen der Axe parallel sind, wie dies z. B. bei den Oculargläsern der Fernröhre geschieht, d. h. daſs das Bild hinter dem letzten Glase unendlich entfernt liegt, so setzen wir in voriger Gleichung die Gröſse $k' = \infty$, und es bleibt

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{k}{h'} \cdot \frac{t}{f} \cdot \delta v + \frac{h'}{k} \cdot \frac{t}{f'} \cdot \delta v$$

$$= \frac{t k}{h'} \cdot \left[\frac{\delta v}{f} + \frac{h' h'}{k k} \cdot \frac{\delta v'}{f'}\right].$$

§. 469.

Um die Winkelabweichung durch drei Gläser zu erhalten, haben wir die Gleichung (§. 467.)

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h' h''}{k' k''} \cdot \frac{t}{k},$$

oder auch

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h''}{k''} \cdot \varphi_{,}''.$$

Hieraus ergiebt sich, durch Differentiation nach dem Zeichen δ,

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}'' \cdot \left(\frac{\delta h''}{k''} - \frac{h'' \delta k''}{k'' k''}\right)$$

$$+ \delta\varphi_{,}'' \cdot \frac{h''}{k''}.$$

Beschränken wir uns wieder auf den Fall, wo die Strahlen durch das letzte Glas mit der Axe parallel ausgehen, so können wir das in $\delta\varphi_{,}''$ multiplicirte Glied

sogleich weglassen, da selbiges auf jeden Fall, wegen des Divisors $k'' = \infty$, Null wird. Es bleibt also

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}'' \cdot \left(\frac{\delta h''}{k''} - \frac{h''\delta k''}{k''k''}\right).$$

Vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''}$$

haben wir aber

$$\frac{\delta h''}{h''h''} + \frac{\delta k''}{k''k''} = \frac{\delta f'}{f''f''} = -\frac{\delta v''}{f''},$$

also, wenn man das Glied $\frac{h''\delta k''}{k''k''}$ aus voriger Gleichung eliminirt,

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}'' \cdot \left[\frac{\delta h''}{k''} + \frac{\delta h''}{h''} + \frac{h''\delta v''}{f''}\right].$$

Es ist aber auch

$$\frac{\delta h''}{k''} + \frac{\delta h''}{h''} = \frac{\delta h''}{f''},$$

folglich

$$\delta\varphi_{,,}'' = \frac{\varphi_{,}''}{f''} \cdot (\delta h'' + h''\delta v'').$$

Es kommt jetzt bloſs darauf an, die Gröſse $\delta h''$ zu eliminiren. Hierzu haben wir die Gleichungen

$$k + h' = l, \quad k' + h'' = l'$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{k'} + \frac{1}{h'} = \frac{1}{f'}.$$

Diese geben differentiirt

$$\delta k + \delta h' = o, \quad \delta k' + \delta h'' = o$$

$$\frac{\delta k}{kk} = -\frac{\delta v}{f}, \quad \frac{\delta k'}{k'k'} + \frac{\delta h'}{h'h'} = -\frac{\delta v'}{f'}.$$

Man findet hieraus

$$\delta h'' = \frac{\delta v'}{f'} \cdot k'k' + \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{k'k'}{h'h'} \cdot kk$$

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}''h'' \cdot \left[\frac{\delta v''}{f''} + \frac{\delta v'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{h''f''} + \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{k'k'}{h'h'} \cdot \frac{kk}{h''f''}\right].$$

Da nun aber für $k'' = \infty$, $f'' = h''$ wird, so läſst sich dieser Ausdruck auch so schreiben:

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}'' h''.\left[\frac{\delta v''}{f''} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{k'k'}{h''h''} + \frac{\delta v}{f}\cdot\frac{k'k'}{h''h''}\cdot\frac{kk}{h'h'}\right],$$

oder, wenn man den Coefficienten von $\frac{\delta v}{f}$ absondert,

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}'' h''.\left[\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk} + \frac{\delta v''}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\right]\cdot\frac{k'k'}{h''h''}\cdot\frac{kk}{h'h'}.$$

Setzt man ferner statt $\varphi_{,}''$ seinen Werth

$$\varphi_{,}'' = \frac{h'}{k'}\cdot\frac{t}{k},$$

so bleibt die Gleichung

$$\delta\varphi_{,,}'' = \frac{kk'}{h'h''}\cdot t\cdot\left[\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk} + \frac{\delta v''}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

§. 470.

Aus den Formeln, welche die Winkelabweichung für zwei und drei Glaslinsen angeben, sieht man leicht, wie dieselbe bei einer noch gröſsern Anzahl beschaffen seyn wird, vorausgesetzt, daſs die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit aus dem letzten Glase parallel ausgehen. Für vier Gläser wird

$$\delta\varphi_{,,,}'' = \frac{kk'k''}{h'h''h'''}\cdot t\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk}\\ + \frac{\delta v''}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\\ + \frac{\delta v'''}{f'''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\cdot\frac{h'''h'''}{k''k''}\end{array}\right\}$$

u. s. w. Die Längenabweichungen lassen sich auch so schreiben:

$$\delta k' = -\frac{kk}{h'h'}\cdot k'k'.\left[\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk}\right]$$

$$\delta k'' = -\frac{kk}{h'h'}\cdot\frac{k'k'}{h''h''}\cdot k''k''.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk}\\ + \frac{\delta v''}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\end{array}\right\}$$

u. s. w. fort, und vergleicht man diese Ausdrücke mit denen der Winkelabweichungen, so erhält man sogleich

$$\delta\varphi'' = -\delta k \cdot \frac{t}{kk}$$

$$\delta\varphi_{,}'' = -\delta k' \cdot \frac{h't}{k} \cdot \frac{1}{k'k'}$$

$$\delta\varphi_{,,}'' = -\delta k'' \cdot \frac{h'h''}{kk'} \cdot \frac{t}{k''k''}$$

u. s. w. fort. Das hierbei Statt findende Gesetz ist leicht zu übersehen.

§. 471.

Für die stärker brechenden Strahlen sind die Gröfsen $\delta\nu$, $\delta\nu'$, $\delta\nu''$.... positiv, und wenn zugleich die Brennweiten f, f', f''.... aller Gläser positiv sind, so wird ebenfalls die Winkelabweichung positiv. In diesem Fall bilden also die gebrochenen Strahlen, welche eine stärkere Brechbarkeit besitzen, als die mittlern, einen gröfsern Winkel mit der Axe, und schneiden daher die Axe hinter dem letztern Glase unter einem Winkel, der der Winkelabweichung selbst gleich kommt, während die rothen die Axe unter demselben Winkel vor dem Glase schneiden. Bezeichnen wir nun die Entfernung, in welcher die Axe hinter dem Glase von den violetten Strahlen geschnitten wird, durch K, die Oeffnung des Glases, welches wir für das nte annehmen, durch $t^{(n-1)}$, die Winkelabweichung durch $\delta\varphi''(n-1)$, so hat man die Gleichung

$$K = t^{(n-1)} . \cot \delta\varphi''_{(n-1)},$$

oder, da wir statt der Cotangente eines so kleinen Winkels das Umgekehrte des Winkels selbst setzen können,

$$K = \frac{t^{(n-1)}}{\delta\varphi''_{(n-1)}}.$$

Nun wird aber allgemein

$$\delta\varphi''_{(n-1)} = \frac{k . k' . k'' . k''' k^{(n-2)}}{h' . h'' . h''' . h^{\text{iv}} h^{(n-1)}} \cdot t \cdot P,$$

wo man leicht sieht, was der Factor P bedeutet, und

aufserdem hat man §. 404., ohne Berücksichtigung des Vorzeichens,

$$t^{(n-1)} = \frac{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}} \cdot t.$$

Substituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, so kommt

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}\right)^2 . P.$$

Diese Gröfse $\frac{1}{K}$ pflegt man gewöhnlich als das Maafs der Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung anzusehen. Für ein Glas hat man

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta v}{f}.$$

Für zwei Gläser kommt

$$\frac{1}{K} = \frac{kk}{h'h'} \cdot \left(\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'} \cdot \frac{h'h'}{kk}\right).$$

§. 472.

Bei den ältern Fernröhren, wo man die Anwendung verschiedener Glasarten von ungleicher Zerstreuungskraft noch nicht kannte, mufste diese Winkelabweichung der verschieden gefärbten Strahlen nothwendigerweise grofse Undeutlichkeit hervorbringen, und um für verschiedene Fernröhre bei gleicher Deutlichkeit bestimmte Vergröfserungen zu erhalten, mufsten die Brennweiten der Objectivgläser in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen. Nehmen wir z. B. zwei Gläser, aus denen das Fernrohr bestehen soll, und sind die Glaslinsen aus derselben Glasart gemacht, wodurch $n = n'$, $\delta n = \delta n'$, also auch $\delta v = dv'$ wird, so hat man das Maafs der Undeutlichkeit

$$\frac{1}{K} = \frac{kk}{h'h'} \cdot \delta v \cdot \left[\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \cdot \frac{h'h'}{kk}\right].$$

Da die durch Fernröhre betrachteten Gegenstände gewöhnlich eine sehr grofse Entfernung haben, so ist

$k = f$, und da ferner, wenn die mittleren Strahlen parallel ausfahren sollen, die Brennpunkte beider Gläser zusammenfallen müssen, so wird $h' = f'$, also

$$\frac{1}{K} = \frac{ff}{f'f'} \cdot \delta\nu \cdot \left[\frac{1}{f} + \frac{f'}{ff}\right]$$
$$= \delta\nu \cdot \left[\frac{f}{f'f'} + \frac{1}{f'}\right].$$

Die Vergröſserung m wird bei einer solchen Zusammensetzung von Gläsern, wenn das Auge vermittelst paralleler Strahlen deutlich sieht, $m = \frac{f}{f'}$, also $f' = \frac{f}{m}$, und substituirt man diesen Werth in vorige Gleichung, so ist

$$\frac{1}{K} = \delta\nu \cdot \left[\frac{mm}{f} + \frac{m}{f}\right] = \delta\nu \cdot \frac{m.(m + 1)}{f}.$$

Nach Huyghens's Angabe ist zu einer 109maligen Vergröſserung ein einfaches Glas von 30 Fuſs Brennweite erforderlich, und nehmen wir an, die gebrauchte Glasart habe dasselbe Zerstreuungsverhältniſs als Kronglas, so ist

$$m = 109, \; f = 30, \; \delta\nu = 0{,}021,$$

folglich das Maaſs der Undeutlichkeit, welches bei solchen Fernröhren nicht überschritten werden darf,

$$\frac{1}{K} = \frac{109 \, . \, 110}{30} \cdot 0{,}021 = 8{,}4.$$

Will man also ein anderes Fernrohr von derselben Glasart verfertigen, dessen Vergröſserung $= M$, und wo das Objectiv die Brennweite $= F$ hat, so muſs

$$\frac{m.(m + 1)}{f} = \frac{M.(M + 1)}{F}$$

seyn, oder wenn die Vergröſserungen stark sind, so hat man kürzer

$$f : F = mm : MM,$$

d. h. die Brennweiten müssen sich bei gleicher Deutlichkeit wie die Quadrate der Vergröſserungen verhalten.

Von der Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt der Gläser.

§. 473.

Nachdem wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, dafs wegen der verschiedenen Brechbarkeit der einzelnen Farbenstrahlen, die das weifse Licht enthält, nicht alle Strahlen, selbst wenn sie unendlich nahe bei der Axe des Glases auffallen, in einem Punkt vereinigt werden, sondern jede Farbe ihren eigenen Sammlungspunkt besitzt, ist uns noch übrig die Abweichung zu untersuchen, welche für diejenigen Strahlen Statt findet, die in einer bestimmten Entfernung von der Axe auffallen, und die man allgemein die Abweichung wegen der Kugelgestalt nennt. Bedeutet $\varkappa$ die Sammlungsweite für Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, und k die Sammlungsweite derjenigen, welche an einem Punkt des Glases auftreffen, wo der Halbmesser der Krümmung einen Winkel $= \theta$ mit der Axe macht, so hatten wir in §. 380. den Ausdruck

$$k = \varkappa - \lambda . \sin \theta^2,$$

wenn wir uns auf die zweite Potenz des Sinus beschränken. Die Gröfse $\lambda . \sin \theta^2$ ist das, was man die Längenabweichung wegen der Kugelgestalt nennt, und sie ist bei den gewöhnlichen Dimensionen der Gläser, in Vergleich zur Längenabweichung wegen der Zerstreuung der Farben, nur sehr klein. Bezeichnen wir dieselbe durch q, und setzen wir die Entfernung von der Axe, in welcher der Strahl auffällt, wie früher, $= t$, so ist

$$\sin \theta = \frac{t}{r}, \quad q = \frac{\lambda}{rr} \cdot tt.$$

§. 474.

In §. 383. ist der Werth von λ entwickelt worden, und es war

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{nnhh.(p-\varkappa)^2}{(p+hn)^2.\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{nn\varkappa\varkappa.(p+h)^2}{(p+hn)^2.h}$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{n\varkappa.(p+h).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{nh.(p-\varkappa).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2}.$$

Nun ist aber nach demselben Paragraphen

$$r = \frac{ph.(n-1)}{(p+hn)},$$

folglich ergiebt sich hieraus

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nn.(p-\varkappa)^2}{\varkappa pp.(n-1)^2} \cdot tt + \frac{1}{2} \cdot \frac{nn\varkappa\varkappa.(p+h)}{(n-1)^2.h^3.pp} \cdot tt$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{n\varkappa.(p+h).(h+\varkappa)}{pphh.(n-1)^2} \cdot tt - \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(p-\varkappa).(h+\varkappa)}{pph.(n-1)^2} \cdot tt.$$

Die hierin vorkommenden Gröſsen p, $\varkappa$ werden nach den Formeln

$$p = \frac{hnr}{h.(n-1)-r}$$

$$\varkappa = \frac{p\varrho}{p.(n-1)+n\varrho}$$

berechnet, wo r und ϱ die Krümmungshalbmesser des Glases bedeuten.

§. 475.

Der Werth der Sammlungsweite für Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, ist, mit Berücksichtigung der Dicke des Glases, nach §. 379.:

$$k' = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1)-r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1)-nr\varrho-c.(n-1).(h.(n-1)-r)}.$$

Substituirt man hierin statt r und ϱ ihre Werthe aus den Gleichungen, die §. 383. angegeben sind, nämlich

$$r = \frac{ph.(n-1)}{p+hn}$$

$$\varrho = \frac{\varkappa p.(n-1)}{p-\varkappa n},$$

so erhält man folgenden Ausdruck:

$$k' = \frac{p\varkappa.(p - c)}{pp - c.(p - \varkappa n)}.$$

Die beiden ersten Glieder des Ausdrucks von q lassen sich auch so schreiben:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{nntt}{(n-1)^2.pph^3\varkappa}\cdot\left\{\begin{array}{l} pp.(h^3 + \varkappa^3) \\ + 2p\varkappa h.(\varkappa\varkappa - hh) \\ + \varkappa^2h^2.(h + \varkappa) \end{array}\right\}$$

Nennt man nun die Brennweite des Glases f, so dafs

$$\frac{h + \varkappa}{h\varkappa} = \frac{1}{f},$$

und bedenkt, dafs jedes Glied, was in der Parenthese sich befindet, den Factor $h + \varkappa$ in sich schliefst, so wird auch dieser Ausdruck

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{nntt\varkappa\varkappa}{(n-1)^2.f}\cdot\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{hh} - \frac{1}{h\varkappa} + \frac{1}{\varkappa\varkappa} \\ + \frac{2}{p}\cdot\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\varkappa}\right) + \frac{1}{pp} \end{array}\right\}$$

Hierzu kommen auch die beiden folgenden Glieder, welche sich so schreiben lassen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n\varkappa\varkappa tt}{(n-1)^2.f}\cdot\left[\frac{1}{p}\cdot\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\varkappa}\right) + \frac{2}{pp}\right],$$

folglich wird der ganze Ausdruck von q

$$q = \frac{1}{2}\cdot\frac{n\varkappa\varkappa tt}{(n-1)^2.f}\cdot\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{\varkappa\varkappa} - \frac{1}{h\varkappa} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{2n+1}{p}\cdot\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{h}\right) \\ + \frac{n+2}{pp}. \end{array}\right\}$$

§. 476.

Differentiirt man diesen Ausdruck, indem p und q als veränderlich betrachtet werden, so erhält man

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n\varkappa\varkappa tt}{(n-1)^2.f}\cdot\left[\frac{(2n+1)}{pp}\cdot\left(\frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{h}\right) - \frac{2n+4}{p^3}\right],$$

und setzt man dieses Differentialverhältnifs = Null, so mufs

$$(2n + 1).p.\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right) = 2n + 4$$

werden. Hieraus ergiebt sich der Werth von

$$p = \frac{2.(n + 2)}{2n + 1} \cdot \frac{xh}{h - x}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{2n + 1}{2n + 4} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right).$$

Differentiirt man den Differentialcoefficienten $\frac{dq}{dp}$ nochmals, so kommt der veränderliche Theil desselben

$$= -2 \cdot \frac{2n + 1}{p^3} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right) + 3 \cdot \frac{2n + 4}{p^4},$$

und wenn man hierin den so eben gefundenen Werth von $\frac{1}{p}$ substituirt, so kommt

$$-2 \cdot \frac{(2n + 1)^4}{(2n + 4)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)^4 + 3 \cdot \frac{(2n + 1)^4}{(2n + 4)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{h}\right)^3$$

$$= \frac{(2n + 1)^4}{(2n + 4)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)^4.$$

Dieser zweite Differentialcoefficient ist in allen Fällen positiv, folglich ist p derjenige Werth, welcher q zu einem Minimum macht. Substituirt man diesen Werth von p in die allgemeine Gleichung

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nxxtt}{(n - 1)^2 . f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{hx} + \frac{1}{hh}\right) \\ - \frac{2n + 1}{p} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right) \\ + \frac{n + 2}{pp} \end{array} \right\}$$

so erhält man den Ausdruck von q

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nxxtt}{(n - 1)^2 . f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{hx} + \frac{1}{hh}\right) \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n + 1)^2}{2n + 4} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)^2 \end{array} \right\}$$

$$=\frac{1}{8}\frac{n\varkappa\varkappa tt}{(n-1)^2.(n+2).f}\left[(4n-1)\left(\frac{1}{\varkappa\varkappa}+\frac{1}{hh}\right)+2.(2nn+1).\frac{1}{\varkappa h}\right].$$

Dieser Werth von q giebt den kleinsten Werth der Abweichung wegen der Kugelgestalt für ein Glas von bestimmter Brennweite.

§. 477.

Nehmen wir z. B. an, die Brennweite des Glases solle 8 Fuſs betragen, so kann man bekanntlich die Krümmungen der Gläser r, ϱ auf sehr verschiedene Weise wählen, wenn nur der Gleichung

$$f=\frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)}=8,$$

vermittelst dieser Werthe von r und ϱ Genüge geleistet wird. Allein die verschiedene Annahme dieser Gröſse giebt auch immer eine verschiedene Längenabweichung, und durch die im vorigen Paragraph entwickelten Formeln wird man diejenigen Werthe von r und ϱ finden, vermöge deren die Längenabweichung am kleinsten wird. Es ist nämlich

$$p=\frac{2.(n+2)}{2n+1}\cdot\frac{\varkappa h}{h-\varkappa},$$

und wenn $\varkappa=8$ werden soll, so muſs $h=\infty$ seyn. Es bleibt also

$$p=\frac{2.(n+2)}{2n+1}\cdot\varkappa.$$

Setzen wir das Brechungsverhältniſs des Glases $n=\frac{3}{2}$, so kommt

$$p=14 \text{ Fuſs}.$$

Nach §. 383. hat man zwischen p, r, h, n die Gleichung

$$r=\frac{ph.(n-1)}{hn+p},$$

also, wenn wir $h=\infty$ setzen,

$$r=\frac{p.(n-1)}{n}=\frac{14}{3}\text{ Fuſs}.$$

Der Werth von ϱ ergiebt sich dann, aus der obigen Gleichung,

$$\frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = 8,$$

aus welcher sich $\varrho = 28$ findet. Für einen unendlich entfernten Gegenstand wird die kleinste Längenabweichung

$$q = \frac{1}{8} \cdot \frac{n.(4n-1).tt}{(n-1)^2.(n+2).f} = \frac{15}{14} \cdot \frac{tt}{f},$$

wenn wir das Brechungsverhältnifs $n = \frac{3}{2}$ setzen.

Nimmt man statt r, 5 Fufs, während die Brennweite f, wie früher, 8 Fufs bleibt, so ergiebt sich aus der Formel (§. 383.)

$$p = \frac{hnr}{h.(n-1) - r}$$

für den angegebenen Werth von r und für $h = \infty$, $p = 15$. Die für q gegebene Gleichung §. 475. wird für den Fall, dafs $h = \infty$,

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nftt}{(n-1)^2} \cdot \left(\frac{n}{ff} - \frac{2n+1}{pf} + \frac{n+2}{pp}\right),$$

und wenn man hierin die angegebenen Zahlenwerthe $n = \frac{3}{2}$, $f = 8$, $p = 15$ substituirt, so erhält man

$$q = \frac{163}{1200} \cdot tt = 0{,}1358 \,.\, tt,$$

während die möglichst kleinste Längenabweichung durch

$$q = \frac{15}{14} \cdot \frac{tt}{f} = \frac{15}{112} \cdot tt = 0{,}1339 \,.\, tt$$

ausgedrückt wird.

§. 478.

Setzt man den Factor in der Parenthese des Werthes von q für $h = \infty$ Null, so erhält man

$$\frac{pp}{ff} - \frac{p}{f} \cdot \frac{2n+1}{n} + \frac{n+2}{n} = o,$$

und aus dieser quadratischen Gleichung folgt

$$\frac{p}{f} = \frac{2n+1}{2n} \pm \frac{\sqrt{1-4n}}{2n},$$

welcher Ausdruck in allen Fällen unmöglich ist, und man sieht hieraus, dafs man kein Glas anfertigen kann,

wodurch bei unendlich entfernten Gegenständen die Längenabweichung wegen der Kugelgestalt aufgehoben wird. Bei andern Entfernungen ist dies jedoch möglich. Denn setzt man den allgemeinen Ausdruck von q (§. 475.) gleich Null, so kommt

$$n.\left(\frac{1}{\varkappa\varkappa}-\frac{1}{\varkappa h}+\frac{1}{hh}\right)$$
$$-\frac{2n+1}{p}.\left(\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{h}\right)+\frac{n+2}{pp}=o,$$

und aus dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich

$$\frac{1}{p}=\frac{2n+1}{2n+4}.\left(\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{h}\right)$$
$$\pm\sqrt{-\frac{4n-1}{4.(n+2)^2}.\left(\frac{1}{\varkappa\varkappa}+\frac{1}{hh}\right)-\frac{2nn+1}{2.(n+2)^2}.\frac{1}{\varkappa h}}.$$

So lange h und $\varkappa$ gleiche Zeichen haben, d. h. sobald das Object und das Bild auf verschiedenen Seiten der Glaslinse liegen, ist die Gröfse unter dem Wurzelzeichen immer negativ, also sind in diesem Falle die Werthe von p unmöglich. Es mufs daher $\varkappa$ negativ werden, und bezeichnen wir diesen Werth durch $-\varkappa'$, so wird

$$\frac{(4nn+2)}{\varkappa' h}-(4n-1).\left(\frac{1}{\varkappa'\varkappa'}+\frac{1}{hh}\right)>o$$

seyn müssen, wenn p einen reellen Werth erhalten soll. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{h^2}{\varkappa'^2}-\frac{4nn+2}{4n-1}.\frac{h}{\varkappa'}<-1$$
$$\frac{h}{\varkappa'}\lessgtr\frac{2nn+4}{4n-1}\pm\frac{2.\sqrt{n^4-3nn+2n}}{4n-1}.$$

Nimmt man für Glas $n=\frac{3}{2}$, so erhält man

$$\frac{h}{\varkappa'}<\frac{11+\sqrt{21}}{10}$$
$$\frac{h}{\varkappa'}>\frac{11-\sqrt{21}}{10},$$

und da bekanntlich aus dem Ausdruck $\frac{h}{\varkappa'}<\mu$ umge-

kehrt $\frac{\varkappa'}{h} > \mu$ folgt, so hat man durch Umkehrung

$$\frac{\varkappa'}{h} > \frac{10}{11 + \sqrt{21}} > \frac{11 - \sqrt{21}}{10} > 0{,}6417$$

$$\frac{\varkappa'}{h} < \frac{10}{11 - \sqrt{21}} < \frac{11 + \sqrt{21}}{10} < 1{,}5583.$$

Man sieht also, wie eng die Grenzen sind, innerhalb deren die Längenabweichung aufgehoben werden kann. Da nun, wenn f die Brennweite des Glases bedeutet,

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\varkappa'} = \frac{1}{f}, \quad \frac{\varkappa'}{h} = \frac{f}{f-h},$$

so folgt hieraus, dafs

$$\frac{f}{f-h} > 0{,}6417$$

$$\frac{f}{f-h} < 1{,}5583.$$

Man sieht übrigens aus der angegebenen Bedingung für die Möglichkeit der Aufhebung der Längenabweichung wegen der Kugelgestalt zwischen gewissen Grenzen, dafs die Glaslinse entweder eine concave seyn mufs, oder ist sie convex, so wird erforderlich seyn, dafs sich das Object näher am Glase befinde, als die Brennweite desselben beträgt, damit das Bild vor das Glas falle.

§. 479.

Befindet sich das Object im Brennpunkte selbst, so gehen die Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, mit der Axe selbst parallel aus, es wird also für $h = f$, $\varkappa = \infty$, und dann läfst sich der Ausdruck von q, welchen wir §. 475. entwickelt haben, nicht mehr brauchen, weil er durch den Factor $\varkappa\varkappa$ unendlich grofs wird, wenn auch das Resultat $q = \infty$, welches die Rechnung für diesen Fall giebt, an sich ganz richtig ist. Denn die Längenabweichung ist der Unterschied der Entfernungen, in welcher die Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, und die-

jenigen, welche in einer endlichen Entfernung von der Axe das Glas treffen, die Axe durchschneiden. Befindet sich nun das Object im Brennpunkt, so schneiden die ersten Strahlen die Axe in unendlicher, die zweiten in endlicher Entfernung vom Glase, also ist der Unterschied immer unendlich.

§. 480.

Für diesen Fall müssen wir den Winkel aufsuchen, unter welchen die in endlicher Entfernung von der Axe auffallenden Strahlen die Axe schneiden. Diesen Winkel haben wir früher durch φ'' bezeichnet, und indem wir die Werthe der verschiedenen Winkel aufsuchten (§. 380.), so ergab sich bei der Entwickelung bis zur dritten Potenz von $\sin\theta$

$$\sin\varphi'' = \delta.\sin\theta - D.\sin\theta^3.$$

Der Werth von δ ist nach §. 380.

$$\delta = \frac{(n-1).(r+\varrho)}{\varrho} - \frac{r}{h}$$
$$- \frac{c.(n-1)}{\varrho}.\frac{(n-1).h-r}{hn},$$

und substituirt man hierin die Werthe von r, ϱ durch p, $\varkappa$, h ausgedrückt (§. 383.), nämlich

$$r = \frac{ph.(n-1)}{p+hn}$$
$$\varrho = \frac{p\varkappa.(n-1)}{p-\varkappa n},$$

so erhält man

$$\delta = \frac{ph.(n-1)}{(p+hn).\varkappa} - \frac{ch.(n-1)}{p\varkappa}.\frac{p-\varkappa n}{p+hn}.$$

Der Werth von D ist §. 383. entwickelt, und man hat daselbst

$$D = \frac{1}{2}.\frac{(n-1).h^2p.(p-\varkappa n)}{(p+hn)^3.\varkappa^3}.[\varkappa.(h+\varkappa)-nh.(p-\varkappa)]$$
$$-\frac{1}{2}.\frac{n.(n-1).p.(p+h)}{(p+hn)^3.\varkappa}.[h.(h+\varkappa)+n.(p+h).\varkappa].$$

Setzt man nun x unendlich grofs, so bleibt

$$\delta = \frac{ch.(n-1)}{p+hn} \cdot \frac{n}{p}$$

$$D = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p}{(p+hn)^3} \cdot [2hh + ph + n.(p+h)^2],$$

also, wenn man diese Werthe in vorige Gleichung für $\sin \varphi''$ substituirt, und zugleich statt h die Brennweite f setzt, so kommt

$$\sin \varphi'' = \frac{cf.(n-1)}{p+fn} \cdot \frac{n}{p} \cdot \sin \theta$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p}{(p+fn)^3} \cdot [2ff + pf + n.(p+f)^2].\sin \theta^3.$$

Es ist aber auch

$$\sin \theta = \frac{t}{r} = \frac{t.(p+fn)}{pf.(n-1)},$$

folglich wird durch Einführung dieses Werthes

$$\sin \varphi'' = \frac{nct}{pp} + \frac{1}{2} \cdot \frac{nt^3}{(n-1)^2.f} \cdot \left[\frac{2}{pp} + \frac{1}{pf} + n.\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{f}\right)^2\right].$$

Hieraus sieht man, dafs, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases, der Winkel, welchen die in einer Entfernung $= t$ von der Axe auf das Glas fallenden Strahlen mit dieser bilden, dem Cubus dieser Entfernung proportional ist.

§. 481.

Es sey AB eine Glaslinse (Fig. 59.), CF ihre Axe, in F der Sammlungspunkt der die Mitte des Glases treffenden Strahlen, G der Sammlungspunkt der vom Rand B herkommenden Strahlen BG, so ist FG die Längenabweichung $= q$; errichtet man nun in F das Perpendikel FK, bis es den von B herkommenden Strahl in K schneidet, so ist FK die Seitenabweichung wegen der Kugelgestalt. In den beiden Dreiecken BGC, FGK hat man die Proportion

$$FK : FG = CB : CG.$$

Bezeichnet man also die Seitenabweichung durch s, so wird

$$s : q = t : k$$

$$s = \frac{qt}{k}.$$

Da nun die Längenabweichung q selbst schon dem Quadrat der Oeffnung des Glases proportional ist, so wird die Seitenabweichung s dem Cubus der Oeffnung t proportional seyn.

Wenn wir einen gebrochenen Strahl hinter der Linse betrachten, so läſst sich sein Weg durch die Gleichung $y = \mu x + \nu$ darstellen. Nun trifft der Strahl die Linse in einem Punkt, dessen Coordinaten $y = r . \sin \theta$, $x = o$ sind, und die Axe wird in einem Punkt geschnitten, dessen Coordinaten durch $y = o$, $x = \varkappa - \lambda . \sin \theta^2$ ausgedrückt werden. Man hat daher zur Bestimmung von μ, ν die Gleichungen

$$r . \sin \theta = \nu, \quad o = \mu . (\varkappa - \lambda . \sin \theta^2) + \nu,$$

folglich erhält man die Gleichung des Strahls

$$(y - r . \sin \theta) = - \frac{r . \sin \theta}{\varkappa - \lambda . \sin \theta^2} . x.$$

Für den auf den Rand des Glases fallenden Strahl sey $\theta = \theta'$, so hat man für diesen die Gleichung

$$y - r . \sin \theta' = - \frac{r . \sin \theta'}{\varkappa - \lambda . \sin \theta'^2} . x.$$

Beide Strahlen durchschneiden sich in einem Punkte, dessen Ordinate y durch den Ausdruck

$$\frac{y - r . \sin \theta'}{y - r . \sin \theta} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} . \frac{\varkappa - \lambda . \sin \theta^2}{\varkappa - \lambda . \sin \theta'^2}$$

bestimmt wird. Es ergiebt sich hieraus

$$y = \frac{\lambda r}{\varkappa} . \sin \theta . \sin \theta' . (\sin \theta' + \sin \theta),$$

wenn wir die höhern Potenzen von $\sin \theta$ und $\sin \theta'$ vernachlässigen. Differentiirt man diesen Ausdruck nach θ, und setzt $\frac{dy}{d\theta}$ Null, so erhält man die Gleichung, welche den Werth von θ angiebt, vermöge dessen y ein Maximum wird,

$$\cos\theta.(\sin\theta' + \sin\theta) + \cos\theta.\sin\theta = o$$
$$\sin\theta = -\tfrac{1}{2}.\sin\theta'.$$

Hierdurch wird

$$y = \frac{\lambda r}{4\varkappa}.\sin\theta'^3,$$

wenn wir auf das negative Vorzeichen keine Rücksicht nehmen. Da nun $\lambda.\sin\theta'^2$ die Längenabweichung $= q$ und $r.\sin\theta' = t$ ist, so kommt auch

$$y = \frac{qt}{4\varkappa}.$$

Beschreibt man mit diesem Werth von y als Halbmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, und dessen Fläche senkrecht auf der Axe des Glases steht, so erhält man den kleinsten Abweichungskreis, durch welchen alle auf die Glaslinse fallenden Strahlen gehen müssen. Sein Halbmesser ist viermal so klein, als die Seitenabweichung. Die Gleichung

$$y - r.\sin\theta' = -\frac{r.\sin\theta'}{\varkappa - \lambda.\sin\theta'^2}.x$$

läſst sich auch so schreiben:

$$y - t = -\frac{tx}{\varkappa - q},$$

und da mit Rücksicht auf das Vorzeichen $y = -\frac{qt}{4\varkappa}$, so bestimmt sich x aus der Gleichung

$$x = \left(1 + \frac{q}{4\varkappa}\right).(\varkappa - q).$$

Berücksichtigen wir also nur die erste Potenz der Längenabweichung q, so ist

$$x = \varkappa - \tfrac{3}{4}q.$$

Dieser Werth von x ist die Entfernung, in welcher der kleinste Abweichungskreis vom Glase liegt. Der Halbmesser dieses kleinsten Abweichungskreises kann als das Maaſs der Undeutlichkeit einer Zusammensetzung von Gläsern betrachtet werden.

§. 482.

Wenn wir in der Gleichung des Weges eines zweimal gebrochenen Strahls

$$y - r.\sin\theta = -\frac{r.\sin\theta}{\varkappa - \lambda.\sin\theta^2}\cdot x$$

$\sin\theta = \frac{t}{r}$ setzen, so kommt

$$y - t = -\frac{trr}{\varkappa rr - \lambda tt}\cdot x.$$

Die Gleichung der Ebene, in welcher der kleinste Abweichungskreis liegt, ist $x = k - \frac{3}{4}q$. Um daher die Werthe von y für die Punkte zu finden, in welchen der Strahl diese Ebene schneidet, müssen wir in der Gleichung des Strahls $k - \frac{3}{4}q$ für x substituiren Hieraus folgt

$$y - t = -\frac{trr}{krr - \lambda t^2}\cdot(k - \tfrac{3}{4}q).$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf t vom dritten Grade; es wird daher allgemein drei Werthe von t für jeden Werth von y geben, d. h. jeder Punkt des Abweichungskreises erhält von drei Punkten des Glases Lichtstrahlen. Bringt man t auf die andere Seite, und reducirt, so wird auch

$$y = \frac{\frac{3}{4}qtrr - \lambda t^3}{krr - \lambda t^2}.$$

Im Nenner kann man das Glied λt^2 weglassen, da q selbst schon von derselben Dimension als t^2 ist, so daſs

$$t^3 = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{qrr}{\lambda}\cdot t - \frac{ykrr}{\lambda}$$

wird. Bezeichnet man noch den gröſsten Werth von t durch T, so ist $qrr = \lambda T^2$, also auch

$$t^3 = \tfrac{3}{4}T^2 t - \frac{ykrr}{\lambda},$$

und wenn man den Halbmesser des kleinsten Abweichungskreises $= \sigma$ setzt, so wird

$$\sigma = \frac{qT}{4k} = \frac{qTrr}{4krr} = \frac{\lambda T^3}{4krr}$$

$$\frac{ykrr}{\lambda} = \frac{yT^3}{4\sigma},$$

folglich hierdurch

$$t^3 = \tfrac{3}{4} T^2 t - \frac{yT^3}{4\sigma}.$$

Nimmt man $t = T . \sin \mu$, so läſst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\sin \mu^3 = \tfrac{3}{4} . \sin \mu - \frac{y}{4\sigma}.$$

Aus der Auflösung der cubischen Gleichungen mit drei möglichen Wurzeln ist aber bekannt, daſs man nur $\frac{y}{\sigma} = \sin 3\mu$ zu setzen braucht, um den entsprechenden Werth durch $\sin \mu$ zu erhalten, folglich sind die Wurzeln der Gleichung

$$t^3 = \tfrac{3}{4} T^2 t - \frac{y}{4\sigma}$$

$$t = + T . \sin \mu$$
$$t = + T . \sin (60^0 - \mu)$$
$$t = - T . \sin (60^0 + \mu).$$

§. 483.

Aendert sich y um dy, so ändert sich μ um $d\mu = \frac{dy}{3\sigma . \cos 3\mu}$, und die correspondirenden Veränderungen der drei Werthe von t sind:

$$dt = \frac{T dy . \cos \mu}{3\sigma . \cos 3\mu}$$

$$dt = - \frac{T dy . \cos (60^0 - \mu)}{3\sigma . \cos 3\mu}$$

$$dt = - \frac{T dy . \cos (60^0 + \mu)}{3\sigma . \cos 3\mu}.$$

Nun ist die Fläche eines concentrischen Kreisringes, der mit den Halbmessern z und $z + dz$ beschrieben ist $= 2\pi z dz$. Folglich fällt auf den Kreisring des Abweichungskreises, dessen Fläche $2\pi y dy$ ist, Licht von drei Kreisringen der Glaslinsen, deren Flächen durch

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma . \cos 3\mu} \cdot \sin 2\mu . dy$$

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma . \cos 3\mu} \cdot \sin (120^0 - 2\mu) . dy$$

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma . \cos 3\mu} \cdot \sin (120^0 + 2\mu) . dy$$

ausgedrückt werden. Nimmt man an, die Dichtigkeit des Lichts, welches auf die Glaslinse fällt, sey $= 1$, so wird die Dichtigkeit des Lichts auf dem Kreisring erhalten, indem man diese drei Flächen addirt, und die Summe durch die Fläche des letzten Ringes dividirt. Es wird also die gesuchte Dichtigkeit

$$= \frac{T^2}{6\sigma y . \cos 3\mu} \cdot [\sin 2\mu + \sin (120^0 - 2\mu) + \sin (120^0 + 2\mu)]$$

$$= \frac{2T^2}{3\sigma\sigma} \cdot \frac{\sin (60^0 + 2\mu)}{\sin 6\mu}.$$

Uebrigens kann man bemerken, dafs

$$\sin 2\mu + \sin (120^0 + 2\mu) = \sin (120^0 - 2\mu),$$

folglich fällt auf die beiden Kreisringe, die die Entfernungen

$$t = T . \sin \mu, \quad t = T . \sin (60^0 - \mu)$$

vom Mittelpunkt des Glases haben, eben so viel Licht, als auf den dritten Kreisring.

§. 484.

Wir haben jetzt noch die Abweichungen wegen der Kugelgestalt zu untersuchen, wenn das Licht durch mehrere hinter einander aufgestellte Gläser geht, die eine gemeinschaftliche Axe besitzen. Es seyen daher zuerst zwei Gläser gegeben AB, $A'B'$ (Fig. 59.); der Sammlungspunkt der Axenstrahlen sey in F, der der Randstrahlen in G, für das erste Glas; der Strahl BG treffe verlängert das zweite Glas in D, so hat man $BGC = CGD$. Der Winkel BGC ist derjenige, unter welchem der Strahl die Axe schneidet, und es ist nach §. 380.

$$\sin BGC = \delta . \sin \theta - D . \sin \theta^3.$$

Nennen wir nun, analog mit θ, den Winkel, unter welchem der nach D an die Vorderfläche gezogene Halbmesser gegen die Axe geneigt ist, $\theta_{,}$, so wird, da CGD der Winkel (φ) ist, unter welchem der Strahl von dem als Object dienenden Punkt G ausgeht,

$$\sin CGD = \alpha' . \sin \theta_{,} - A' . \sin \theta_{,}^3,$$

wo α', A' die Gröfsen für das zweite Glas bedeuten, welche α, A für das erste angeben. Man hat also zwischen θ und $\theta_{,}$, die Relation

$$\delta . \sin \theta - D . \sin \theta^3 = \alpha' . \sin \theta_{,} - A' . \sin \theta_{,}^3.$$

§. 485.

Der Sammlungspunkt der Axenstrahlen hinter dem zweiten Glase liege in F', und der von G herkommende in G', so hat man allgemein für das zweite Glas

$$k = \varkappa - \lambda . \sin \theta_{,}^2.$$

Nun sey $CF = h'$, so ist $\varkappa = \varphi(h')$, $\lambda = \psi(h')$, wo φ und ψ Functionszeichen sind, weil beide Gröfsen für ein und dasselbe Glas sich nur mit h' ändern. Der Werth von k drückt also den Abstand desjenigen Punktes hinter dem Glase aus, in welchem die aus F ausgehenden Strahlen, die einen Punkt der Vorderseite des Glases treffen, an welchem das Einfallsloth einen Winkel $= \theta_{,}$ mit der Axe macht, die Axe schneiden. Man erhält also

$$CF' = \varphi(h'),$$

indem $\theta_{,} = o$ gesetzt wird. Da ferner $GF = q$, so wird $CG = (h' + q)$, und für Strahlen, die von G kommen, ist $\varkappa = \varphi . (h' + q)$ und $\lambda = \psi . (h' + q)$, folglich

$$CG' = \varphi . (h' + q) - \psi . (h' + q) . \sin \theta_{,}^2,$$

oder wenn man entwickelt, und $\frac{d\varphi h'}{dh'} = \varphi'(h')$, $\frac{d\psi(h')}{dh'} = \psi'(h')$ setzt

$$CG' = \varphi(h') + \varphi'(h') . q - \psi(h') . \sin \theta_{,}^2$$
$$- \psi'(h') . q . \sin \theta_{,}^2.$$

Das letzte Glied im Ausdruck CG' kann man vernachlässigen, weil q selbst dem $\sin \theta^2$ proportional ist. Es wird also $CF' - CG' =$

$$FG' = - q\varphi'(h') + \psi(h') \, . \sin \theta_{,}^{2}.$$

Die Längenabweichung für das zweite Glas besteht also aus zwei Theilen, von denen der zweite $\psi(h') \, . \sin \theta_{,}^{2}$ diejenige Abweichung der Strahlen vom Sammlungspunkt der Axenstrahlen ausdrückt, welche allein daher rührt, dafs die Strahlen von der Axe entfernt auffallen. Setzt man in dem Werthe von q (§. 475.) statt n, k, t, f, h, p, die Werthe n', k', t', f', h', p', so wird q in q' übergehen, und $\psi(h') . \sin \theta_{,}^{2} = q'$ seyn. Es ergiebt sich also

$$F'G' = - q\varphi'(h') + q'.$$

Nun ist aber

$$\varkappa' = \varphi(h') = \frac{h'f'}{h' - f'}$$

$$\varphi'(h') = - \left(\frac{\varkappa'}{h'}\right)^2,$$

folglich wird auch die Längenabweichung durch zwei Gläser

$$= \frac{\varkappa'\varkappa'}{h'h'} \cdot q + q'.$$

Auf gleiche Weise erhält man dieselbe durch drei Gläser

$$= \frac{\varkappa'\varkappa'\varkappa''\varkappa''}{h'h'h''h''} \cdot q + \frac{\varkappa''\varkappa''}{h''h''} \cdot q' + q''$$

u. s. w. für mehr Gläser, wo das Gesetz der Fortschreitung deutlich vor Augen liegt.

§. 486.

Sobald man die Längenabweichung für eine beliebige Anzahl von Gläsern gefunden hat, läfst sich die Seitenabweichung sogleich aus derselben ableiten. Man erhält dieselbe nämlich nach dem im §. 481. gegebenen Verfahren, indem man die Längenabweichung mit dem Quotienten multiplicirt, welcher entsteht, wenn die Entfernung von der Axe, in welcher der Randstrahl das Glas trifft, durch die Entfernung des Bildes vom letzten

31

Glase dividirt wird. Die Entfernungen des einfallenden Strahls von der Axe werden für die verschiedenen auf einander folgenden Gläser aus den §. 404. entwickelten Formeln, die t', t'', t'''.... durch t ausdrücken, gefunden. Was den Halbmesser des kleinsten Abweichungskreises betrifft, so ist derselbe nach §. 481. immer gleich dem vierten Theil der Seitenabweichung.

§. 487.

Die Längenabweichung wegen der Kugelgestalt durch zwei Gläser ist nach §. 485.

$$= \frac{x'x'}{h'h'} \cdot q + q'.$$

Nimmt man nun an, dafs beide Glaslinsen aus verschiedenen Glasarten bestehen, die nicht gleiches Brechungsverhältnifs besitzen, und bezeichnet man die Brechungsverhältnisse durch n und n', so kommen, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{nn}{(n-1)^2} \cdot \frac{xx}{f} \cdot \left(\frac{1}{xx} - \frac{1}{hx} + \frac{1}{hh}\right) = a$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n.(2n+1)}{(n-1)^2} \cdot \frac{xx}{f} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right) = b$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n+2)}{(n-1)^2} \cdot \frac{xx}{f} = c$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n'n'}{(n'-1)^2} \cdot \frac{x'x'}{f'} \cdot \left(\frac{1}{x'x'} - \frac{1}{h'x'} + \frac{1}{h'h'}\right) = a'$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n'.(2n'+1)}{(n'-1)^2} \cdot \frac{x'x'}{f'} \cdot \left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{h'}\right) = b'$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n'.(n'+2)}{(n'-1)^2} \cdot \frac{x'x'}{f'} = c'$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$q = tt.\left(a - \frac{b}{p} + \frac{c}{pp}\right)$$

$$q' = t't'.\left(a' - \frac{b'}{p'} + \frac{c'}{p'p'}\right).$$

Nun ist aber nach §. 404., wenn wir das Vorzeichen nicht berücksichtigen,

$$t' = \frac{h'}{\varkappa} \cdot t,$$

folglich läfst sich q' auch so schreiben:

$$q' = \frac{h'h'}{\varkappa\varkappa} \cdot tt \cdot \left(a' - \frac{b'}{p'} + \frac{c'}{p'p'}\right).$$

Es wird daher die Längenabweichung durch zwei Gläser

$$= tt \cdot \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a\varkappa'\varkappa'}{h'h'} - \dfrac{b}{h'h'} \cdot \dfrac{\varkappa'\varkappa'}{p} + \dfrac{c}{h'h'} \cdot \dfrac{\varkappa'\varkappa'}{pp} \\ + \dfrac{a'h'h'}{\varkappa\varkappa} - \dfrac{b'}{\varkappa\varkappa} \cdot \dfrac{h'h'}{p'} + \dfrac{c'}{\varkappa\varkappa} \cdot \dfrac{h'h'}{p'p'} \end{array} \right\}$$

Hierzu kommen noch die Hülfsgleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{\varkappa'} = \frac{1}{f'}$$

$$h' + \varkappa = l,$$

wo l die Entfernung beider Gläser von einander bedeutet.

§. 488.

Soll die Längenabweichung wegen der Kugelgestalt bei der Zusammensetzung zweier Gläser Null werden, so hat man zwischen p und p' die Gleichung

$$\frac{1}{p'p'} - \frac{b'}{c'} \cdot \frac{1}{p'} = -\frac{a'}{c'} - \frac{\varkappa\varkappa\varkappa'\varkappa'}{h'^4} \cdot \left(\frac{a}{c'} - \frac{b}{c'} \cdot \frac{1}{p} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{1}{pp}\right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b'}{c'} \pm \sqrt{\left[\frac{b'b' - 4a'c'}{4c'c'} - \frac{\varkappa\varkappa\varkappa'\varkappa'}{h'^4}\left(\frac{a}{c'} - \frac{b}{c'} \cdot \frac{1}{p} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{1}{pp}\right)\right]}.$$

Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, also $h = \infty$, so wird $\varkappa = f$, und nehmen wir aufserdem an, beide Glaslinsen seyen so nahe an einander, dafs ihre gegenseitige Entfernung vernachlässigt werden kann, so ist $l = o$, $h' = -f$, $\varkappa' = \dfrac{ff'}{f+f'}$. Durch diese Voraussetzungen wird dann noch

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{nn}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{f};$$
$$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(2n+1)}{(n-1)^2};$$
$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n+2)}{(n-1)^2} \cdot f$$
$$a' = \frac{1}{2} \cdot \frac{n'n'}{(n'-1)^2} \cdot \frac{ff + 3ff' + 3f'f'}{(f+f')^2 . f'}$$
$$b' = \frac{1}{2} \cdot \frac{n'.(2n'+1)}{(n'-1)^2} \cdot \frac{f.(2f'+f)}{(f+f')^2}$$
$$c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{n'.(n'+2)}{(n'-1)^2} \cdot \frac{f^2 f'}{(f+f')^2}.$$

Soll aufserdem endlich das zusammengesetzte Glas achromatisch seyn, so haben wir nach §. 463. die Gleichung zwischen den Brennweiten

$$f' = -f \cdot \frac{\delta\nu'}{\delta\nu},$$

wo $\delta\nu'$, $\delta\nu$ die Zerstreuungsverhältnisse der Glasarten angeben, welche die Brechungsverhältnisse n', n besitzen.

Als ein hierher gehöriges Beispiel wollen wir die Brechungsverhältnisse wählen, nach denen Gauss in dem ersten Bande der von v. Lindenau und Bohnenberger herausgegebenen Zeitschrift für Astronomie eine achromatische und aplanatische Zusammensetzung zweier Gläser aus Kronglas und Flintglas berechnet hat. Man hat hier für die mittlern Strahlen

$$n = 1{,}515162$$
$$n' = 1{,}601770,$$

für die violetten Strahlen

$$n + \delta n = 1{,}525976$$
$$n' + \delta n' = 1{,}621730.$$

Hieraus ergiebt sich für die Zerstreuungsverhältnisse beider Glasarten

$$\frac{\delta n}{n-1} = \delta\nu = 0{,}02099146$$
$$\frac{\delta n'}{n'-1} = \delta\nu' = 0{,}03316882.$$

Bezeichnen wir die Brennweiten der einzelnen Gläser für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit durch f und f', und nehmen an, daſs die Brennweite der zusammengesetzten Gläser die Einheit werden soll, so hat man, nach §. 403.,

$$1 = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

Sollen nun die mittlern und violetten Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe, von einem unendlich entfernten Gegenstand herkommend, auffallen, in einen Punkt vereinigt werden, so ist nach der oft angewandten Gleichung

$$f' = -f \cdot \frac{\delta\nu'}{\delta\nu},$$

und aus der Verbindung dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$f = + \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}$$

$$f' = - \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu},$$

oder in Zahlen

$$f = + 0{,}3671328;$$
$$f' = - 0{,}5801103.$$

Hierdurch finden sich nun die in §. 488. angegebenen Gröſsen folgendermaſsen:

$$\log a = 1.0711774$$
$$\log b = 1.0608815$$
$$\log c = 0.5663100$$
$$\log a' = 1.8327989 \text{ (n)}$$
$$\log b' = 1.7758014 \text{ (n)}$$
$$\log c' = 1.1377145 \text{ (n)}$$
$$\log \frac{k}{k'} = 9.5648232.$$

Substituirt man diese Werthe in der für $\frac{1}{p'}$ in §. 488. angegebenen Gleichung, so erhält man

$$\frac{1}{p'} = 2{,}172986$$

$$\pm \sqrt{6{,}131667 - \frac{6{,}216139}{p} + \frac{1{,}99044}{pp}}.$$

§. 489.

Man kann nun aber auch statt der Gröfsen p, p' die Krümmungshalbmesser r und r' der vordern Seiten beider Gläser einführen, wozu wir uns der Gleichungen

$$\frac{1}{p} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{r'} + \frac{1}{fn'}$$

zu bedienen haben. Dann kommt

$$\frac{0{,}3756906}{r'} = 0{,}472486$$

$$\pm \sqrt{6{,}131667 - \frac{2{,}113515}{r} + \frac{0{,}2301010}{rr}}.$$

§. 490.

Um eine zweite Gleichung zwischen p, p' oder r, r' zu entwickeln, kann man folgendermafsen verfahren. Alle Coefficienten a, b, c, so wie die Brennweiten f und f', sind für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit berechnet; man braucht also nur dieselbe Rechnung für die violetten Strahlen zu führen, und diese neuen Werthe in dieselbe Gleichung §. 488. zu substituiren, so erhält man die zweite numerische Gleichung zwischen p und p' und dann zwischen r und r'. Es seyen F, F' die Brennweiten für die violetten Strahlen, so ist

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)},\quad F = \frac{r\varrho}{(n-1+\delta n).(r+\varrho)},$$

folglich, wenn man $\frac{r\varrho}{r+\varrho}$ eliminirt

$$F = \frac{f.(n-1)}{n-1+\delta n} = \frac{f}{1+\delta\nu}.$$

Auf gleiche Weise wird für das zweite Glas

$$F' = \frac{f'}{1+\delta\nu'}.$$

Man erhält also durch Anwendung der gegebenen numerischen Werthe

$$
\begin{aligned}
\log F &= 9.5558013 \\
\log F' &= 9.7493392 \text{ (n)} \\
\log a &= 1.0683323 \\
\log b &= 1.0482501 \\
\log c &= 0.5436664 \\
\log a' &= 1.8436433 \text{ (n)} \\
\log b' &= 1.7777308 \text{ (n)} \\
\log c' &= 1.1313218 \text{ (n)}.
\end{aligned}
$$

Es ergiebt sich also die Gleichung

$$\frac{1}{p'} = +\, 2{,}215027 \pm \sqrt{\begin{Bmatrix} +\, 6{,}439961 \\ -\, 6{,}387423 \,.\, \frac{1}{p} \\ +\, 1{,}998674 \,.\, \frac{1}{pp} \end{Bmatrix}}$$

oder, wenn man die im vorigen §. angegebenen Werthe von r, r' substituirt,

$$\frac{0{,}3833745}{r'} = +\, 0{,}500210 \pm \sqrt{\begin{Bmatrix} +\, 6{,}439961 \\ -\, 2{,}201628 \,.\, \frac{1}{r} \\ +\, 0{,}2374534 \,.\, \frac{1}{rr} \end{Bmatrix}}$$

§. 491.

Dividirt man in den beiden Gleichungen durch den Coefficienten von $\frac{1}{r'}$, so erhält man folgende Ausdrücke

$$\frac{1}{r'} = +\, 1{,}257646 \pm \sqrt{\begin{Bmatrix} +\, 43{,}44282 \\ -\, 14{,}97424 \,.\, \frac{1}{r} \\ +\, 1{,}630264 \,.\, \frac{1}{rr} \end{Bmatrix}}$$

$$\frac{1}{r'} = +\,1{,}304755 \pm \sqrt{\left\{\begin{array}{l} +\,43{,}81650 \\ -\,14{,}97950\,.\,\frac{1}{r} \\ +\,1{,}615592\,.\,\frac{1}{rr} \end{array}\right\}}$$

und diesen beiden Gleichungen wird Genüge geleistet durch die Werthe

$$\frac{1}{r} = +\,7{,}1668$$

$$\frac{1}{r'} = +\,5{,}7078.$$

Verbindet man mit diesen Werthen die Gleichungen

$$\varrho = \frac{fr\,.\,(n-1)}{r - f\,.\,(n-1)}$$

$$\varrho' = \frac{f'r'\,.\,(n'-1)}{r' - f'\,.\,(n'-1)},$$

so erhält man die Halbmesser der Krümmungen beider Gläser

$$r = +\,0{,}13953$$
$$\varrho = -\,0{,}53203$$
$$r' = +\,0{,}17520$$
$$\varrho' = -\,0{,}11665.$$

Eine Zusammensetzung von zwei Gläsern, welche diese angegebenen Krümmungshalbmesser besitzen, würde achromatisch und aplanatisch seyn, d. h. diese Zusammensetzung vereinigt nicht nur die mittlern und violetten Strahlen, welche nahe bei der Axe auffallen, sondern auch diejenigen, welche in gröſsern Entfernungen von der Axe das Glas treffen, und hebt auſserdem die Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt auf.

§. 492.

Die im Vorigen angegebenen Halbmesser der Krümmungen der Gläser können freilich nur genähert seyn, da wir bei ihrer Aufsuchung die Dicke der Gläser so

wie den Abstand derselben von einander vernachlässigt haben. Allein sie können doch dienen, um, vermittelst der vollständigen Formeln, die genauen Werthe abzuleiten, wie wir jetzt zeigen wollen. Nach §. 379. ist die Vereinigungsweite der Strahlen von dem Brechungsverhältniſs n, wenn sie unendlich nahe bei der Axe auffallen,

$$k = \frac{(p - c) . \varrho}{(p - c) . (n - 1) + n\varrho},$$

indem wir, wie schon früher geschehen ist,

$$\frac{hrn}{h . (n - 1) - r} = p$$

setzen. Nehmen wir nun

$$r = + 0{,}13953$$
$$\varrho = - 0{,}53203$$
$$h = \infty, \quad c = 0{,}01,$$

so kommt für mittlere Strahlen

$$\log r = 9.1446676$$
$$\log n = 0.1804591$$
$$\text{C} . \log (n - 1) = 0.2880562$$
$$9.6131829 = \log p$$
$$p = 0{,}4103769$$
$$p - c = 0{,}4003769$$
$$\log (p - c) = 9.6024690$$
$$\log \varrho = 9.7259361 \text{ (n)}$$
$$\log k = 9.5503590$$
$$k = 0{,}3551068.$$

Der Abstand des zweiten Glases vom ersten sey 0,0025, die Dicke $c' = 0{,}004$, man hat also für die Berechnung der Vereinigungsweite hinter dem zweiten Glase

$$\frac{h'r'n'}{h' . (n' - 1) - r'} = p'$$

$$k' = \frac{(p' - c') . \varrho'}{(p' - c') . (n' - 1) + n'\varrho'}$$

$$r' = + 0{,}17520$$
$$\varrho' = - 0{,}11665$$
$$- h' = k' - 0{,}0025 = 0{,}3526068$$

$$\log h' = 9.5472907 \text{ (n)}$$
$$\log r' = 9.2435341$$
$$\log \varrho' = 9.0668847 \text{ (n)}$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$\log (n' - 1) = 9.7794305$$
$$\log p' = 9.4072786$$
$$p' = 0{,}2554339$$
$$p' - c' = 0{,}2514339$$
$$\log (p' - c') = 9.4004239$$
$$\log k' = 9.9165778$$
$$k' = 0{,}8252352.$$

§. 493.

Man vermehre nun nach und nach r um 0,002, ϱ, r' um 0,02, ϱ' um 0,005, und berechne mit diesen neuen Werthen die vier zugehörigen Werthe von k, so kommt

$$k' = 0{,}8662288$$
$$k' = 0{,}8640030$$
$$k' = 1{,}1780076$$
$$k' = 1{,}0196279.$$

Die Gröſse k' ist bei gleichbleibenden Brechungsverhältnissen n, n' der beiden Gläser für bestimmte Farbenstrahlen bloſs als eine Function der vier Radien r, ϱ, r', ϱ' anzusehen. Man hat daher das vollständige Increment der Gröſse k' durch die Gleichung

$$dk' = \left(\frac{dk'}{dr}\right) . dr + \left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) . d\varrho$$
$$+ \left(\frac{dk'}{dr'}\right) . dr' + \left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) . d\varrho'.$$

Zieht man nun die aus den anfänglichen Werthen von r, ϱ, r', ϱ' berechnete Gröſse k' von denjenigen ab, die nach und nach durch die Veränderung von r, ϱ, r', ϱ' entstanden, so erhält man die Unterschiede

$$+ 0{,}0409936;$$
$$+ 0{,}0387678;$$
$$+ 0{,}3527724;$$
$$+ 0{,}1943927.$$

Dividirt man diese Zahlenwerthe, welche die partiellen Veränderungen ausdrücken, die die Vereinigungsweite k' hinter der hintern Fläche des zweiten Glases durch die allmähligen Veränderungen von r, ϱ, r', ϱ' erleidet, durch die entsprechenden gewählten Veränderungen der Krümmungshalbmesser

$$dr = + 0{,}002, \quad d\varrho = + 0{,}02$$
$$dr' = + 0{,}02, \quad d\varrho' = + 0{,}005,$$

so erhält man die vier partiellen Differentialcoefficienten von k'

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = + 20{,}4968$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = + 1{,}93839$$
$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = + 17{,}13862$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = + 38{,}8785.$$

Wenn nun aber die Vereinigungsweite der mit der Axe parallel einfallenden Strahlen hinter der Hinterfläche des zweiten Glases der Einheit gleich seyn soll, so ist die totale Veränderung von $k' = 1 - 0{,}8252352 = 0{,}1747648 = dk$. Wir haben also die Gleichung

$$0{,}1747648 = 20{,}4968 \,.\, dr + 1{,}93839 \,.\, d\varrho$$
$$+ 17{,}13862 \,.\, dr' + 38{,}8785 \,.\, d\varrho',$$

und wenn wir noch drei Gleichungen von derselben Form aufstellen, so haben wir die nöthige Anzahl von Gleichungen, um die Veränderungen dr, $d\varrho$, dr', $d\varrho'$ zu bestimmen, welche die anfänglich angenommenen Werthe der Krümmungshalbmesser r, ϱ, r', ϱ' zu erleiden haben. Die Auffindung dieser drei übrigen Gleichungen ist aber möglich; denn diese erste Gleichung ist durch die Forderung entstanden, dafs sich die mittlern Axenstrahlen in der bestimmten Entfernung vereinigen sollten, und die zweite findet sich aus der Vereinigung der violetten Axenstrahlen. Die dritte und vierte werden aus der Bedingung abgeleitet, dafs auch

die in einer bestimmten Entfernung von der Axe einfallenden Strahlen, sowohl von der mittlern als der violetten Farbe, dieselbe Vereinigungsweite besitzen sollen, als die ersten Strahlen.

§. 494.

Wir gehen also jetzt zur Vereinigungsweite der violetten Axenstrahlen über. Hierbei haben wir

$$r = + 0{,}13953$$
$$\varrho = - 0{,}53203$$
$$\log r = 9.1446676$$
$$\log \varrho = 9.7259361 \ (n)$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$\log (n - 1) = 9.7209660$$
$$\log p = 9.6072494$$
$$p = 0{,}4048083$$
$$p - c = 0{,}3948083$$
$$\log (p - c) = 9.5963862$$
$$\log k = 9.5411376$$
$$k = 0{,}3476463$$
$$h' = - 0{,}3451463$$
$$\log h' = 9.5380033 \ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$\log (n' - 1) = 9.7936018$$
$$\log r' = 9.2435341$$
$$\log \varrho' = 9.0668847 \ (n)$$
$$\log p' = 9.4006866$$
$$p' = 0{,}2515861$$
$$p' - c' = 0{,}2475861$$
$$\log (p' - c') = 9.3937264$$
$$\log k' = 0.9135382$$
$$k' = 0{,}8194796.$$

§. 495.

Um nun die zweite Gleichung zu finden, vermehren wir die Krümmungshalbmesser der Gläser nach und nach um dieselben Gröſsen, als §. 493. geschehen ist, so erhalten wir folgende Vereinigungsweiten:

$$k' = 0{,}8677056$$
$$k' = 0{,}8473972$$
$$k' = 1{,}1832984$$
$$k' = 1{,}0187473.$$

Die vier zur Berechnung der partiellen Differential-coefficienten nothwendigen Unterschiede der Vereinigungsweiten werden daher

$$+\ 0{,}0482260$$
$$+\ 0{,}0279176$$
$$+\ 0{,}3638188$$
$$+\ 0{,}1992677,$$

folglich erhalten wir

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = +\ 24{,}113$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = +\ 1{,}39588$$
$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = +\ 18{,}19094$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = +\ 39{,}8535.$$

Es ist aber die vollständige Veränderung

$$dk = 1 - 0{,}8194796$$
$$= +\ 0{,}1805204,$$

und hierdurch ergiebt sich die zweite Gleichung

$$0{,}1805204 = 24{,}113 \,.\, dr + 1{,}39588 \,.\, d\varrho$$
$$+\ 18{,}19094 \,.\, dr' + 39{,}8525 \,.\, d\varrho'.$$

§. 496.

Was nun die Vereinigung der in gröſserer Entfernung von der Axe auf das erste Glas fallenden Strahlen betrifft, so wählen wir diejenigen, mit welchen das auf der ersten Vorderfläche errichtete Einfallsloth einen Winkel von $18^0\ 30'$ bildet. Es wird daher in den Formeln §. 378., da die Strahlen mit der Axe parallel einfallen, $\theta = 18^0\ 30'$ zu setzen seyn, und führt man die Rechnung nach selbigen aus, indem bemerkt wird, daſs $\varphi = o$ ist, so kommt

$$\sin\theta = 9.5014764$$
$$\log n = 0.1804591$$
$$\sin(\theta - \varphi') = 9.3210173$$
$$\theta - \varphi' = 12^0\ 5'\ 18'',0$$
$$\theta = 18\ 30$$
$$\varphi' = 6^0\ 24'\ 42'',0.$$

$$\log(r+\varrho-c) = 9.6047659\,(n) \qquad \log r = 9.1446676$$
$$C.\log\varrho = 0.2740639\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.0479415 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 9.3210173$$
$$8.9267713 \qquad 8.7397488\,(n)$$

$$+\ 0{,}08448338$$
$$-\ 0{,}05492231$$
$$+\ 0{,}02956107$$
$$8.4707201 = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = 1^0\ 41'\ 38'',3$$
$$\varphi' = 6\ 24\ 42,\ 0$$
$$\theta' = -\ 4^0\ 43'\ 3'',7$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 8.4707201$$
$$\log n = 0.1804591$$
$$8.6511792 = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = 2^0\ 34'\ 1'',6$$
$$\theta' = -\ 4\ 43\ 3,\ 7$$
$$\varphi'' = 7^0\ 17'\ 5'',3.$$
$$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 8.6511792$$
$$C.\sin\varphi'' = 0.8968755$$
$$9.2739908\ (n)$$
$$-\ 0{,}1879277$$
$$-\varrho = +\ 0{,}5320300$$
$$k = +\ 0{,}3441023$$
$$-\ 0{,}0025$$
$$h' = -\ 0{,}3416023$$
$$r' = +\ 0{,}17520$$
$$h' + r' = -\ 0{,}1664023$$
$$\log(h' + r') = 9.2211596\ (n)$$

$$\mathrm{C.}\log r' = 0.7564659$$
$$\sin\varphi = 9.1031245\ (\mathrm{n}) = (-\sin\varphi'')$$
$$\sin(\theta+\varphi) = 9.0807500$$
$$\theta+\varphi = 6^0\,55'\,1'',8$$
$$\varphi = -7^0\,17'\,5'',3$$
$$\theta = 14^0\,12'\,7'',1$$
$$\sin(\theta+\varphi) = 9.0807500$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$8.8761498 = \sin(\theta-\varphi')$$
$$\theta-\varphi' = 4^0\,18'\,43'',3$$
$$\theta = 14\ \ 12\ \ 7,\ 1$$
$$\varphi' = 9^0\,53'\,23''8$$

$$\log(r'+\varrho'-c') = 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\mathrm{C.}\log\varrho' = 0.9331153(\mathrm{n}) \qquad \mathrm{C.}\log\varrho' = 0.9331153\,(\mathrm{n})$$
$$\sin\varphi' = 9.2349126 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 8.8761498$$
$$8.9048227\,(\mathrm{n}) \qquad 9.0527992\,(\mathrm{n})$$
$$-\ 0{,}08031980$$
$$-\ 0{,}11292734$$
$$-\ 0{,}19324714$$
$$\sin(\theta'+\varphi') = 9.2861131\ (\mathrm{n})$$
$$\theta'+\varphi' = -\ 11^0\ 8'\,32''\,4$$
$$\varphi' = 9^0\,53'\,23''\,8$$
$$\theta' = -\ 21^0\ 1'\,56''\,2$$
$$\sin(\theta'+\varphi') = 9.2861131\ (\mathrm{n})$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$9.4907133\,(\mathrm{n}) = \sin(\theta'+\varphi'')$$
$$\theta'+\varphi'' = -\ 18^0\,1'\,52''\,8$$
$$\theta' = -\ 21\ \ 1\ \ 56''\,2$$
$$\varphi'' = 3^0\,0'\ 3''\,4$$
$$\log\varrho' = 9.0668847\ (\mathrm{n})$$
$$\sin(\theta'+\varphi'') = 9.4907133\ (\mathrm{n})$$
$$\mathrm{C.}\sin\varphi'' = 1.2810633$$
$$9.8386613$$
$$0{,}6897068$$
$$-\ \varrho' = 0{,}11665$$
$$0{,}8063568 = k'.$$

§. 497.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlern Strahlen für ein verändertes r.

$$\log(r+\varrho-c) = 9.6026025\,(n) \qquad \log r = 9.1508485$$
$$C.\log\varrho = 0.2740639\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.0479415 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 9.3210173$$
$$8.9246079 \qquad 8.7459297\,(n)$$
$$+\ 0{,}08406358$$
$$-\ 0{,}05570955$$
$$+\ 0{,}02835403$$
$$8.4526148 = \sin(\theta'+\varphi')$$
$$\theta'+\varphi' = 1^0\,37'\,29'',2$$
$$\varphi' = 6\ 24\ 42,\ 0$$
$$\theta' = -\ 4^0\,47'\,12,\ 8$$
$$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4526148$$
$$\log n = 0{,}1804591$$
$$8.6330739 = \sin(\theta'+\varphi'')$$
$$\theta'+\varphi'' = 2^0\,27'\,44''\,1$$
$$\theta' = -\ 4\ 47\ 12{,}8$$
$$\varphi' = 7^0\,14'\,56''\,9$$
$$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6330739$$
$$C.\sin\varphi'' = 0.8989954$$
$$9.2580054\ (n)$$
$$-\ 0{,}1811362$$
$$-\varrho = +\ 0{,}5320300$$
$$k = +\ 0{,}3508938$$
$$-\ 0{,}0025$$
$$h' = -\ 0{,}3483938$$
$$r' = +\ 0{,}17520$$
$$h'+r' = -\ 0{,}1731938$$
$$\log(h'+r') = 9.2385323\ (n)$$
$$C.\log r' = 0.7564659$$
$$\sin\varphi = 9.1010046\ (n)$$
$$9.0960028 = \sin(\theta+\varphi)$$

$$\theta + \varphi = \quad 7^0\ 9'\ 50''\ 5$$
$$\varphi = -\ 7.14.56,9$$
$$\theta = +\ 14.24.47,4$$

$$\sin(\theta + \varphi) = 9.0960028$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$8.8914026 = \sin(\theta - \varphi')$$

$$\theta - \varphi' = \quad 4^0\ 27'\ 59''\ 3$$
$$\theta = 14.24.47,4$$
$$\varphi' = \quad 9.56.48,1$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\mathrm{C.}\log \varrho' = 0.9331153\,(\mathrm{n}) \quad \mathrm{C.}\log \varrho' = 0.9331153\,(\mathrm{n})$$
$$\sin \varphi' = 9.2373725 \quad \sin(\theta - \varphi') = 8.8914026$$
$$8.9072826\,(\mathrm{n}) \qquad\qquad 9.0680520$$

$$-\ 0,08077606$$
$$-\ 0,11696394$$
$$-\ 0,19774000$$
$$9.2960945\,(\mathrm{n}) = \sin(\theta' + \varphi')$$

$$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\ 24'\ 17''\ 5$$
$$\varphi' = \quad 9.56.48.1$$
$$\theta' = -\ 21^0\ 21'\ \ 5''\ 6$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2960945\,(\mathrm{n})$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$9.5006947\,(\mathrm{n}) = \sin(\theta' + \varphi'')$$

$$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\ 27'\ 56''\ 0$$
$$\theta' = -\ 21.21.\ 5''\ 6$$
$$\varphi'' = +\ \ 2^0\ 53'\ \ 9''\ 6$$

$$\log \varrho' = 9.0668847\,(\mathrm{n})$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5006947\,(\mathrm{n})$$
$$\mathrm{C.}\sin \varphi'' = 1.2970990$$
$$9.8655784$$

$$0,7338012$$
$$-\ \varrho' = 0,11665$$
$$0,8504512 = k'.$$

32

§. 498.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlern Strahlen für ein verändertes ϱ.

$$\log(r+\varrho-c) = 9.5826314\,(n) \qquad \log r = 9.1446676$$
$$C.\log\varrho = 0.2907046\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.0479415 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 9.3210173$$
$$8.9212775 \qquad 8.7563895$$

$$\begin{aligned}
&+\ 0{,}08342140\\
&-\ 0{,}05706758\\
&+\ 0{,}02635382\\
&8{,}4208436 = \sin(\theta'+\varphi')\\
\theta'+\varphi' &= 1^0\,30'\,36''\,5\\
\varphi' &= 6.24.42{,}0\\
\theta' &= -\,4^0\,53'\;5''\,5\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 8.4208436\\
\log n &= 0.1804591\\
&\ 8.6013027 = \sin(\theta'+\varphi'')\\
\theta'+\varphi'' &= 2^0\,17'\,18''\,4\\
\theta' &= -\,4.53.\;5{,}5\\
\varphi'' &= 7.10.23{,}9\\
\log\varrho &= 9.7092954\ (n)\\
\sin(\theta'+\varphi'') &= 8.6013027\\
C.\sin\varphi'' &= 0.9035385\\
&\ 9.2141366\ (n)\\
&\ -\,0{,}1637331\\
-\varrho &= +\,0{,}51203\\
k &= +\,0{,}3482969\\
&\ -\,0{,}0025\\
h' &= -\,0{,}3457969\\
r' &= +\,0{,}17520\\
h'+r' &= -\,0{,}1705969\\
\log(h'+r') &= 9.2319712\ (n)\\
C.\log r' &= 0.7564659\\
\sin\varphi &= 9.0964615\ (n)\\
&\ 9.0848986 = \sin(\theta+\varphi)
\end{aligned}$$

$$\theta + \varphi = \quad 6^0\,59'\;\;2''\,0$$
$$\varphi = -\,7.10.23,9$$
$$\theta = \quad 14^0\;\;9'\,25''\,9$$

$$\sin(\theta + \varphi) = 9.0848986$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$8.8802984 = \sin(\theta - \varphi')$$

$$\theta - \varphi' = \quad 4^0\,21'\,12''\,6$$
$$\theta = 14.\;\;9.25,9$$
$$\varphi' = \quad 9^0\,48'\,13''\,3$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\text{C}.\log\varrho' = 0.9331153(\text{n}) \quad \text{C}.\log\varrho' = 0.9331153(\text{n})$$
$$\sin\varphi' = 9.2311463 \quad \sin(\theta - \varphi') = 8.8802984$$
$$8.9010564(\text{n}) \qquad\qquad 9.0569478(\text{n})$$

$$-\,0{,}07962627$$
$$-\,0{,}11401129$$
$$-\,0{,}19363756$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2869896\;(\text{n})$$

$$\theta' + \varphi' = -\,11^0\;\;9'\,54''\,6$$
$$\varphi' = \quad 9.48.13,3$$
$$\theta' = -\,20^0\,58'\;\;7''\,9$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2869896\;(\text{n})$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$9.4915898\;(\text{n}) = \sin(\theta' + \varphi'')$$

$$\theta' + \varphi'' = -\,18^0\;\;4'\,8''\,8$$
$$\theta' = -\,20.58.7,9$$
$$\varphi'' = +\;\;2.53.59,1$$

$$\log\varrho' = 9.0668847\;(\text{n})$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.4915898\;(\text{n})$$
$$\text{C}.\sin\varphi'' = 1.2959475$$
$$9.8544220$$

$$0{,}7151910$$
$$-\,\varrho' = 0{,}11665$$
$$0{,}8318410 = k'$$

§. 499.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlern Strahlen für ein verändertes r'.

$$h' = -\ 0{,}3416023\ (\S.\ 496.)$$
$$r' = +\ 0{,}19520$$
$$h' + r' = -\ 0{,}1464023$$
$$\log(h' + r') = 9.1655479\ (n)$$
$$C.\log r' = 0.7095202$$
$$\sin\varphi = 9.1031245\ (n)$$
$$8.9781926 = \sin(\theta + \varphi)$$
$$\theta + \varphi = 5^0\,27'\,25''\,8$$
$$\varphi = -\ 7.17.\ 5.3$$
$$\theta = 12.44.31{,}1$$
$$\sin(\theta + \varphi) = 8.9781926$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$8.7735924 = \sin(\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = 3^0\,24'\,13''\,9$$
$$\theta = 12.44.31{,}1$$
$$\varphi' = 9^0\,20'\,17''\,2$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.8724476 \qquad \log r' = 9.2904898$$
$$C.\log\varrho' = 0.9331153(n) \qquad C.\log\varrho' = 0.9331153(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.2102159 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 8.7735924$$
$$9.0157788(n) \qquad 8.9971975(n)$$
$$-\ 0{,}1037000$$
$$-\ 0{,}0993568$$
$$-\ 0{,}2030568$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.3076175\ (n)$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\,42'\,57''$$
$$\varphi' = 9.20.17{,}2$$
$$\theta' = -\ 21.\ 3.14.2$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.3076175\ (n)$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') \quad 9.5122177\ (n)$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\,58'\,50''\,7$$
$$\theta' = -\ 21.\ 3.14{,}2$$
$$\varphi'' = +\ 2.\ 4.23{,}5$$

$$\log \varrho' = 9.0668847\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5122177\ (n)$$
$$C.\sin \varphi'' = 1.4415780$$
$$0.0206804$$
$$1{,}0487700$$
$$-\varrho' = 0{,}11665$$
$$1{,}1654200 = k'.$$

§. 500.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlern Strahlen für ein verändertes ϱ'.

$$\log(r'+\varrho'-c') = 8.7748818 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$C.\log \varrho' = 0.9521413\,(n) \qquad C.\log \varrho' = 0.9521413\,(n)$$
$$\sin \varphi' = 9.2349126 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 8.8761498$$
$$8.9619357\,(n) \qquad 9.0718252\,(n)$$
$$-\ 0{,}09160848$$
$$-\ 0{,}11798454$$
$$-\ 0{,}20959302$$
$$9.3213768\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 12.\ 5.54''5$$
$$\varphi' = +\ \ 9.53.23{,}8$$
$$\theta' = -\ 21^0\, 59'\, 18''\, 3$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.3213768\ (n)$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$9.5259770\ (n) = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 19^0\, 36'\, 58''\, 5$$
$$\theta' = -\ 21.59.18{,}3$$
$$\varphi'' = +\ \ 2^0\, 22'\, 19''\, 8$$
$$\log \varrho' = 9.0478587\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5259770\ (n)$$
$$C.\sin \varphi'' = 1.3831014$$
$$9.9569371\ (n)$$
$$0{,}9056016$$
$$-\varrho' = 0{,}11165$$
$$1{,}0172516 = k'.$$

§. 501.

Wir haben also folgende fünf Werthe von k'

$$k' = 0{,}8063568$$
$$k' = 0{,}8504512$$
$$k' = 0{,}8318410$$
$$k' = 1{,}1654200$$
$$k' = 1{,}0172516.$$

Zieht man den ersten Werth von den folgenden vier ab, so bleiben die Unterschiede

$$+\ 0{,}0440944$$
$$+\ 0{,}0254842$$
$$+\ 0{,}3590732$$
$$+\ 0{,}2108948,$$

und da die entsprechenden Veränderungen der Krümmungshalbmesser der Gläser r, ϱ, r', ϱ', wie früher, folgendermafsen angenommen waren

$$dr = +\ 0{,}002;\quad d\varrho = +\ 0{,}020$$
$$d\varrho' = +\ 0{,}020;\quad d\varrho' = +\ 0{,}005,$$

so erhält man die partiellen Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = +\ 22{,}0472$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = +\ 1{,}27421$$
$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = +\ 17{,}95366$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = +\ 42{,}1789.$$

Es ist aber die vollständige Veränderung von k'

$$dk' = 1 - 0{,}8063568$$
$$= +\ 0{,}1936432,$$

und hierdurch erhält man die dritte Bedingungsgleichung

$$+\ 0{,}1936432 = +\ 22{,}0472\ .dr + 1{,}27421\,.d\varrho$$
$$+\ 17{,}95366\,.dr' + 42{,}1789\ .d\varrho'.$$

§. 502.

Um die vierte Bedingungsgleichung zu erhalten, betrachten wir den Weg der violetten Lichtstrahlen,

welche so auf das erste Glas parallel mit der Axe einfallen, daſs der Winkel $\theta = 18^0\,30'$ wird

$$\sin\theta = 9.5014764$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$\sin(\theta - \varphi') = 9.3179286$$
$$\theta - \varphi' = 12^0\ 0'\ 5''$$
$$\theta = 18.30$$
$$\varphi' = 6^0\,29'\,55''$$

$$\log(r + \varrho - c) = 9.6047695\,(n) \qquad \log r = 9.1446676$$
$$C.\log\varrho = 0.2740639\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 0.0537663 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 9.3179286$$
$$8.9345997 \qquad 8.7366601\,(n)$$

$$+\ 0{,}08602006$$
$$-\ 0{,}05453309$$
$$+\ 0{,}03148697$$
$$8.4981309 = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = 1^0\,48'\,15'',8$$
$$\varphi' = 6\ 29\ 55,0$$
$$\theta' = -\,4^0\,41'\,39'',2$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 8.4981309$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$8.6816787 = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = 2^0\,45'\,14'',4$$
$$\theta' = -\,4\ 41\ 39,2$$
$$\varphi'' = 7\ 26\ 53,6.$$
$$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 8.6816787$$
$$C.\sin\varphi'' = 0.8872969$$
$$9.2949117\ (n)$$
$$-\ 0{,}1972017$$
$$-\varrho' = +\ 0{,}5320300$$
$$k = +\ 0{,}3348283$$
$$-\ 0{,}0025$$
$$h' = -\ 0{,}3323283$$
$$r' = +\ 0{,}17520$$
$$h' + r' = -\ 0{,}1571283$$

$$\log (h' + r') = 9.1962545 \text{ (n)}$$
$$\text{C.}\log r' = 0.7564659$$
$$\sin \varphi = 9.1127031 \text{ (n)}$$
$$\sin (\theta + \varphi) = 9.0654235$$
$$\theta + \varphi = 6^{\circ}\, 40'\, 34'', 4$$
$$\varphi = -\,7\ \ 26\ \ 53,\ 6$$
$$\theta = +\,14^{\circ}\, 7'\, 28''$$
$$\sin (\theta + \varphi) = 9.0654235$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$8.8554450 = \sin (\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = 4^{\circ}\, 6'\, 39'', 4$$
$$\theta = 14\ \ 7\ \ 28,\ 0$$
$$\varphi' = 10^{\circ}\, 0'\, 48'', 6$$

$$\log (r' + \varrho' - c') = 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\text{C.}\log \varrho' = 0.9331153 \text{(n)} \qquad \text{C.}\log \varrho' = 0.9331153 \text{(n)}$$
$$\sin \varphi' = 9.2402480 \qquad \sin (\theta - \varphi') = 8.8554450$$
$$8.9101581 \text{ (n)} \qquad 9.0320944 \text{ (n)}$$
$$-\,0{,}08131266$$
$$-\,0{,}10766986$$
$$-\,0{,}18898254$$
$$9.2764216 \text{ (n)} = \sin (\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -\,10^{\circ}\, 53'\, 36''\ 3$$
$$\varphi' = +\,10\ \ 0\ \ 48\ \ 6$$
$$\theta' = -\,20\ \ 54\ \ 24\ \ 9$$
$$\sin (\theta' + \varphi') = 9.2764216 \text{ (n)}$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$9.4864001 \text{ (n)} = \sin (\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = -\,17^{\circ}\, 50'\, 49''\ 7$$
$$\theta' = -\,20\ \ 54\ \ 24\ \ 9$$
$$\varphi'' = +\ 3^{\circ}\ 3'\, 35''\ 2$$
$$\log \varrho' = 9.0668847 \text{ (n)}$$
$$\sin (\theta' + \varphi'') = 9.4864001 \text{ (n)}$$
$$\text{C.}\sin \varphi'' = 1.2726393$$
$$9.8259241$$
$$0{,}6697675$$
$$-\,\varrho' = 0{,}11665$$
$$0{,}7864175 = k'.$$

§. 503.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes r.

$$\log(r+\varrho-c)=9.6026025\,(n) \qquad \log r = 9.1508485$$
$$C.\log\varrho = 0.2740639\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.0537663 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 9.3179286$$
$$8.9304327 \qquad 8.7428410\,(n)$$

$$+\ 0,08591864$$
$$-\ 0,05531475$$
$$+\ 0,03060389$$
$$8.4857767 = \sin(\theta'+\varphi')$$

$$\theta'+\varphi' = 1^0\,45'\,13''\,5$$
$$\varphi' = 6\ 29\ 55\ 0$$
$$\theta' = -\ 4^0\,44'\,41''\,5$$

$$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4857767$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$8.6693245 = \sin(\theta'+\varphi'')$$

$$\theta'+\varphi'' = 2^0\,40'\,36''\,2$$
$$\theta' = -\ 4\ 44\ 41\ 5$$
$$\varphi'' = 7^0\,25'\,17''\,7$$

$$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6693245$$
$$C.\sin\varphi'' = 0.8888457$$
$$9.2841063\ (n)$$
$$-\ 0,1923550$$
$$-\varrho = +\ 0,53203$$
$$k = +\ 0,3396750$$
$$-\ 0,0025$$
$$h' = -\ 0,3371750$$
$$r' = +\ 0,17520$$
$$h'+r' = -\ 0,1619750$$

$$\log(h'+r') = 9.2094481\ (n)$$
$$C.\log r' = 0.7564659$$
$$\sin\varphi = 9.1111543\ (n)$$
$$9.0770683 = \sin(\theta+\varphi)$$

$$\theta + \varphi = \quad 6^0\,51'\,30''\,6$$
$$\varphi = -\,7\;25\;17\;7$$
$$\theta = \quad 14^0\,16'\,48''\,3$$

$$\sin(\theta + \varphi) = 9.0770683$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$8.8670898 = \sin(\theta - \varphi')$$

$$\theta - \varphi' = 4^0\,13'\,22''\,3$$
$$\theta = 14\;16\;48\;3$$
$$\varphi' = 10^0\;3'\,26''\,0.$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.7367948\,(n) \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$C.\log \varrho' = 0.9331153\,(n) \quad C.\log \varrho' = 0.9331153\,(n)$$
$$\sin \varphi' = 9.2421229 \quad \sin(\theta - \varphi') = 8.8670898$$
$$8.9120330\,(n) \qquad\qquad 9.0437392\,(n)$$

$$-\,0{,}08166444$$
$$-\,0{,}11059589$$
$$-\,0{,}19226033$$
$$9.2838964\,(n) = \sin(\theta' + \varphi')$$

$$(\theta' + \varphi') = -\,11^0\,5'\;5''\,8$$
$$\varphi' = +\,10\;3\;26\;0$$
$$\theta' = -\,21\;8\;31\;8$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2838964\,(n)$$
$$\log n' = 0{,}2099785$$
$$9.4938749\,(n) = \sin(\theta' + \varphi'')$$

$$\theta' + \varphi'' = -\,18^0\,10'\;3''\,6$$
$$\theta' = -\,21\;8\;31\;8$$
$$\varphi'' = +\;2\;58\;28\;2$$

$$\log \varrho' = 9.0668847\,(n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.4938749\,(n)$$
$$C.\sin \varphi'' = 1.2849039$$
$$9.8456635\,(n)$$
$$0{,}7009120$$
$$-\,\varrho' = 0{,}11665$$
$$0{,}8175620 = k'.$$

§. 504.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes ϱ.

$$\log(r+\varrho-c) = 9.5826314\,(n) \qquad \log r = 9.1446676$$
$$C.\log\varrho = 0.2907046\,(n) \qquad C.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.0537663 \qquad \sin(\theta-\varphi') = 9.3179286$$
$$\overline{8.9271023} \qquad \overline{8.7533008\,(n)}$$

$$+\ 0{,}08454779$$
$$-\ 0{,}05666415$$
$$\overline{+\ 0{,}02788364}$$
$$\overline{8.4453495} = \sin(\theta'+\varphi')$$

$$\theta'+\varphi' = 1^0\,35'\,52''\,1$$
$$\varphi' = 6\ 29\ 55\ 0$$
$$\overline{\theta' = -\ 4\ 54\ \ 2\ 9}$$

$$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4453495$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$\overline{8.6288973} = \sin(\theta'+\varphi'')$$

$$\theta'+\varphi'' = 2^0\,26'\,19''\,1$$
$$\theta' = -\ 4\ 54\ \ 2\ 9$$
$$\overline{\varphi'' = 7\ 20\ 22\ 0}$$

$$\log\varrho = 9.7092954\,(n)$$
$$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6288973$$
$$C.\sin\varphi'' = 0.8936478$$
$$\overline{9.2318405\,(n)}$$
$$\overline{-\ 0{,}1705455}$$
$$-\varrho = +\ 0{,}51203$$
$$\overline{k = +\ 0{,}3414845}$$
$$-\ 0{,}0025$$
$$\overline{h' = -\ 0{,}3389845}$$
$$r' = +\ 0{,}17520$$
$$\overline{h'+r' = -\ 0{,}1637845}$$
$$\log(h'+r') = 9.2142728\,(n)$$
$$C.\log r' = 0.7564659$$
$$\sin\varphi = 9.1063522\,(n)$$
$$\overline{9.0770909} = \sin(\theta+\varphi)$$

$$\theta + \varphi = \quad 6^0\,51'\,32''$$
$$\varphi = -\,7\;\;20\;\;22\;\;8$$
$$\theta = \quad 14\;\;11\;\;54\;\;8$$
$$\sin(\theta + \varphi) = 9.0770909$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$8.8671124 = \sin(\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = \quad 4^0\,13'\,23''\,1$$
$$\theta' = 14\;\;11\;\;54\;\;8$$
$$\varphi' = \quad 9\;\;58\;\;31\;\;7$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\mathrm{C}.\log\varrho' = 0.9331153(n) \quad \mathrm{C}.\log\varrho' = 0.9331153(n)$$
$$\sin\varphi' = 9.2386145 \quad \sin(\theta - \varphi') = 8.8671124$$
$$8.9085246(n) \qquad\qquad 9.0437618(n)$$
$$-\,0{,}08100739$$
$$-\,0{,}11060171$$
$$-\,0{,}19160910$$
$$9.2824161\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$(\theta' + \varphi') = -\,11^0\;\;2'\,48''\,2$$
$$\varphi' = \quad 9\;\;48\;\;13\;\;3$$
$$\theta' = -\,20\;\;51\;\;\;1\;\;5$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2828161\ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$9.4923946\ (n) = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = -\,18^0\;\;6'\,13''\,3$$
$$\theta' = -\,20\;\;51\;\;\;1\;\;5$$
$$\varphi'' = +\;\;2\;\;44\;\;48\;\;2$$
$$\log\varrho' = 9.0668847\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.4923946\ (n)$$
$$\mathrm{C}.\sin\varphi'' = 1.3194742$$
$$9.8787535$$
$$0{,}7564035$$
$$-\,\varrho' = 0{,}11665$$
$$0{,}8730535 = k'.$$

§. 505.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes r'.

$$h' = -\ 0{,}3323283$$
$$r' = +\ 0{,}19520$$
$$h' + r' = -\ 0{,}1371283$$

$$\log(h' + r') = 9.1371271\ (n)$$
$$C.\log r' = 0.7095202$$
$$\sin\varphi = 9.1127031\ (n)$$
$$8.9593504 = \sin(\theta + \varphi)$$
$$\theta + \varphi = 5^0\ 13'\ 29''\ 1$$
$$\varphi = -\ 7\ \ 26\ \ 53\ \ 6$$
$$\theta = +\ 12^0\ 40'\ 22''\ 7$$

$$\sin(\theta + \varphi) = 8.9593504$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$8.7493719 = \sin(\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = 3^0\ 13'\ \ 8''\ 4$$
$$\theta = 12\ \ 40\ \ 22\ \ 7$$
$$\varphi' = 9^0\ 27'\ 14''\ 3$$

$$\log(r' + \varrho' - c') = 8.8724476 \qquad \log r' = 9.2904898$$
$$C.\log\varrho' = 0.9331153 \qquad C.\log\varrho' = 0.9331153$$
$$\sin\varphi' = 9.2155190 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 8.7493719$$
$$9.0210819(n) \qquad 8.9729770(n)$$

$$-\ 0{,}1049740$$
$$-\ 0{,}0939673$$
$$-\ 0{,}1989413$$
$$9.2987250\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\ 28'\ 30''\ 1$$
$$\varphi' = 9\ \ 27\ \ 14\ \ 3$$
$$\theta' = -\ 20\ \ 55\ \ 44\ \ 4$$

$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2987250\ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5087035\ (n)$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\ 49'\ 19''\ 1$$
$$\theta' = -\ 20\ \ 55\ \ 44\ \ 4$$
$$\varphi'' = +\ 2^0\ \ 6'\ 25''\ 3$$

$$\log \varrho' = 9.0668847\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5087035\ (n)$$
$$C.\sin \varphi'' = 1.4345503$$
$$0.0101385$$
$$1,0236195$$
$$-\varrho' = 0,11665$$
$$1,1402695 = k'.$$

§. 506.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes ϱ'.

$$\log(r'+\varrho'-c') = 8.7748818 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$C.\log \varrho' = 0.9521413(n) \qquad C.\log \varrho' = 0.9521413(n)$$
$$\sin \varphi' = 9.2402480 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 8.8554450$$
$$8.9672711\ (n) \qquad 9.0511204\ (n)$$
$$-0,09274084$$
$$-0,11249167$$
$$-0,21523251$$
$$9.3329078\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -12^0\,25'\,45''$$
$$\varphi' = +10\quad 0\ 48\ 6$$
$$\theta' = -22^0\,26'\,43''\,6$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.3329078\ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$9.5428863\ (n) = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = -20^0\,25'\,45''\,0$$
$$\theta' = -22\ 26\ 43\ 6$$
$$\varphi'' = +\ 2^0\ 0'\,58''\,6$$
$$\log \varrho' = 9.0478587\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5428863\ (n)$$
$$C.\sin \varphi'' = 1.4536618$$
$$0.0444068$$
$$1,1076608$$
$$-\varrho' = 0,11165$$
$$1,2193108 = k'.$$

§. 507.

Wir haben also folgende fünf Werthe von k':

$$k' = 0,7864175$$
$$k' = 0,8175620$$
$$k' = 0,8730535$$
$$k' = 1,1402695$$
$$k' = 1,2193108.$$

Zieht man den ersten Werth von den folgenden vier ab, so bleiben die Unterschiede

$$+ 0,0311445$$
$$+ 0,0866360$$
$$+ 0,3538520$$
$$+ 0,4328933,$$

und da die entsprechenden Veränderungen der Krümmungshalbmesser der Gläser r, ϱ, r', ϱ', folgendermaſsen angenommen waren:

$$dr = + 0,002; \quad d\varrho = + 0,020$$
$$dr' = + 0,020 \quad d\varrho' = + 0,005,$$

so erhält man die partiellen Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = + 15,5722$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = + 4,33180$$
$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = + 17,6926$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = + 86,5787.$$

Es ist aber die vollständige Veränderung von k'

$$dk' = 1 - 0,7864175$$
$$= 0,2135825,$$

also erhält man die vierte Bedingungsgleichung

$$0,2135825 = + 15,5722 . dr + 4,3318 . d\varrho$$
$$+ 17,6926 . dr' + 86,5787 . d\varrho'.$$

§. 508.

Zur Bestimmung der Veränderungen der Krümmungshalbmesser der Gläser haben wir also diese Gleichungen ausgemittelt:

$$0{,}1747648 = 20{,}4968 . dr + 1{,}93849 . d\varrho + 17{,}13862 . dr' + 38{,}8785 . d\varrho'$$
$$0{,}1805204 = 24{,}113 . dr + 1{,}39588 . d\varrho + 18{,}19094 . dr' + 39{,}8535 . d\varrho'$$
$$0{,}1936432 = 22{,}0472 . dr + 1{,}27421 . d\varrho + 17{,}95366 . dr' + 42{,}1789 . d\varrho'$$
$$0{,}2135825 = 15{,}5722 . dr + 4{,}3318 . d\varrho + 17{,}6926 . dr' + 86{,}5787 . d\varrho'$$

Schafft man zuerst den Coefficienten von $d\varrho$ weg, so kommt

$$0{,}09015976 = d\varrho + 10{,}57414 . dr + 8{,}841674 . dr' + 20{,}05710 . d\varrho'$$
$$0{,}12932368 = d\varrho + 17{,}27440 . dr + 13{,}031874 . dr' + 28{,}55080 . d\varrho'$$
$$0{,}15197118 = d\varrho + 17{,}30264 . dr + 17{,}73830 . dr' + 33{,}10200 . d\varrho'$$
$$0{,}04930547 = d\varrho + 3{,}59485 . dr + 4{,}084447 . dr' + 19{,}98677 . d\varrho',$$

und wenn man diese Gleichungen von einander abzieht

$$0{,}03916392 = + 6{,}70026 . dr + 4{,}19020 . dr' + 8{,}49370 . d\varrho'$$
$$0{,}06181142 = 6{,}72850 . dr + 8{,}89663 . dr' + 13{,}04490 . d\varrho'$$
$$0{,}04085429 = 6{,}98928 . dr + 4{,}75723 . dr' + 0{,}07033 . d\varrho'.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch den Coefficienten von dr, so wird

$$0{,}005845134 = dr + 0{,}6255227 . dr' + 1{,}267667 . d\varrho'$$
$$0{,}009186506 = dr + 1{,}3222306 . dr' + 1{,}938754 . d\varrho'$$
$$0{,}005845277 = dr + 0{,}6806466 . dr' + 0{,}0100626 . d\varrho'.$$

Hieraus folgt

$$0{,}003341372 = 0{,}6967079 . dr' + 0{,}671087 . d\varrho'$$
$$0{,}003341229 = 0{,}6315840 . dr' + 1{,}928691 . d\varrho'.$$

Dividirt man noch durch den Coefficienten von dr', so ergiebt sich

$$0{,}00479594 = dr' + 0{,}963226 \,.\, d\varrho'$$
$$0{,}00529024 = dr' + 3{,}053736 \,.\, d\varrho'.$$

Man erhält also

$$d\varrho' = + 0{,}000237$$
$$dr' = + 0{,}004568$$
$$dr = + 0{,}002334$$
$$d\varrho = + 0{,}017525.$$

Die Werthe der Krümmungshalbmesser, von welchen wir bei der Berechnung ausgingen, waren folgende (§. 491.):

$$r = + 0{,}13953$$
$$\varrho = - 0{,}53203$$
$$r' = + 0{,}17520$$
$$\varrho' = - 0{,}11665,$$

folglich erhält man die verbesserten Werthe

$$r = + 0{,}141864$$
$$\varrho = - 0{,}514505$$
$$r' = + 0{,}179768$$
$$\varrho' = - 0{,}116413.$$

§. 509.

Wir haben nun in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt, wie man ein achromatisches und aplanatisches Glas, vermittelst zweier Glaslinsen von verschiedenem Brechungsverhältnifs und verschiedener Zerstreuungskraft zusammensetzen kann. Es ist aber zu bemerken, dafs die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei dieser Art von Berechnung nur für eine bestimmte Entfernung des Einfallspunktes des Strahls von der Axe aufgehoben wird; wie in vorigem Beispiel bei einem Winkel von $18^0\ 30'$. Es entsteht nun die Frage, ob man nicht auf irgend eine Art eine bestimmte, durch die Theorie bestätigte Entfernung finden kann, für welche, wenn die ihr entsprechende Abweichung wegen der Kugelgestalt völlig aufgehoben wird, die übrigen Abweichungen die geringste Undeutlichkeit in dem Bilde eines Punktes hervorbringen. In dem sechsten Bande (erste

Abtheilung pag. 437.) der neuen Bearbeitung des Gehlerschen Wörterbuchs befindet sich der Abdruck eines von Gauss an Brandes gerichteten Briefes über diesen Gegenstand, in welchem aber blofs die verschiedenen Resultate, ohne weitere Auseinandersetzung, angegeben werden, und wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, den dahin führenden Calcul darzustellen.

§. 510.

Es sey k die Vereinigungsweite der Strahlen von einem bestimmten Brechungsverhältnifs, welche in der Entfernung $= t$ auf das Glas fallen, so wird sich mit Berücksichtigung der vierten Potenz von t diese Vereinigungsweite immer folgendermafsen ausdrücken lassen:

$$k = a + bt^2 + ct^4,$$

und wir wollen k von der vordern Seite des ersten Glases ab zählen. Die Gleichung der graden Linie, welche diesen Lichtstrahl nach allen Brechungen darstellt, sey

$$y = \alpha x + \beta,$$

wo wir x von demselben Punkte, als k, ab rechnen. Dann gehören die Werthe

$$y = o, \quad x = a + bt^2 + ct^4$$

zusammen, also wird

$$o = \alpha . (a + bt^2 + ct^4) + \beta.$$

Die Coordinaten des Einfallspunktes sind, wie man leicht findet,

$$y = t, \quad x = r - r . \cos \theta,$$

wo r den Krümmungshalbmesser der Vorderseite des ersten Glases bedeutet. Hieraus folgt auch

$$x = r - r . \sqrt{1 - \sin \theta^2}$$

$$= \frac{1}{2} . r . \sin \theta^2 + \frac{1}{8} . r . \sin \theta^4$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{t^2}{r} + \frac{1}{8} . \frac{t^4}{r^3},$$

folglich hat man die zweite Gleichung zur Bestimmung von α, β

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{r} \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right) + 6.$$

Es ergiebt sich hieraus

$$y = \alpha . (x - a - bt^2 - ct^4)$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{t^2}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)$$

$$- \alpha . (a + bt^2 + ct^4)$$

$$y = \frac{2 . (a + bt^2 + ct^4 - x) . r}{2r . (a + bt^2 + ct^4) - t^2 . \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)} \cdot t.$$

§. 511.

Nimmt man nun für x einen besondern Werth an, und denkt sich durch die Axe senkrecht auf selbige durch diesen angenommenen Punkt eine Ebene gelegt, so durchschneidet man auf diese Weise den ganzen Strahlenkegel, und es stellt sich auf der Ebene eine Kreisfläche von bestimmtem Halbmesser y, aber in den verschiedenen Zonen von ungleicher Erleuchtung dar. Es ist nun nicht bloſs nöthig, diesen Kreis so klein als möglich zu machen, sondern man muſs auch suchen die leuchtendern Theile der Axe so nahe als möglich zu bringen, und wir werden diese Bedingung durch das von Gauss am angeführten Orte aufgestellte Princip am besten bewerkstelligen, indem wir das Integral

$$\int yy . \varrho . ds$$

auf den ganzen Durchschnittskreis ausgedehnt zu einem Minimum machen, wo ϱ die Dichtigkeit des Lichts auf dem Durchschnittskreis in einem Abstand $= y$ von der Axe bedeutet, und ds die Fläche des mit den Halbmessern y, $y + dy$ beschriebenen Ringes angiebt. Nun ist aber ϱds die ganze Lichtmenge, welche auf diesen Ring fällt, und da diese auf der Vorderfläche des Glases einer Zone entspricht, die mit den Halbmessern t, $t + dt$ beschrieben ist, deren Fläche also $= 2\pi t dt$ wird, so kann man

$$\varrho ds = tdt$$

setzen, indem man die Dichtigkeit des einfallenden Lichts durch $\frac{1}{2\pi}$ bezeichnet. Wir vernachlässigen hierbei natürlich das Licht, welches theils vom Glase verschluckt wird, theils durch Reflexion an den innern und äuſsern Flächen verloren geht.

§. 512.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo die Durchschnittsebene in dem Punkt der Axe aufgestellt ist, in welchem dieselbe von den Axenstrahlen geschnitten wird, und nehmen zugleich an, das Objectiv sey so eingerichtet, daſs die vom Quadrat von t abhängende Abweichung wegen der Kugelgestalt aufgehoben sey. Dann hat man $x = a$, $b = o$, und es wird

$$y = \frac{2rct^5}{2ar} = \frac{c}{a} \cdot t^5,$$

indem man die höhern Potenzen von t vernachlässigt. Hieraus erhält man

$$\int yy\varrho ds = \frac{cc}{aa} \cdot \int t^{11} dt$$

$$= \frac{cc}{12aa} \cdot T^{12},$$

wo T die halbe Oeffnung des Glases bedeutet, und indem wir dieses Integral durch E bezeichnen ist

$$\frac{cc}{12aa} \cdot T^{12} = E.$$

§. 513.

In dem zweiten Fall lassen wir die Entfernung x des Durchschnitts unbestimmt, nehmen aber gleichfalls an, daſs das von dem Quadrat von t abhängende Glied der Abweichung wegen der Kugelgestalt verschwinde, also $b = o$ sey. Dann bleibt der Ausdruck von

$$y = \frac{(a - x + ct^4) \cdot t}{(a + ct^4) - \frac{t^2}{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)}$$

$$= \frac{t}{a} \cdot (a - x + ct^4) \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2ar} + \frac{t^4}{4a^2r^2} - \frac{c}{a} \cdot t^4 + \frac{t^4}{8ar^3}\right).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$1 + \frac{t^2}{2ar} + \frac{t^4}{4a^2r^2} - \frac{ct^4}{a} + \frac{t^4}{8ar^3} = P,$$

so wird

$$\int yy\varrho ds = \frac{1}{aa} \cdot \int PPt^3dt \, . (a - x + ct^4)^2,$$

wo die Integration nach t von $t = o$ bis $t = T$ ausgeführt werden muſs. Da nun die Gröſse x bei dieser Integration als constant betrachtet wird, und das Integral grade in Hinsicht dieser Gröſse zu einem Minimum gemacht werden soll, so kann man bekanntlich gleich nach dieser Gröſse unter dem Integralzeichen differentiiren, wodurch sich der Ausdruck

$$o = \int PPt^3dt \, . (a - x + ct^4)$$

ergiebt, und man sieht folglich aus demselben, daſs $a - x$ dieselbe Dimension haben muſs, als t^4. Es wird daher erlaubt seyn, da wir in der Entwickelung der Reihe für die Vereinigungsweite k bloſs bis zur vierten Potenz von t inclusive fortgeschritten sind, in dem Werthe von P alle Potenzen von t zu vernachlässigen, wodurch $P = 1$ wird. Dann bleibt

$$\begin{aligned} \int yy\varrho ds &= \frac{1}{aa} \cdot \int t^3dt \, . (a - x + ct^4)^2 \\ &= \frac{1}{aa} \cdot \int t^3dt \, . (a - x)^2 \\ &+ \frac{2c}{aa} \cdot \int t^7dt \, . (a - x) \\ &+ \frac{cc}{aa} \cdot \int t^{11}dt \\ &= \frac{(a - x)^2}{4aa} \cdot T^4 + \frac{c \, . (a - x)}{4aa} \cdot T^8 \\ &\qquad + \frac{cc}{aa} \cdot \frac{T^{12}}{12}, \end{aligned}$$

also, wenn dieser Ausdruck nach x differentiirt und dann Null gesetzt wird,

$$o = 2 \, . (a - x) + cT^4$$

$$a - x = - \frac{c}{2} \cdot T^4.$$

Substituirt man diesen Ausdruck von $a - x$ in den Werth

$$\left((a-x)^2 + c.(a-x).T^4 + \frac{1}{3}\cdot ccT^8\right)\cdot\frac{T^4}{4aa}$$

des vorigen Integrals, so kommt

$$\left(\frac{cc}{4} - \frac{cc}{2} + \frac{1}{3}\cdot cc\right)\cdot\frac{T^{12}}{4aa}$$

$$= \frac{1}{48}\cdot\frac{T^{12}.cc}{aa} = \frac{1}{4}\cdot E,$$

also ist in diesem Fall das als Maafs angenommene Integral nur der vierte Theil des vorigen. Setzt man diesen Werth von $a - x$ in den Ausdruck

$$y = \frac{t}{a}\cdot(a - x + ct^4),$$

so kommt

$$y = \frac{ct}{a}\cdot\left(t^4 - \frac{1}{2}\cdot T^4\right),$$

und dies wird Null, wenn $t = o$, und wenn

$$t = T.\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}$$

ist. An der angeführten Stelle des physicalischen Wörterbuchs befindet sich, wahrscheinlich durch einen Druckfehler, statt dieses Factors $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$, blofs der Factor $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

§. 514.

Was den dritten Fall betrifft (der in dem angeführten Briefe nicht betrachtet ist, allein der Analogie wegen mit dem ersten einer Berücksichtigung verdient), so nehmen wir an, die Durchschnittsebene befinde sich an der Stelle, wo die Axenstrahlen die Axe des Glases schneiden, und aufserdem sey das zusammengesetzte Glas so eingerichtet, dafs die Abweichung für einen bestimmten Werth von $t = \theta$ bis zur vierten Potenz von t inclusive aufgehoben sey. Man hat unter diesen Bedingungen

$$x = a,\quad b\theta^2 + c\theta^4 = o,$$

und aus dieser Gleichung folgt

$$b = -c\theta^2,$$

so daſs man also vermittelst dieses Werthes die Gröſse b in dem Ausdruck von y eliminiren kann. Hierdurch wird

$$y = \frac{(ct^4 - ct^2\theta^2).t}{(a + ct^4 - ct^2\theta^2) - \frac{t^2}{2r}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{r^2}\right)},$$

wo man aber statt des ganzen Nenners, da die höhern Potenzen von t vernachlässigt werden, bloſs a zu setzen braucht. Es ist also

$$y = \frac{ct^3}{a}\cdot(t^2 - \theta^2)$$

$$\int yy\varrho ds = \frac{cc}{aa}\cdot\int t^7 dt.(t^2 - \theta^2)^2$$

$$= \frac{cc}{aa}\cdot\left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}}{5}\cdot\theta^2 + \frac{T^8}{8}\cdot\theta^4\right).$$

Differentiirt man nach θ, um diesen Ausdruck zu einem Minimum zu machen, so erhält man

$$o = \tfrac{1}{2}.T^8\theta^3 - \tfrac{2}{5}.T^{10}\theta,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\theta = T.\sqrt{\tfrac{4}{5}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in den Werth des Integrals

$$\frac{cc}{aa}\cdot T^8\cdot\left(\frac{\theta^4}{8} - \frac{\theta^2T^2}{5} + \frac{T^4}{12}\right),$$

so kommt

$$\frac{cc}{aa}\cdot T^{12}\cdot\left(\frac{2}{25} - \frac{4}{25} + \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{cc}{aa}\cdot\frac{T^{12}}{12.25} = \frac{1}{25}\cdot E.$$

§. 515.

In dem vierten und letzten Fall bestimmen wir x anfangs nicht, sondern fügen nur die Bedingung hinzu, daſs es so angenommen werden müsse, daſs das Integral $\int yy\varrho ds$ ein Minimum werde. Auſserdem setzen wir voraus, das Glas sey so eingerichtet, daſs die Abweichung wegen der Kugelgestalt für einen bestimmten

Werth von $t = \theta$ bis zur vierten Potenz von t inclusive verschwinde, so daſs wir wieder die Gleichung

$$b = -c\theta^2$$

haben. Hierdurch wird

$$y = \frac{(a - x + ct^4 - ct^2\theta^2) \,.\, t}{(a + ct^4 - ct^2\theta^2) - \frac{t^2}{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)}.$$

Allein man sieht leicht ein, daſs die Gröſse $a - x$ dieselbe Dimension als t^4 erhalten werde, weswegen man statt des Nenners bloſs a zu setzen braucht. Dann ist

$$y = \frac{t}{a} \cdot (a - x + ct^4 - ct^2\theta^2)$$

$$\begin{aligned} \int yy\varrho ds = & \frac{(a-x)^2}{aa} \cdot \int t^3 dt \\ & + \frac{2.(a-x).c}{aa} \cdot \int t^3 dt \,.\, (t^4 - t^2\theta^2) \\ & + \frac{cc}{aa} \cdot \int t^3 dt \,.\, (t^4 - t^2\theta^2)^2 \\ = & \frac{(a-x)^2}{aa} \cdot \frac{T^4}{4} \\ & + \frac{2.(a-x).c}{aa} \cdot \left(\frac{T^8}{8} - \frac{T^6\theta^2}{6}\right) \\ & + \frac{cc}{aa} \cdot \left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}\theta^2}{5} + \frac{T^8\theta^4}{8}\right). \end{aligned}$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, um ihn zu einen Minimum zu machen, sowohl nach x als nach θ, und setzt die daraus hervorgehenden Differentialcoefficienten besonders Null, so erhält man die beiden Gleichungen

$$o = \frac{a-x}{4} + c \,.\left(\frac{T^4}{8} - \frac{T^2\theta^2}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} o = & -\frac{2.(a-x).c}{aa} \cdot \frac{\theta}{3} \\ & + \frac{cc}{aa} \cdot \left(\frac{T^2\theta^3}{2} - \frac{2T^4\theta}{5}\right). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\frac{a-x}{4} = c \,.\left(\frac{3T^2\theta^2}{16} - \frac{3T^4}{20}\right),$$

folglich wird

$$\frac{3}{16} \cdot \theta^2 - \frac{3}{20} \cdot T^2 + \frac{1}{8} \cdot T^2 - \frac{1}{6} \cdot \theta^2 = o,$$

und hieraus erhält man

$$\theta = T . \sqrt{\tfrac{6}{5}};$$

$$a - x = \frac{3}{10} \cdot c T^4.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck des Integrals

$$+ \frac{(a-x)^2}{aa} \cdot \frac{T^4}{4}$$
$$+ \frac{2.(a-x).c}{aa} \cdot \left(\frac{T^8}{8} - \frac{T^6\theta^2}{6}\right)$$
$$+ \frac{cc}{aa} \cdot \left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}\theta^2}{5} + \frac{T^8\theta^4}{8}\right),$$

so wird derselbe

$$= \frac{1}{1200} \cdot \frac{cc}{aa} \cdot T^{12} = \frac{1}{100} \cdot E.$$

Der Werth von y war allgemein in diesem Fall

$$y = \frac{t}{a} \cdot (a - x + ct^4 - ct^2\theta^2),$$

und substituirt man hierin die Werthe von $a - x$ und θ, so kommt:

$$y = \frac{tc}{a} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot T^4 + t^4 - \frac{6}{5} \cdot t^2 T^2\right).$$

Dies wird Null für $t = o$, und für

$$t = \pm \sqrt{\frac{6 - \sqrt{6}}{10}} \cdot T$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{6 + \sqrt{6}}{10}} \cdot T.$$

In der angeführten Stelle des physicalischen Wörterbuchs ist das Wurzelzeichen vor dem ganzen Ausdruck vergessen.

Es ergiebt sich also aus der in dem letzten Fall geführten Untersuchung, daſs die Undeutlichkeit des Bildes eines in der Axe liegenden Punktes am kleinsten

wird, sobald man eine solche Art einfallender Strahlen wählt, die gar nicht mehr das Glas treffen, da der Bruch $\sqrt{\frac{6}{5}}$ die Einheit übertrifft.

Man könnte nun auf die angegebene Art immer weiter fortgehen, und eine Zusammensetzung von drei Gläsern berechnen, wobei noch zwei Bedingungen mehr erfüllt werden könnten, oder bei denen man auch zwei Halbmesser der Krümmung im Voraus als gegeben ansehen könnte, und man dann bloſs die vier bei dem Doppelglase angeführten Bedingungen zu erfüllen hätte. Obgleich man nun früher wirklich die Zusammensetzung von drei Gläsern benutzte, so wird doch hierbei immer mehr Licht verloren gehen, als bei einer Zusammensetzung von bloſs zwei Gläsern, und doch dabei kein wesentlicher Vortheil erreicht werden.

Von den Fernröhren.

§. 516.

Unter Fernrohr versteht man eine solche Zusammensetzung von Gläsern, vermöge deren man entfernte Gegenstände vergröſsert sehen kann, und wobei man natürlich so wenig Gläser als möglich anwenden wird, um allen bei der Reflexion vorfallenden Lichtverlust, so viel als geschehen kann, zu vermeiden. Das dem Gegenstande zugewendete Glas heiſst das Objectivglas, das dem Auge nächste das Ocularglas; beide können einfach und zusammengesetzt seyn. Befindet sich zwischen dem Objectiv und dem Ocular noch ein drittes Glas, so heiſst dieses das Collectivglas, welches in manchen Fällen mit Nutzen eingeschoben werden kann. Was den ersten Erfinder des Fernrohrs betrifft, so ist derselbe nicht genau ausgemittelt, und ohne uns weiter

in Untersuchungen hierüber einzulassen, die mehr in eine Geschichte der Optik gehören, bemerken wir nur, daſs die ersten Fernröhre zu Ende des sechszehnten und zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts zum Vorschein kamen.

§. 517.

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall, wo das Fernrohr aus einem einfachen Objectivglase, dessen Brennweite $= f$, und einem einfachen Ocularglase, von der Brennweite f', zusammengesetzt ist, und nehmen an, die Entfernung des zu beobachtenden Gegenstandes sey so groſs, daſs man sie gegen die Dimensionen des Fernrohrs selbst als unendlich betrachten kann. Sind nun, wie gewöhnlich, h, h' die Entfernungen des Objects und der Bilder von den resp. Gläsern, k, k' ihre Sammlungsweiten, l der Abstand beider Gläser von einander, so hat man die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

$$k + h' = l,$$

oder, da unserer Annahme zufolge $h = \infty$ gesetzt werden soll,

$$f + h' = l$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

und hieraus, wenn h' eliminirt wird,

$$\frac{1}{l-f} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}.$$

Gesetzt nun, das hinter dem Ocularglase befindliche Auge sieht auf die Entfernung $= \omega$ deutlich, so muſs das zweite Glas, dessen Brennweite $= f'$ war, das Bild in einer Entfernung $= \omega$ vor dem Glase zeigen, wenn wir den Abstand des Auges vom Glase selbst, der gegen ω immer nur gering seyn wird, bei Seite

setzen. Dann muſs man in der vorigen Gleichung $-\omega$ statt k' substituiren, da im Normalfall, auf welchem die vorigen Gleichungen beruhen, immer angenommen wird, das Bild werde hinter jedem Glase hervorgebracht; dann bleibt

$$\frac{1}{l-f} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{f'}$$

$$l = \frac{f + f' + \frac{ff'}{\omega}}{1 + \frac{f'}{\omega}}.$$

§. 518.

Sieht das Auge auf sehr groſse Entfernungen deutlich, so darf man $\frac{1}{\omega} = o$ nehmen, und dann bleibt ganz einfach

$$l = f + f',$$

also die Entfernung der Gläser von einander gleich der Summe ihrer Brennweiten. Bezeichnet man diesen Werth von l durch L, so wird

$$L - l = f + f'$$

$$- \frac{f + f' + \frac{ff'}{\omega}}{1 + \frac{f'}{\omega}}$$

$$= \frac{f'f'}{f + \omega}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist immer positiv, das Ocularglas mag eine positive oder negative Brennweite besitzen, d. h. es mag ein convexes oder ein concaves Glas seyn, und da ferner die Brennweite des Oculars immer gegen ω klein ist, so bleibt jedenfalls $f' + \omega > 1$, also ist der Unterschied $L - l$ positiv, und hierans ergiebt sich, daſs die Entfernung beider Gläser von einander für kurzsichtige Augen kleiner ausfällt, als für

weitsichtige. Sollte freilich das Fernrohr so grofs seyn, dafs man genöthigt wäre, ein Ocular von einer Brennweite zu wählen, die gröfser ist, als der Abstand, auf welchen das Auge deutlich sieht, so würde bei einem concaven Ocular $\omega - f'$ negativ ausfallen, und also das Ocular vom Objectiv entfernt werden müssen, wenn das Auge nicht etwa übersichtig wäre, d. h. vermittelst convergenter Strahlen deutlich sehen könnte.

§. 519.

Es können also hierbei zwei Fälle Statt finden, um aus einem einfachen Objectiv und Ocular ein Fernrohr zusammen zu setzen, indem entweder der Ocular mit negativer oder mit positiver Brennweite genommen wird. Die erste Zusammensetzung ist die älteste, und ein solches Fernrohr führt den Namen des Galilaeischen, weil dieser Mathematiker, so viel man weifs, zuerst durch ein solches selbst verfertigtes Fernrohr Beobachtungen am Himmel angestellt hat. Man nennt dasselbe wohl auch das Holländische, weil diese Art von Fernröhren ebenfalls anfänglich in Holland construirt wurde. Jetzt ist dieses Fernrohr ganz aufser Gebrauch gekommen, und wird höchstens nur zu kleinen Taschenperspectiven angewendet.

Da die Entfernung beider Gläser von einander immer der Summe der Brennweiten derselben, im algebraischen Sinne genommen, gleich seyn mufs, so ergiebt sich, dafs bei dem Galilaeischen Fernrohr, wo $l = f - f'$, die Brennweite des Objectivs gröfser als die Länge des Fernrohrs seyn mufs, also die durch das Objectiv zur Convergenz gebrachten Strahlen schon früher vom Ocularglas aufgefangen werden, als das Bild entsteht. Dies konnte man schon ohne weitere Rechnung bemerken; denn da zum deutlichen Sehen nothwendig ist, dafs die von einem Punkte herkommenden Strahlen nur wenig Divergenz besitzen, so würde, wenn man das Ocular hinter das vom Objectiv hervorgebrachte Bild

gestellt hätte, die Divergenz der schon vom Bilde divergent kommenden Strahlen so vermehrt worden seyn, daſs das deutliche Sehen unmöglich geworden wäre.

§. 520.

Nach §. 417. haben wir allgemein den Ausdruck der Vergröſserung durch n Gläser

$$\frac{k \,.\, k' \,.\, k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' \,.\, h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0},$$

wo ω die Weite des deutlichen Sehens und f^0 die Brennweite des letzten Glases bedeutet. In unserm Fall haben wir nun für das holländische Fernrohr

$$f^0 = -f', \quad k = f, \quad n = 2,$$

also bleibt ganz einfach die Vergröſserungszahl, die wir durch m bezeichnen,

$$m = -\frac{f \,.\, (\omega - f')}{\omega f'},$$

oder, wenn wir ω gegen f' als bedeutend betrachten, $m = -\frac{f}{f'}$. Das negative Vorzeichen bedeutet bloſs, daſs das Bild eine andere Lage hat, als in dem dort betrachteten Normalfall, wo es gegen das Object verkehrt war; es erscheint also das Object, durch ein Galilaeisches Fernrohr betrachtet, aufrecht in seiner natürlichen Lage. Setzen wir $-\frac{f}{f'} = M$, so ist auch

$$m = M \cdot \frac{\omega - f'}{\omega},$$

welcher Ausdruck von m immer kleiner als M ist; folglich hat ein kurzsichtiges Auge durch ein galilaeisches Fernrohr eine geringere Vergröſserung.

§. 521.

Um den Ort zu finden, wo ein Hauptstrahl, der vom Ende eines Objects durch die Mitte des ersten Glases geht, nach der Brechung durch das zweite Glas die Axe schneidet, hat man nach §. 408.

$$u' = \frac{h'.(\alpha' - \psi'')}{\psi_{,}''},$$

und nach §. 407.

$$\psi'' = \alpha, \quad \psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\alpha' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha;$$

wo α denjenigen Winkel bedeutet, welchen der vom Endpunkt des Objects durch die Mitte des Objectivs gehende Strahl mit der Axe bildet. Man erhält hieraus

$$\psi_{,}'' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha - \frac{k}{k'} \cdot \alpha - \frac{h'}{k'} \cdot \alpha$$

$$u' = \frac{\frac{k}{h'} + 1}{\frac{k}{h'} + \frac{k}{k'} + \frac{h'}{k'}} \cdot h',$$

$$= \frac{k + h'}{k + \frac{h'h' + kh'}{k'}} \cdot h',$$

und da aufserdem noch die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

Statt finden, welche in unserm Fall, wo das Object als unendlich entfernt angesehen wird, und die gebrochenen Strahlen hinter dem zweiten Glase parallel ausfahren sollen, so dafs $h = \infty$, $k' = \infty$ gesetzt werden mufs, in

$$k = f, \quad h' = f', \quad k + h' = l$$

übergehen, wo l die Länge des Fernrohrs bedeutet, so wird

$$u' = \frac{f'l}{f},$$

allein da in unserm Fall die Brennweite f' des Ocularglases negativ ist, so folgt, dafs dieser Durchschnitts-

punkt jenseits des Glases zwischen dem Ocular und dem Objectiv liegt. Nach §. 422. giebt ferner dieser Werth von u' den Abstand vom Glase an, welchen das Auge in seiner vortheilhaftesten Stellung einnehmen mufs, um die gröfstmöglichste Fläche übersehen zu können. Da man nun aber bei dem Galilaeischen Fernrohr, wo u' einen negativen Werth erhält, keinesweges das Auge an die besagte Stelle bringen kann, so folgt, dafs man, um so viel als möglich übersehen zu können, das Auge hart an das Glas stellen mufs, so dafs die Mitte des Glases mit dem Mittelpunkt der Pupille zusammenfällt. Ferner ist, aus §. 408., der Werth der Entfernung von der Axe, in welcher der durch die Mitte des Objectivs gehende Hauptstrahl, welcher unter einem Winkel $= \alpha$ vom Object herkommt, das Ocular trifft,

$$\tau' = (u - l) . \psi'',$$

und da $u = o$, $\psi'' = \alpha$ (§. 407. 408.), so ergiebt sich hieraus

$$\tau' = - l\alpha.$$

Das negative Vorzeichen deutet blofs an, dafs das Glas von dem Strahl unter der Axe geschnitten wird, und vernachlässigt man dasselbe, so ergiebt sich

$$\alpha = \frac{\tau'}{l}.$$

Ist nun τ' der Halbmesser der Oeffnung des Ocularglases, so wird α der Halbmesser des Gesichtsfeldes seyn, welches dieses Fernrohr besitzt. Allein in vorliegendem Fall des Galilaeischen Fernrohrs, wo das Auge hart an das Ocular gestellt werden mufs, sieht man leicht ein, dafs die ganze Fläche des Ocularglases, welche über die Gröfse der Pupille hinausgeht, völlig ohne Nutzen ist, und die Umstände grade so sind, als ob das Ocularglas nicht gröfser als die Pupille wäre. Hieraus ist einleuchtend, dafs das Gesichtsfeld des Galilaeischen Fernrohrs sehr klein ausfallen mufs, da in der vorigen Formel $\alpha = \frac{\tau'}{l}$ statt τ' der Halbmesser

der Oeffnung der Pupille ungefähr ein Zwölftheil Zoll gesetzt werden mufs. Dies ist auch der Grund gewesen, dafs man das Galilaeische Fernrohr für stärkere Vergröfserungen bald bei Seite gelegt hat, und dasselbe nur noch bei ganz geringer Länge und geringer Vergröfserung anwendet.

§. 522.

Wollte man z. B. ein Galilaeisches Taschenperspectiv verfertigen, dessen halbes Gesichtsfeld einen Grad betrüge, so hat man, da $1^0 = 0{,}01745$,

$$\frac{1}{12 \,.\, l} = 0{,}01745,$$

also ungefähr $l = 4{,}8$ Zoll. Wendet man nun rücksichtlich der Deutlichkeit der Bilder auf das Galilaeische Fernrohr die in §. 472. entwickelte Formel an, indem man annimmt, das Objectiv dieses Fernrohrs sey einfach, also nicht achromatisch, so hat man, wenn m die Vergröfserung, f die Brennweite des Objectivs bedeutet,

$$\frac{109 \times 110}{30} = \frac{m \,.\, (m + 1)}{f}.$$

Es ist aber aufserdem noch $m = \frac{f}{f'}$, $f - f' = 4{,}8$ Zoll $= \frac{2}{5}$ Fufs, folglich erhält man auch

$$m = \frac{5f}{5f - 2}$$

$$m \,.\, (m + 1) = \frac{5f \,.\, (10f - 2)}{(5f - 2)^2},$$

und hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$1199 = \frac{15 \,.\, (10f - 2)}{(5f - 2)^2}.$$

Löfst man diese quadratische Gleichung auf, so erhält man

$$f = 0{,}4342 \text{ und } f = 0{,}3708,$$

von welchen Werthen nur der erste für unsern Zweck passend ist. Da nun $f - f' = 0{,}4$, so wird $f = 0{,}0342$.

Es würde also hiernach möglich seyn, eine Vergröſserung $m = \frac{4342}{342} = 13$ hervorzubringen, ohne daſs die Undeutlichkeit gröſser würde, als die des §. 472. zu Grunde gelegten Normalfernrohrs von Huyghens, dessen Vergröſserung 109 bei einer Brennweite = 30 Fuſs ist. Die hier gefundenen Brennweiten des Objectivs und des Oculars sind ebenfalls in Theilen des Fuſses ausgedrückt.

§. 523.

Was die Gröſse betrifft, die das Objectivglas haben muſs, damit der auf dasselbe fallende Strahlencylinder, nachdem er gebrochen worden, die Fläche des Ocularglases völlig ausfülle, so findet sich dieselbe nach §. 404. Bezeichnet man nämlich den Halbmesser der Oeffnung des Objectivs durch t, den der Oeffnung des Oculars durch t', so ist

$$t' = -\frac{h'}{k} \cdot t.$$

In vorliegendem Fall hat man aber $h' = -f'$, $k = f$, also auch

$$t = +\frac{f}{f'} \cdot t'.$$

Da nun, angegebener maſsen, das Ocularglas nicht gröſser als die Pupille zu seyn braucht, also statt t' der Halbmesser der Pupille gesetzt werden muſs, und auſserdem das Verhältniſs $\frac{f}{f'}$ die Vergröſserungszahl des Fernrohrs angiebt, so folgt, daſs der Halbmesser der Oeffnung des Objectivs gefunden wird, indem man den Halbmesser der Pupille mit der Vergröſserungszahl multiplicirt. Ein gröſserer Halbmesser würde überflüssig seyn, da die weiter von der Axe auf das Objectivglas fallenden Strahlen nicht mehr ins Auge gelangen; also die Helligkeit des Objects nicht vermehren. Giebt man dem Objectiv den besagten Halbmesser, so ist die

Helligkeit des durchs Fernrohr gesehenen Objects der mit dem bloſsen Auge gesehen gleich. Ist der Halbmesser kleiner als $= t^0$, so ist die Helligkeit $= \frac{t^0 t^0}{tt}$, wenn wir die mit dem bloſsen Auge als Einheit annehmen.

§. 524.

Wir gehen jetzt zu dem zweiten Fall des Fernrohrs mit zwei Gläsern über, und sehen die Brennweiten sowohl des Objectivs als des Oculars als positiv an, so daſs beide aus convexen Gläsern bestehen. Dieses Fernrohr ist zuerst von Kepler angegeben, nach welchem es das Keplersche Fernrohr genannt wird, auch führt es den Namen des astronomischen Fernrohrs. Bei der Untersuchung desselben können wir alle für das Galilaeische Fernrohr geführten Rechnungen im Allgemeinen wieder benutzen, wenn wir nur bemerken, daſs die Brennweite f' des Ocularglases positiv ist. Wir haben also hier ebenfalls den Satz, daſs die Länge des Fernrohrs oder die Entfernung beider Gläser von einander der Summe der Brennweiten derselben gleich ist, und da beide Brennweiten wirklich positiv sind, so wird die Brennweite des Objectivs kleiner als die Entfernung beider Gläser von einander, und es entsteht im Brennpunkt des Objectivs ein wirkliches Bild des Gegenstandes.

Die Vergröſserung dieses Fernrohrs findet sich §. 520., $m = \frac{f}{f'}$, wenn wir in dem daselbst entwickelten Ausdruck f' negativ setzen, und der positive Werth dieses Verhältnisses zeigt an, daſs die Lage des Bildes wie im Normalfall, d. h. der Lage des Gegenstandes, entgegengesetzt ist, und daher der Gegenstand im astronomischen Fernrohr verkehrt erscheint.

§. 525.

Für die Entfernung des Auges von dem Ocularglase, wenn es die gröſstmöglichste Fläche übersehe,

hat man, nach §. 521., $u' = f'$, also mufs das Auge hinter dem Ocular eine Entfernung haben, die der Brennweite des Oculars gleich kommt. Um nun die Gröfse des Gesichtsfeldes zu erhalten, mufs man bedenken, dafs bei der angegebenen Lage des Auges alle Strahlencylinder, welche durch das Ocular hindurch gehen, auch das Auge treffen werden. Die Gröfse dieses Gesichtsfeldes wird daher gefunden, indem wir den Halbmesser der Oeffnung des Oculars durch die Länge des Fernrohrs dividiren. Bezeichnen wir also den besagten Halbmesser durch t', den in Bogen ausgedrückten Halbmesser des Gesichtsfeldes durch α, so ist

$$\alpha = \frac{t'}{f + f'},$$

und da t' durch keine Bedingung bestimmt wird, so sieht man, dafs das Gesichtsfeld von beliebiger Gröfse angenommen werden könnte, wenn nicht der Umstand, dafs diejenigen Strahlen, welche unter grofsen Winkeln gegen die Axe auf das Ocular fallen, eine zu grofse Undeutlichkeit wegen ihrer unregelmäfsigen Brechung hervorbringen, die Gröfse t' des Halbmessers des Oculars bedeutend einschränkte. Man wird insgemein das Ocular nicht viel gröfser machen dürfen, als dafs alle Strahlen, welche auf das Objectiv parallel mit der Axe einfallen, durch das Ocular gehen können. Nennt man dann den Halbmesser der Oeffnung des Objectivs t, so ist

$$t' = \frac{tf'}{f}.$$

§. 526.

Der Winkel, unter welchen ein Strahl, der unter dem Winkel α gegen die Axe geneigt, durch die Mitte des Objectivs geht, hinter dem zweiten Glase, dem Ocular, die Axe schneidet, ist §. 407. durch $\psi_{\prime}''$ bezeichnet, und für denselben die Gleichung

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\alpha' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

angegeben. Da nun im vorliegenden Fall $k = f$, $h' = f'$, $k' = \infty$, so bleibt

$$\psi_{,}'' = - \frac{f}{f'} \cdot \alpha.$$

Es drückt aber das Verhältnifs $\frac{f}{f'}$ die Vergröfserungszahl m aus; man kann also diesen Ausdruck auch so schreiben:

$$\psi_{,}'' = - m\alpha, \quad \alpha = - \frac{\psi_{,}''}{m},$$

wo das negative Vorzeichen nichts weiter bedeutet, als dafs der Strahl, welcher von einem über der Axe gelegenen Punkte des Objects herkommt, nach seiner Brechung von einem unter der Axe befindlichen Punkte zu kommen scheint. Der Winkel $\psi_{,}''$ ist also das vergröfserte Gesichtsfeld.

§. 527.

Was nun die Helligkeit anbetrifft, mit welcher das Object durch das Fernrohr gesehen erscheint, so ist einleuchtend, dafs, wenn wir einen in der Axe gelegenen unendlich entfernten Punkt betrachten, das Auge blofs den aus dem Ocular hervortretenden Strahlencylinder erhält, dessen Basis der Fläche der Pupille gleich ist; folglich brauchte man in dieser Rücksicht das Ocular nicht gröfser als die Pupille zu machen. Es sey nun der Halbmesser der Pupille $= p$, so mufs der Halbmesser t des Objectivs

$$t = \frac{pf}{f'}$$

werden, indem man nur in der letzten Formel des §. 525. p statt t' schreibt, wenn der auf das Objectiv fallende Strahlencylinder nach erlittener Brechung hinter

dem Ocular einen der Pupille gleichen Raum ausfüllen soll. Ist das Objectiv gröſser, so wird die Helligkeit nicht vermehrt, weil in diesem Fall die auſserhalb der besagten Gränze liegenden Strahlen des einfallenden Strahlencylinders auch hinter dem Ocular das Auge auſserhalb der Pupille treffen, also zum Sehen nichts beitragen. Hat aber das Objectiv die angegebene Gröſse, so ist die Helligkeit des Gegenstandes durch das Fernrohr der mit dem bloſsen Auge gesehen gleich, wenn wir das in den brechenden Materien verloren gehende Licht nicht berücksichtigen. Ist im Gegentheil der Halbmesser des Objectivs kleiner $= t^0$, so verhalten sich die Helligkeiten wie die Grundflächen der Strahlencylinder, d. h. wie $tt : t^0 t^0$. Setzen wir also die mit bloſsem Auge gesehene Helligkeit der Einheit gleich, so wird dieselbe für ein Objectivglas vom Halbmesser t^0, wo $t^0 < t$,

$$= \left(\frac{t^0 . f'}{pf}\right)^2.$$

Nun ist aber $f = f'm$, wo m die Vergröſserung andeutet, also auch der Ausdruck der Helligkeit

$$= \left(\frac{t^0}{pm}\right)^2.$$

§. 528.

Da ferner ein und dasselbe Objectivglas, indem man verschiedene Oculare anwendet, zu verschiedenen Vergröſserungen gebraucht werden kann, wenigstens in dem Fall, wo selbiges ein zusammengesetztes achromatisch-aplanatisches Glas ist, so sey die stärkste Vergröſserung, welche man anwenden kann, ohne die Helligkeit geringer zu machen, als die mit dem bloſsen Auge gesehene, $= m^0$, dann hat man die Gleichung

$$1 = \left(\frac{t^0}{pm^0}\right)^2.$$

Sucht man hieraus den Werth von $\frac{t^0}{p}$, und substituirt

ihm in obigen Ausdruck $\left(\frac{t^0}{pm}\right)^2$, so erhält man die Helligkeit bei der Vergröſserung m

$$= \frac{m^0 m^0}{mm},$$

wo der Natur der Sache nach die Formel nur anwendbar ist, so lange m gröſser als m^0 ist; denn wenn m^0 gröſser als m angenommen wird, so ist das Verhältniſs $\frac{m^0 m^0}{mm}$ gröſser als die Einheit, welches nicht möglich ist, und man muſs in allen solchen Fällen hierfür die Einheit substituiren.

Hat das Objectiv z. B. eine Oeffnung, deren Halbmesser 4,5 Zoll beträgt, wie das in Dorpat befindliche, und setzt man den Halbmesser der Pupille $= \frac{1}{12}$ Zoll, so hat man $t^0 = 4{,}5$, $p = \frac{1}{12}$, $m^0 = 12 \times 4{,}5 = 54$. Bis zu 54facher Vergröſserung ist also die Helligkeit der Gegenstände durch das Fernrohr gesehen, der mit dem bloſsen Auge gleich, allein bei stärkern Vergröſserungen nimmt dieselbe im quadratischen Verhältnisse der Vergröſserung ab. So beträgt sie z. B. bei 480 facher Vergröſserung nur $\left(\frac{54}{480}\right)^2 = \frac{1}{79}$.

§. 529.

In so fern das astronomische Fernrohr, wie dies in den ältern Zeiten der Fall immer war, ein einfaches Objectiv besaſs, war für jede Art von Farbenstrahlen ein besonderer Brennpunkt vorhanden. Denkt man sich nun in dem Punkte der Axe, in welchem sich der Brennpunkt der mittlern Farbenstrahlen befindet, eine Ebene senkrecht auf der Axe errichtet, so bilden die rothen Strahlen sowohl als die violetten auf dieser Ebene Kreise, deren Durchmesser merklich gleich sind. Es sey der Abstand des Sammlungspunkts der rothen Strahlen von dem der mittlern $= q$, der Abstand des Sammlungspunktes der mittlern Strahlen vom Glase $= f$, der Halbmesser des Objectivs $= t$, so ist der

Halbmesser des rothen Strahlenkreises, wie man leicht findet,

$$= \frac{qt}{f + q},$$

und der des violetten, da der Abstand des Sammlungspunktes der violetten Strahlen von dem der mittlern ebenfalls $= q$ gesetzt werden kann,

$$= \frac{qt}{f - q}.$$

Da nun aber q sehr klein gegen f ist, so kann man die Potenzen von q vernachlässigen, und es bleibt der gemeinschaftliche Halbmesser beider Kreise $= \frac{qt}{f}$. Nun ist aber, wenn r, ϱ die Halbmesser der Krümmungen des Glases, $n, n - \delta n$ die Brechungsverhältnisse für die mittlern und rothen Strahlen bedeuten, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases für Axenstrahlen,

$$f = \frac{r\varrho}{(n - 1).(r + \varrho)}$$

$$f + q = \frac{r\varrho}{(n - 1 - \delta n).(r + \varrho)}$$

$$= \frac{f.(n - 1)}{n - 1 - \delta n} = f + f\delta\nu,$$

indem wir, wie schon früher geschehen ist, das Zerstreuungsverhältnifs $\frac{\delta\nu}{n - 1}$ durch δn bezeichnen; es wird daher $q = f\delta\nu$, und der Halbmesser des farbigen Kreises $= t\delta\nu$.

§. 530.

Wird dieser Kreis durch ein Ocular von der Brennweite f' betrachtet, so ist der Gesichtswinkel, unter welchem er dem Auge erscheint $= \frac{t}{f'} \cdot \delta\nu$, also die Fläche des Bildes auf der Netzhaut dem Quadrat

$$\frac{tt}{f'f'} \cdot \delta\nu^2$$

proportional, und die Undeutlichkeit wird immer desto gröſser seyn, je gröſser dieser Ausdruck ist, d. h. bei gleichbleibender Brennweite des Oculars, je mehr der Halbmesser des Objectivs vergröſsert wird. Man muſste also durch practische Untersuchungen ausmachen, wie weit man in der Gröſse des Halbmessers der Oeffnung des Objectivs gehen konnte, ohne die Gegenstände zu undeutlich zu machen. Bei dem in §. 472. von Huyghens angegebenen Fernrohr konnte t ungefähr zu 1,4 Zoll angenommen werden. Für ein anderes Fernrohr, welches dieselbe Deutlichkeit haben soll, sey der Halbmesser der Oeffnung $= T$, die Brennweite des Oculars $= F'$, so hat man

$$\frac{tt}{f'f'} = \frac{TT}{F'F'}.$$

Die gleiche Helligkeit erfordert nach §. 527. die Gleichung

$$\frac{tf'}{f} = \frac{TF'}{F},$$

wo f und F die Brennweiten der Objective sind. Endlich hat man nach §. 472. noch die Gleichung

$$\frac{mm}{f} = \frac{MM}{F},$$

wo M die Vergröſserungszahl des zweiten Fernrohrs bedeutet, wenn beide Fernröhren gleiche Deutlichkeit wegen der durch das Ocular Statt findenden Winkelabweichung der Farbenstrahlen besitzen sollen. Führt man statt f', F', die Werthe $\frac{f}{m}$, $\frac{F}{M}$ ein, so lassen sich vorige Gleichungen auch so schreiben:

$$\frac{tm}{f} = \frac{TM}{F},$$

$$\frac{t}{m} = \frac{T}{M},$$

wo die dritte schon in den beiden ersten enthalten ist. Hieraus folgt

$$F = \frac{MM}{mm} \cdot f$$

$$T = \frac{M}{m} \cdot t$$

$$F' = \frac{M}{mm} \cdot f,$$

wo man $f = 30$ Fuſs $= 360$ Zoll, $m = 109$, $t = 1{,}4$ Zoll zu setzen hat. Eine 436fache Vergröſserung erfordert also eine Brennweite

$$F = 480 \text{ Fuſs}$$
$$T = 5{,}6 \text{ Zoll}$$
$$F' = 13{,}2 \text{ Zoll.}$$

Man sieht also, welche ungeheure Dimensionen die alten chromatischen Fernröhre haben muſsten, wenn sie bei starken Vergröſserungen die Gegenstände mit hinreichender Deutlichkeit zeigen sollten. Was die Helligkeit durch ein so eingerichtetes Fernrohr betrifft, so erhält man dieselbe allgemein nach §. 527.

$$= \left(\frac{TF'}{pF}\right)^2,$$

oder da $\frac{tf'}{f} = \frac{TF'}{F}$, so wird selbige auch

$$= \left(\frac{tf'}{pf}\right)^2 = \left(\frac{t}{pm}\right)^2$$

$$= \left(\frac{12 \times 1{,}4}{109}\right)^2 = \frac{1}{42}.$$

Sie ist also für alle Fernröhre gleich groſs, und sehr gering.

§. 531.

Stellt man hinter dem Objectivglas, ehe die Strahlen in den Brennpunkt versammelt werden, noch ein anderes convexes Glas auf, so wird die Rechnung für ein solches mit einem sogenannten Collectivglase versehenes Fernrohr folgendermaſsen geführt. Es seyen die Brennweiten der drei Gläser f, f', f'', die Entfernung des ersten vom zweiten $= l$, die des zweiten vom dritten $= l'$, so hat man die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''}$$
$$h' + k = l$$
$$h'' + k' = l'.$$

Kommen nun die Strahlen von einem unendlich entfernten Punkt her, so ist $h = \infty$, und sollen die Strahlen aus dem letzten oder Ocularglas parallel mit der Axe ausfahren, so ist ebenfalls $k'' = \infty$; hierdurch reduciren sich vorige Gleichungen auf diese:

$$k = f; \quad h'' = f'';$$
$$h' = l - f; \quad k' = l' - f''$$
$$\frac{1}{l - f} + \frac{1}{l' - f''} = \frac{1}{f'}.$$

Bezeichnet man aufserdem die Entfernung des Sammlungspunktes der Strahlen vom Objectivglas durch F, die Länge des ganzen Rohrs durch L, so hat man noch die Gleichungen

$$l + k' = F$$
$$l + l' = L.$$

Setzt man statt k' seinen Werth $l' - f''$ in die Gleichung $l + k' = F$, so wird

$$l + l' - f'' = F,$$

und diese Gleichung zeigt, wenn man L statt $l + l'$ setzt, dafs die Länge des ganzen Rohrs der Summe $F + f''$ gleich wird, wie man schon daraus voraussehen konnte, dafs, um parallel ausfahrende Strahlen zu erhalten, der Brennpunkt des Oculars mit dem gemeinschaftlichen Brennpunkt des Objectivs und des Collectivglases zusammenfallen mufste.

§. 532.

Verbindet man die Gleichung $l + l' - f'' = F$ mit der frühern

$$\frac{1}{l-f} + \frac{1}{l'-f''} = \frac{1}{f'},$$

so lassen sich aus ihnen die Gröfsen l und l' bestimmen, und man erhält zur Bestimmung von $l' - f''$ die quadratische Gleichung

$$(l'-f'')^2 + (l'-f'').(f-F) = f'.(f-F),$$

wo $f - F$ eine positive Gröfse seyn wird, da das Objectiv allein eine gröfsere Brennweite haben mufs, als dann, wenn die Strahlen durch das Collectivglas noch einmal zur Convergenz gebracht werden. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt

$$l'-f'' = -\tfrac{1}{2}\cdot(f-F) + \sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}\cdot f-\tfrac{1}{4}\cdot F)},$$

wo man natürlicherweise blofs das positive Vorzeichen des Radicals gebrauchen kann, da im vorliegenden Fall $l' - f''$ positiv ist.

Den Werth von $l - f$ findet man dann

$$l-f = -\tfrac{1}{2}\cdot(f-F) - \sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}\cdot f-\tfrac{1}{4}\cdot F)}.$$

Man hat also auch

$$k = f$$
$$k' = -\tfrac{1}{2}\cdot(f-F) + \sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}\cdot f-\tfrac{1}{4}\cdot F)}$$
$$h' = -\tfrac{1}{2}\cdot(f-F) - \sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}\cdot f-\tfrac{1}{4}\cdot F)}$$
$$h'' = f''.$$

§. 533.

Die Vergröfserung dieses aus drei Gläsern bestehenden Fernrohrs wird nach §. 417. durch

$$m = \frac{k.k'}{h'}\cdot\frac{\omega+f''}{\omega f''}$$

ausgedrückt, oder wenn wir der Kürze wegen annehmen, dafs das Auge bei parallelen Strahlen deutlich sehen könne, also $\omega = \infty$ ist, so kommt

$$m = \frac{kk'}{h'f''}.$$

Aus den vorigen Werthen von k', h' ergiebt sich aber

$$\frac{k'}{h'} = -\frac{\sqrt{4f'.(f-F)+(f-F)^2}-(f-F)}{\sqrt{4f'.(f-F)+(f-F)^2}+(f-F)}$$
$$= -\frac{k'k'}{f'.(f-F)},$$

also ohne weitere Rücksicht auf das Vorzeichen

$$m = \frac{f}{f''} \cdot \frac{k'}{f'} \cdot \frac{k'}{f - F}.$$

§. 534.

Die Winkel, unter welchen ein unter dem Winkel α gegen die Axe geneigter und durch die Mitte des Objectivs gehender Hauptstrahl die Axe nach und nach hinter jedem Glase schneidet, sind in §. 407. durch $\psi_{,}''$, $\psi_{,,}''$ bezeichnet, und der Werth von $\psi_{,,}''$, welcher hinter dem Ocularglase Statt findet, ist

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \alpha') - \frac{h'h''}{k'k''} \cdot (\alpha' - \alpha),$$

und da ferner

$$\alpha' = -\frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = +\frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha,$$

so erhält man

$$\psi_{,,}'' = \left(\frac{kk'}{h'h''} + \frac{kk'}{h'k''} + \frac{kh''}{h'k''} + \frac{kh''}{k'k''} + \frac{h'h''}{k'k''}\right) \cdot \alpha.$$

Es ist aber $k'' = \infty$, es bleibt daher bloſs

$$\psi_{,,}'' = \frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha = -\frac{f}{f''} \cdot \frac{k'}{f'} \cdot \frac{k'}{f - F} \cdot \alpha.$$

Dies ist der vergröſserte Halbmesser des Gesichtsfeldes, wenn sich das Auge im vortheilhaftesten Punkt hinter dem Ocular befindet.

§. 535.

Um diese vortheilhafteste Entfernung des Auges hinter dem Ocular zu finden, müssen wir noch den in ihrem Ausdruck vorkommenden Winkel $\psi_{,}''$ berechnen. Dieser ist nach §. 407.:

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$= -\left(\frac{k}{h'} + \frac{k}{k'} + \frac{h'}{k'}\right) \cdot \alpha$$

$$= -\frac{k}{f'} \cdot \alpha + \frac{f' \cdot (f - F)}{k'k'} \cdot \alpha$$

$$= \frac{f'f' \cdot (f - F) - k'k'f}{f'k'k'} \cdot \alpha,$$

und nach §. 408. die vortheilhafteste Entfernung des Auges hinter dem Ocular

$$u'' = h''.\frac{\alpha'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''}$$

ist, so kommt

$$\alpha'' - \psi_{,}'' = -\frac{f}{f''}.\frac{k'}{f'}.\frac{k'}{f-F}.\alpha$$

$$-\frac{f'f'.(f-F) - k'k'f}{f'k'k'}.\alpha$$

$$\frac{\alpha'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''} = 1 + \frac{f'f'.(f-F) - k'k'f}{f'k'k'}.\frac{f'f''.(f-F)}{fk'k'}$$

$$u = f'' + \frac{f'f'.(f-F) - k'k'f}{fk'k'}.\frac{f''f''.(f-F)}{k'k'}.$$

§. 536.

Um nun vermittelst der Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung eine ähnliche Berechnung der Gröfse des Objectivglases als §. 529. anstellen zu können, müssen wir die bei zwei Gläsern Statt findende Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung kennen; diese ist nach §. 461., wenn wir statt des negativen Vorzeichens, das daselbst gebraucht ist, das positive nehmen, welches erlaubt ist, indem dort der Abstand des Vereinigungspunktes der mittlern Strahlen von den der violetten bestimmt ist, wir aber vermittelst des positiven Vorzeichens den Unterschied der Vereinigungsweiten der mittlern und rothen Strahlen finden,

$$\delta k' = + k'k'.\left(\frac{\delta\nu'}{f'} + \frac{\delta\nu}{f}.\frac{kk}{h'h'}\right).$$

Da wir aber annehmen dürfen, dafs das Objectivglas aus derselben Glasart besteht, als das Collectivglas, so werden die Brechungsverhältnisse beider Gläser, also auch ihre Zerstreuungsverhältnisse, gleich, d. h. es ist $\delta r = \delta\nu'$, und hierdurch wird dann

$$\delta k' = \delta\nu.\left(\frac{k'k'}{f'} + \frac{kk}{f}.\frac{k'k'}{h'h'}\right).$$

Substituirt man hierin die Werthe von k und $\frac{k'}{h'}$ aus §. 532 und §. 533., so ergiebt sich

$$\delta k' = \delta\nu . \left(\frac{k'k'}{f'} + f \cdot \frac{k'^4}{ff'.(f-F)^2}\right)$$

$$= \delta\nu \cdot \frac{k'k'}{f'} \cdot \frac{f'.(f-F)^2 + fk'k'}{f'.(f-F)^2}.$$

§. 537.

Um hieraus den Halbmesser des Farbenkreises zu finden, der sich auf einer Ebene bildet, welche senkrecht auf die Axe durch den Vereinigungspunkt der mittlern Strahlen gelegt ist, mufs man die Gröfse $\delta k'$ durch die Tangente desjenigen Winkels multipliciren, welchen ein auf den Rand des Objectivs fallender Lichtstrahl nach seiner zweimaligen Brechung durch das Objectiv und das Collectivglas mit der Axe bildet, wo man wegen der Kleinheit der Winkel statt der Tangente den Winkel selbst setzen kann. Bezeichnet man diese Winkel hinter den ersten und zweiten Glase durch φ'', $\varphi_{,}''$, die Entfernungen von der Axe, in welchen der Strahl die Gläser trifft, durch t, t', so hat man nach §. 404.

$$t' = - h'\varphi'', \quad t'' = - h''\varphi_{,}''$$

$$t' = - \frac{h'}{k} \cdot t$$

$$t'' = - \frac{h'h''}{kk'} \cdot t,$$

also $\varphi_{,}'' = - \frac{t''}{h''} = \frac{h'}{kk'} \cdot t$. Substituirt man hierin die Werthe von k und $\frac{h'}{k'}$, so kommt

$$\varphi_{,}'' = - \frac{f'}{f} \cdot \frac{f-F}{k'} \cdot \frac{t}{k'},$$

folglich wird der Halbmesser des Farbenkreises, wenn wir das negative Vorzeichen vernachlässigen,

$$\varphi_{,}''.\delta k' = t\delta v.\frac{f'.(f-F)^2 + fk'k'}{ff'.(f-F)},$$

und wir finden hieraus den Winkel, unter welchem er dem Auge erscheint, wenn wir durch die Brennweite des Ocularglases f'' dividiren,

$$= \delta v \cdot \frac{t}{f''}.\frac{f'.(f-F)^2 + fk'k'}{ff'.(f-F)}.$$

§. 538.

Was die Undeutlichkeit wegen der Winkelabweichung der verschiedenen farbigen Strahlen durch das Ocular gesehen betrifft, so hat man die Winkelabweichung durch drei Gläser nach §. 469.

$$\delta\varphi_{,,}'' = \frac{kk'}{h'h''}\cdot t\cdot\left[\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk} + \frac{\delta v''}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\right],$$

und wenn die Glasarten als gleich zerstreuend angesehen werden, so ist $\delta v = \delta v' = \delta v''$, also auch

$$\delta\varphi_{,,}'' = \frac{kk'}{h'h''}\cdot t\cdot\frac{\delta v}{f}\cdot\left[1 + \frac{f}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk} + \frac{f}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

In §. 471. haben wir das Maafs der hiervon abhängenden Undeutlichkeit durch $\frac{1}{K}$ bezeichnet, und gezeigt, dafs diese Gröfse gefunden wird, indem diese Winkelabweichung durch den Halbmesser der Oeffnung des letzten Glases dividirt wird. Bezeichnen wir diese durch t'', so ist

$$t'' = \frac{h'h''}{kk'}\cdot t,$$

folglich wird auch

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{kk'}{h'h''}\right)^2\cdot\frac{\delta v}{f}\cdot\left[1 + \frac{f}{f'}\cdot\frac{h'h'}{kk} + \frac{f}{f''}\cdot\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

Es wird aber vermittelst der in §. 532 und 533. angegebenen Werthen

$$\frac{kk'}{h'h''} = -\frac{f}{f''}\cdot\frac{k'k'}{f'.(f-F)}$$

$$\frac{h'h'}{kk} = \frac{k'k'}{kk}\cdot\frac{h'h'}{k'k'} = \frac{f'f'}{ff}\cdot\frac{(f-F)^2}{k'k'}$$

$$\frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{h''h''}{k'k'} = \frac{f''f''}{ff}\cdot\frac{f'f'.(f-F)^2}{k'^4}.$$

Man erhält daher

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta v}{f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \frac{ff}{f''f''} \cdot \frac{k'k'}{f'f'} \cdot \left(\frac{k'}{f - F}\right)^2 \\ + \frac{k'k'}{f''f''} \cdot \frac{f}{f'} + \frac{f}{f''}. \end{array} \right\}$$

§. 539.

In den jetzigen Zeiten wendet man bei astronomischen Fernröhren keine andern Objectivgläser an, als solche, welche achromatisch und aplanatisch sind. Sie bestehen aus zwei Gläsern, welche sehr nahe hinter einander liegen, von denen das vordere ein Sammlungsglas von Kronglas, welches weniger die Farben zerstreut, das hintere ein Zerstreuungsglas von Flintglas ist, welches eine stärkere Zerstreuungskraft gegen die Farben besitzt. Wie man nun aus den gegebenen Brechungsverhältnissen und Zerstreuungsverhältnissen beider Glasarten die Krümmungen der Gläser berechnet, ist früher gezeigt worden, und wir haben uns jetzt bloſs mit den Wirkungen des Oculars auf das im Focus dargestellte Bild zu beschäftigen. Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem der gebrochene Strahl die Axe schneidet, durch φ'', den Winkel, welchen der vom Mittelpunkt der Krümmung nach dem Einfallspunkt auf der vordern Fläche gezogene Radius mit der Axe macht, durch θ, durch r und ϱ die Krümmungshalbmesser des Oculars, durch c seine Dicke, so hat man nach §. 379., in so fern man die Winkel φ'', θ als sehr klein ansieht, die Gleichung

$$\sin\varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right).\sin\theta$$
$$+ \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin\theta,$$

wo n das Brechungsverhältniſs für die mittlern Strahlen bedeutet.

§. 540.

Die Brennweite f eines solchen Glases ergiebt sich ferner aus demselben §., indem man in der letzten Formel desselben $h = \infty$, $k = f$ setzt,

$$f = \frac{nr\varrho - c\varrho.(n-1)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Hieraus folgt

$$r = \frac{(n-1).n\varrho f - fc.(n-1)^2 + c\varrho.(n-1)}{n\varrho - (n-1).nf}.$$

§. 541.

Wenn nun die mittlern Strahlen des Bildes durch das Ocular so gebrochen werden sollen, daſs sie mit der Axe parallel gehen, so muſs in diesem Fall $\varphi'' = o$ werden; man hat also nach §. 539. die Gleichung

$$(n\varrho - c.(n-1)).\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right)$$
$$+ (n-1).r = o,$$

und hieraus folgt

$$h = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n\varrho - c.(n-1)}{(r+\varrho).n - c.(n-1)} \cdot r.$$

Dies ist die Entfernung, in welcher das Ocular vom Bilde aufgestellt werden muſs, damit die mittlern Farbenstrahlen der Axe parallel gebrochen werden können. Vernachlässigt man die Dicke des Glases c, so bleibt

$$h = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = f.$$

§. 542.

Man kann also mit Vernachlässigung der Dicke des Glases den Ausdruck von $\sin\varphi''$, indem man f statt h setzt, auch so schreiben:

$$\sin\varphi'' = (n-1).\sin\theta - \frac{r}{f}\cdot\sin\theta$$
$$+ \frac{(n-1).r}{\varrho}\cdot\sin\theta.$$

Setzt man in dieser Gleichung $n + \delta n$ statt n, so erhält man den Winkel der violetten Strahlen mit der Axe

$$\sin \varphi'' = (n - 1) . \sin \theta - \frac{r}{f} \cdot \sin \theta + \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin \theta + \delta n . \sin \theta + \delta n \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot \sin \theta.$$

Da nun aber die drei ersten Glieder dieser Gleichung

$$(n - 1) . \sin \theta - \frac{r}{f} \cdot \sin \theta + \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin \theta$$

den Winkel angeben, welchen die mittlern Strahlen mit der Axe bilden, und welcher Null ist, so bleibt bloſs

$$\sin \varphi'' = \delta n . \left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) . \sin \theta$$

$$= \delta \nu . (n - 1) . \left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) . \sin \theta.$$

Aus diesem positiven Werth von $\sin \varphi''$ sieht man, daſs die violetten Strahlen hinter dem Ocular convergiren; für die rothen würde das Brechungsverhältniſs $n - \delta n$ werden, und der Ausdruck des $\sin \varphi''$ ist

$$= - \delta \nu . (n - 1) . \left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) . \sin \theta,$$

welches eine Divergenz der rothen Strahlen hinter dem Ocular anzeigt.

§. 543.

Nach §. 540. ist mit Vernachlässigung der Dicke des Glases

$$r = \frac{(n-1) . \varrho f}{\varrho - (n-1) . f}$$

$$\frac{r + \varrho}{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho - (n-1) . f},$$

also, wenn man diesen Werth in die Gleichung

$$\sin \varphi'' = \delta \nu . (n - 1) . \left(1 + \frac{r}{\varrho}\right) . \sin \theta$$

substituirt, so kommt

$$\sin \varphi'' = \delta \nu . (n - 1) \cdot \frac{\varrho}{\varrho - (n-1) . f} \cdot \sin \theta.$$

Bezeichnet man die Oeffnung des Objectivs durch T, und die Entfernung desjenigen Punktes des Oculars von der Axe, wohin der Randstrahl fällt, durch t, so hat man, wenn F die Brennweite des Objectivs bezeichnet,

$$\frac{T}{F} = \frac{t}{f},$$

und da $\frac{t}{f}$ den Winkel ausdrückt, unter welchem der äufserste vom Bilde ausgehende Strahl gegen die Axe geneigt ist, den wir in §. 379. durch φ bezeichnet haben, so hat man, vermöge der daselbst befindlichen Gleichung,

$$\sin\varphi = \frac{r}{h}\cdot\sin\theta$$

$$= \frac{r}{f}\cdot\sin\theta,$$

auch diese andere

$$\frac{T}{F} = \frac{r}{f}\cdot\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{T}{F}\cdot\frac{f}{r},$$

oder, wenn man statt r seinen Werth

$$r = \frac{(n-1).\varrho f}{\varrho-(n-1).f}$$

einführt, so kommt

$$\sin\theta = \frac{T}{F}\cdot\frac{\varrho-(n-1).f}{(n-1).\varrho},$$

und der Werth von $\sin\varphi''$ wird ganz einfach

$$\sin\varphi'' = \frac{T}{F}\cdot\delta v.$$

§. 544.

Denkt man sich durch den Ort des Auges hinter dem Ocular, welches in einer Entfernung, die der Brennweite f des Oculars gleich kommt, sich befinden mufs, eine Ebene senkrecht auf die Axe gelegt, und fängt man die aus dem Ocular hervortretenden Strahlen

durch diese Ebene auf, so bilden die mittlern Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t = \frac{f}{F} \cdot T,$$

die violetten Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t - f \cdot \sin \varphi'' = \frac{f}{F} \cdot T - f \cdot \frac{T}{F} \cdot \delta\nu,$$

und die rothen Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t + f \cdot \sin \varphi'' = \frac{f}{F} \cdot T + \frac{f}{F} \cdot T\delta\nu.$$

Innerhalb desjenigen Kreises, welchen die violetten Strahlen angeben, werden die Farben vollkommen gemischt seyn, also dasselbe Licht zeigen, welches das von Objectiv hergebrachte Bild, oder der Gegenstand selbst hat; allein innerhalb des concentrischen Kreisringes, der sich innerhalb der Gränzen des violetten und rothen Kreises befindet, wird eine Färbung vorherrschen, und die Breite dieses farbigen Ringes, an dessen äufsern Ende das Roth sich befindet, wird durch

$$2 \cdot \frac{f}{F} \cdot T\delta\nu$$

ausgedrückt. Wir sehen also, dafs auf der Ebene die rothen Strahlen das Bild begrenzen, das Auge hingegen wird, da die violetten Strahlen am stärksten convergiren, am Rand eine violette oder blaue Einfassung des Bildes erblicken. Obgleich daher das Objectivglas achromatisch ist, so wird doch durch ein einfaches Ocularglas wieder eine, wiewohl geringe, Farbenzerstreuung hervorgebracht werden.

§. 545.

Bringen wir jetzt zwei Oculare an, und bezeichnen den Winkel, unter welchem ein gebrochener Strahl die Axe hinter dem ersten derselben schneidet, durch φ'', hinter dem zweiten durch $\varphi_{,}''$, und nehmen an, die Entfernung von der Axe, in welcher der Strahl auf das

erste Glas auffällt, sey t, so hat man aus §. 404., wenn wir das Vorzeichen nicht berücksichtigen, die Gleichung

$$\varphi_{,}'' = \frac{h't}{kk'}.$$

Ferner seyen die Brennweiten der Gläser f, f', die Entfernung beider Gläser von einander $= l$, so wird

$$k + h' = l$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{k'} + \frac{1}{h'} = \frac{1}{f'}$$

und hieraus erhält man

$$k = \frac{hf}{h-f};$$

$$h' = \frac{l.(h-f) - hf}{h-f}$$

$$k' = \frac{lf'.(h-f) - hff'}{(l-f').(h-f) - hf}$$

folglich wird durch Substitution dieser Werthe

$$\varphi_{,}'' = \frac{t}{h} \cdot \frac{(l-f').(h-f) - hf}{ff'}.$$

§. 546.

Differentiirt man diesen Ausdruck nach dem Zeichen δ, indem $\varphi_{,}''$, f, f', als veränderlich betrachtet werden, so kommt

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{t}{h} \cdot \frac{u}{fff'f'},$$

indem wir der Kürze wegen

$$- ff'.(\delta f'.(h-f) + \delta f.(l-f') - h\delta f)$$
$$- (f\delta f' + f'\delta f).((l-f').(h-f) - hf) = u$$

setzen. Bezeichnen wir ferner die Zerstreuungsverhältnisse beider Gläser durch δv, $\delta v'$, so ist nach §. 461.

$$\delta f = - f\delta v, \quad \delta f' = - f'\delta v',$$

und der Werth von u läſst sich auch so schreiben:

$$u = ff'\delta vh.(l-f')$$
$$+ ff'\delta v'.(lh - lf - hf),$$

und hierdurch wird die Aenderung des Winkels $\varphi_{,}''$, indem man von den mittlern Strahlen zu den violetten übergeht,

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{h} \cdot \delta\nu \cdot \frac{h.(l-f')}{ff'}$$
$$+ \frac{t}{h} \cdot \delta\nu' \cdot \frac{lh - lf - hf}{ff'}.$$

§. 547.

Sollen nun die mittlern Strahlen hinter dem zweiten Glas der Axe parallel auslaufen, so muſs $\varphi_{,}'' = o$ werden, und dies giebt die Gleichung

$$(l-f').(h-f) - hf = o.$$

Sollen ferner auch die violetten und folglich auch die rothen Strahlen parallel mit der Axe hinter dem zweiten Glase ausfahren, so wird ebenfalls $\delta\varphi_{,}'' = o$ gesetzt werden müssen, wodurch man erhält:

$$h\delta\nu.(l-f') + \delta\nu'.(lh - lf - hf) = o.$$

Die erste Gleichung giebt

$$h = \frac{(l-f').f}{l-f'-f},$$

und wenn man diesen Werth in die zweite substituirt, so wird

$$o = \frac{(l-f')^2.f}{l-f'-f} \cdot \delta\nu + \frac{fff'}{l-f'-f} \cdot \delta\nu',$$

oder mit f dividirt und den gemeinschaftlichen Nenner weggelassen

$$o = (l-f')^2.\delta\nu + ff'\delta\nu'.$$

Aus dieser Formel läſst sich eine der drei Gröſsen f, f', l ableiten, wenn die beiden andern gegeben sind, und man sieht, daſs durch Verbindung zweier Oculare von verschiedenen Glasarten, die Abweichung wegen der Farbenzerstreuung beim Durchgange durch das Ocular gehoben werden kann.

Aus § 417. folgt, daſs, wenn die Brennweite des Objectivs $= F$ gesetzt wird, die Vergröſserung sich durch die Formel

$$m = \frac{Fk}{hf'}$$

ergiebt, oder wenn wir statt h, k ihre Werthe setzen

$$m = \frac{F}{h - f} \cdot \frac{f}{f'}.$$

Aus obigem Werthe von h ergiebt sich aber

$$h - f = \frac{ff}{l - f' - f}$$

$$m = \frac{F.(l - f' - f)}{ff'}.$$

§. 548.

Wir haben jetzt bloſs noch das sogenannte terrestrische Fernrohr zu betrachten, welches dazu dient, entfernte irdische Gegenstände deutlieh zu sehen. Man könnte sich dabei zwar ebenfalls des astronomischen Fernrohrs bedienen, allein da dieses die Gegenstände in verkehrter Lage darstellt, so hat man auf Mittel gedacht, dieser ungewöhnlichen Erscheinung der Objecte abzuhelfen, die bei irdischen Gegenständen einen ungewohnten Eindruck macht, obgleich für die Beobachtung himmlischer Objecte dieser Umstand eine ganz gleichgültige Sache ist. Jedes astronomische Fernrohr kann in ein terrestrisches Fernrohr verwandelt werden, wenn man vor das Ocular noch ein zweites astronomisches Fernrohr setzt, indem das durch das erste hervorgebrachte verkehrte Bild vermittelst des zweiten wieder umgedreht wird, und so der Gegenstand in einer der natürlichen gleichen Lage erscheint. Zugleich sieht man aber hieraus, daſs eine viel gröſsere Menge Licht verloren geht, als bei dem astronomischen Fernrohr, da die Lichtstrahlen wenigstens zwei Gläser mehr zu durchlaufen haben, wenn auch das zweite angesetzte Fernrohr auf die einfachste Art mit einem Objectiv und einem Ocular zugerichtet ist.

§. 549.

Auſser dieser am gewöhnlichsten gebrauchten Einrichtung des terrestrischen Fernrohrs, welches vier

Gläser enthält, und die zuerst Rheita angegeben hat, kann man auch aus drei Gläsern ein Fernrohr zusammensetzen, welches die Bilder aufrecht zeigt. Es sey die Brennweite des Objectivs $= f$, die Brennweite des ersten Oculars $= f'$, welches hinter dem Bilde, das durch das Objectiv entsteht, in einer Entfernung $e > f'$ aufgestellt wird, so giebt dieses Ocular ein zweites Bild in der Entfernung k', wo k' durch die Gleichung

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{e}$$

$$k' = \frac{ef'}{e - f'}$$

bestimmt wird. Dieses zweite Bild erscheint aufrecht, so wie der Gegenstand selbst, und betrachtet man dasselbe durch ein zweites Ocular von der Brennweite f'', so hat man ein terrestrisches Fernrohr. Die Länge des ganzen Fernrohrs, oder die Entfernung des Objectivs vom zweiten Ocular, wird

$$= f + e + k' + f''$$

$$= f + \frac{ee}{e - f'} + f''.$$

Da die Entfernung e ganz willkürlich ist, wenn sie nur gröfser als f' genommen wird, so kann man dieselbe durch die Bedingung bestimmen, dafs die Länge des Fernrohrs so gering als möglich wird. Dann mufs

$$d \cdot \frac{ee}{e - f'} = o$$

seyn, und man erhält

$$e - 2f' = o,$$

also wird die Länge des Fernrohrs in diesem Fall

$$= f + 4f' + f''.$$

Die Vergröfserung ist nach §. 417., wenn sie durch m bezeichnet wird,

$$m = \frac{kk'}{h'f''},$$

und da wir in vorliegendem Fall allgemein $k = f$,

$h' = e$, $k' = \frac{ef'}{e-f'}$, $h'' = f''$ haben, so ist auch

$$m = \frac{ff'}{(e-f').f''},$$

und für $e = 2f'$, $m = \frac{f}{f''}$, also dieselbe wie für ein aus dem Objective und dem zweiten Oculare zusammengesetztes astronomisches Fernrohr. Um das Gesichtsfeld zu finden, hat man nach §. 407.

$$\psi_{,}'' = + \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = + \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \psi_{,}'')$$

$$\alpha' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha = - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = + \frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha = + \frac{f}{2f'} \cdot \frac{2f'}{f''} \cdot \alpha = \frac{f}{f''} \cdot \alpha.$$

Da nun hinter dem zweiten Ocular die Strahlen parallel mit der Axe ausfahren, so ist $k'' = \infty$, folglich bleibt

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' = \frac{f}{f''} \cdot \alpha.$$

Nach §. 408. ist die Entfernung, in welcher ein durch die Mitte des Objectivs unter dem Winkel α gegen die Axe geneigter Strahl hinter dem zweiten Ocular die Axe schneidet,

$$u'' = h'' \cdot \frac{\alpha'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''}.$$

Wir haben aber

$$\alpha'' = + \frac{f}{f''} \cdot \alpha$$

$$\psi_{,}'' = - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha - \alpha$$

$$= - \frac{f+f'}{f'} \cdot \alpha,$$

folglich hieraus

$$u'' . \psi_{,,}'' = + \frac{f''.(f+f')}{f'} \cdot \alpha + f\alpha.$$

Nun ist aber, wie man leicht sieht, $u'' \psi_{,,}''$ nichts anders, als die halbe Oeffnung des letzten Oculars, welche erforderlich ist, um die unter dem Winkel α durch die Mitte des ersten Glases fallenden Strahlen durch zu lassen. Bezeichnet man diese durch t'', so wird

$$t'' = \frac{ff' + (f + f') \cdot f''}{f'} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{f' t''}{ff' + (f + f') \cdot f''},$$

und dieser Werth von α würde die Gröfse des halben Gesichtsfeldes darbieten, welche man durch ein solches Fernrohr erhält. Setzt man aufserdem die Brennweiten der beiden Ocularglaser gleich, $f' = f''$, so bleibt

$$\alpha = \frac{t''}{2f + f''}.$$

Bei dem zuerst angeführten Erdfernrohr würde, wenn die Brennweiten aller drei Oculare gleich gesetzt werden, $= f''$, die Gröfse des halben Gesichtsfeldes eben so, wie bei einem astronomischen Fernrohr, das die Objectivbrennweite $= f$, und Ocularbrennweite $= f''$ hat, durch die Formel

$$\alpha = \frac{t''}{f + f''}$$

gefunden werden, also beinahe doppelt so grofs, als bei der so eben betrachteten Einrichtung mit zwei Ocularen.

Man hat aufserdem auch wohl noch Erdfernröhre verfertigt, welche aus fünf Gläsern bestehen, von denen das eine als Collectivglas zwischen dem Objectiv und dem durch dasselbe hervorgebrachten Bilde aufgestellt wird.

Von den Spiegeltelescopen.

§. 550.

Die Spiegeltelescope dienen zu demselben Zweck, als die Fernröhre, nämlich entfernte Gegenstände deutlich zu sehen. Die Stelle des Objectivglases vertritt hierbei ein meistentheils sphärisch geschliffener Metallspiegel, welcher, wie wir in der Catoptrik gesehen haben, ein Bild des Gegenstandes hervorbringt, welches dann durch ein Ocularglas betrachtet wird. Man hatte die Spiegel an die Stelle der Gläser deswegen gesetzt, weil bei der Zurückwerfung des Lichts keine Farbenzerstreuung Statt findet, und man früher nicht glaubte, dafs es möglich wäre, durch Zusammensetzung von Glaslinsen aus Glasarten von verschiedenem Zerstreuungsverhältnifs, die Farbenzerstreuung aufzuheben. Unter solchen Umständen war freilich die Anwendung der Spiegel sehr vortheilhaft, weil hierdurch bei sonst gleichen Vergröfserungen die Spiegeltelescope bedeutend kürzer gemacht werden konnten, als die achromatischen Fernröhre, und doch die Deutlichkeit dieselbe blieb. Auf jeden Fall sind aber die jetzigen achromatischen Fernröhre oder Refractoren den Spiegeltelescopen oder Reflectoren vorzuziehen, da theils bei dem Durchgange des Lichts durch Gläser viel weniger Licht verloren geht, als bei der Zurückwerfung desselben von Spiegeln, wo man den Verlust beinahe auf die Hälfte des einfallenden Lichts setzen kann, theils auch die Spiegeltelescope wegen ihrer Schwere und Unbehülflichkeit nicht wohl an eigentlichen Winkelinstrumenten angebracht werden können.

§. 551.

Bezeichnet man den Halbmesser der Krümmung eines sphärischen Hohlspiegels durch r, die Entfernung des in der Axe liegenden Objects von dem Mittelpunkt der Krümmung durch h, die Entfernung des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls mit der Axe ebenfalls vom Mittelpunkt der Krümmung durch x, den Winkel, welchen der nach dem Einfallspunkt gezogene Radius mit der Axe bildet, durch α, so hat man nach §. 263. den Ausdruck

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}.$$

Nun sey die Entfernung des Objects von der Mitte des Spiegels $= H$, die Entfernung des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls von der Mitte des Spiegels $= K$, so ist

$$h = H - r, \quad x = r - K,$$

also, wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung substituirt,

$$r - K = \frac{Hr - rr}{2 \cdot (H - r) \cdot \cos\alpha + r},$$

und hieraus ergiebt sich

$$K = \frac{H \cdot (2 \cdot \cos\alpha - 1) + 2r \cdot (1 - \cos\alpha)}{2 \cdot (H - r) \cdot \cos\alpha + r} \cdot r.$$

Bezeichnet man die Entfernung des Einfallspunkts von der Axe des Spiegels durch T, so ist

$$T = r \cdot \sin\alpha,$$

folglich, wenn man die das Quadrat von $\frac{T}{r}$ übersteigenden Potenzen vernachlässigt, erhält man

$$\cos\alpha = 1 - \frac{TT}{2rr}.$$

Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von K, so wird

$$K = \frac{H - (H - r) \cdot \frac{TT}{rr}}{(2H - r) - (H - r) \cdot \frac{TT}{rr}} \cdot r$$

$$= \frac{Hr}{2H - r} - \left(\frac{H - r}{2H - r}\right)^2 \cdot \frac{TT}{r}.$$

Man setze den Werth von K, welcher sich ergiebt, wenn $T = o$, $H = \infty$ genommen wird, $= F$, so ist F die Brennweite des Spiegels $= \frac{1}{2} r$, und wenn man diese Gröſse statt r einführt, so kommt

$$K = \frac{HF}{H - F} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{H - 2F}{H - F}\right)^2 \cdot \frac{TT}{F}.$$

§. 552.

Es sey ABM (Fig. 60.) ein sphärischer Spiegel von der Brennweite $= F$, auf dessen Punkt M in der Entfernung von der Axe $MP = T$ ein Strahl von einem Object gefallen ist, dessen Entfernung, von B aus gerechnet, $= H$ ist, und dieser Strahl werde nach MQM' zurückgeworfen, so wird die Entfernung BQ des Durchschnittspunktes des zurückgeworfenen Strahles mit der Axe durch den im vorigen §. gegebenen Werth von K ausgedrückt. In M' treffe dieser Strahl einen andern Hohlspiegel $A'B'M'$, dessen Axe mit der des erstern zusammenfällt, und der von diesem zweiten Hohlspiegel zurückgeworfene Strahl sey $M'Q'$. Setzt man nun die Brennweite des zweiten Spiegels F', $QB' = H'$, $Q'B' = K'$, $M'P' = T'$, so erhält man die Gleichung

$$K' = \frac{H'F'}{H' - F} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{H' - 2F'}{H' - F'}\right)^2 \cdot \frac{T'T'}{F'}.$$

Ferner hat man die Proportion $MP : PQ = M'P' : P'Q$, oder da man mit Vernachlässigung der Potenzen von T, T', die das Quadrat übersteigen, die Längen PQ, $P'Q$, mit BQ, $B'Q$ oder K, H' vertauschen kann, so wird

$$T : K = T' : H'$$

$$T' = \frac{H'.T}{K},$$

oder, wenn man statt K seinen Werth aus der ersten Gleichung

$$K = \frac{H.F}{H - F}$$

substituirt, so wird

$$T' = \frac{H'.(H - F)}{HF}.T.$$

§. 553.

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck von K', so erhält man

$$K' = \frac{H'.F'}{H' - F'} - \frac{1}{8}.\left(\frac{H' - 2F'}{H' - F'}\right).\left(\frac{H - F}{H}\right)^2.\left(\frac{H'}{F}\right)^2.\frac{T^2}{F'},$$

und für einen sehr entlegenen Gegenstand, wo $H = \infty$, bleibt bloſs

$$K' = \frac{H'.F'}{H' - F'} - \frac{1}{8}.\left(\frac{H' - 2F'}{H' - F'}\right)^2.\left(\frac{H'}{F}\right)^2.\frac{T^2}{F'}.$$

Ist die Entfernung beider Spiegel von einander $= L$, so wird

$$K + H' = L,$$

oder da rücksichtlich der Axenstrahlen des ersten Spiegels $K = F$, so ist auch

$$H' = L - F,$$

und hierdurch wird, wenn man H' eliminirt

$$K' = \frac{(L - F).F'}{L - F - F'} - \frac{1}{8}.\left(\frac{L - F - 2F'}{L - F - F'}\right)^2.\left(\frac{L - F}{F}\right)^2.\frac{T^2}{F'}.$$

§. 554.

Sollen die Axenstrahlen vom zweiten Spiegel so zurückgeworfen werden, daſs das Bild des Gegenstandes auf die Oberfläche des ersten Spiegels fällt, so wird $K' = L$, folglich

$$L.(L - F - F') = (L - F).F'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$F' = \frac{(L - F).L}{2L - F},$$

und der Werth von K' für Strahlen, die in der Entfernung $= T$ von der Axe auf den ersten Spiegel fallen, wird

$$K' = L - \frac{1}{8}.\frac{(2L - F)}{L - F}.\frac{TT}{L}.$$

Um die Gröſse des Bildes zu erfahren, welches nach dieser doppelten Zurückwerfung vom Gegenstand entsteht, hat man nach §. 277., wenn h die Entfernung des Gegenstandes vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels bedeutet, l die Gröſse des Gegenstandes und η diejenige des Bildes ist,

$$\eta = -\frac{lr}{2h + r},$$

wo das negative Vorzeichen die entgegengesetzte Lage des Bildes gegen die des Gegenstandes genommen ausdrückt. Setzt man hierin $H - r$ statt h, wo wie früher H die Entfernung des Gegenstandes von der Mitte des Spiegels angiebt, und $2F$ statt r, so ist für die Gröſse des nach der ersten Zurückwerfung entstandenen Bildes

$$\eta = -\frac{lF}{H - F}.$$

Führt man statt l den Gesichtswinkel, unter welchen der Gegenstand erscheint, ein, und bezeichnet selbigen durch β, so ist, da β immer klein bleiben wird, $l = H\beta$, also

$$\eta = -\frac{HF}{H - F} \cdot \beta.$$

Die Entfernung des Bildes vom Spiegel ist übrigens immer der Sammlungsweite der Strahlen vom Spiegel gleich.

§. 555.

Es wird also ein Bild im Punkt Q (Fig. 60.) entstehen, und indem dessen Strahlen auf den zweiten Spiegel $A'B'M'$ fallen, wird durch die Zurückwerfung ein neues Bild in Q' hervorgebracht. Man setze dessen Gröſse η', so wird man η' aus der Formel

$$\eta = -\frac{lF}{H - F}$$

finden, indem in derselben η', H', F', η statt η, H, F, l gesetzt werden. Hierdurch erhält man

$$\eta' = -\frac{\eta F'}{H' - F'},$$

oder, wenn man hierin statt η seinen Werth

$$\eta = -\frac{HF}{H - F} \cdot 6$$

substituirt, so kommt

$$\eta' = \frac{F}{H - F} \cdot \frac{F'}{H' - F'} \cdot H6.$$

In so fern wir nun bei Telescopen bloſs sehr entfernte Gegenstände zu betrachten haben, wird $H = \infty$, und hierdurch reducirt sich der Werth von η' auf

$$\eta' = \frac{FF'}{H' - F'} \cdot 6.$$

Bezeichnet man, wie früher, den Abstand beider Spiegel von einander durch L, so hat man für den Fall, daſs der Gegenstand unendlich weit entfernt ist, nach §. 553.,

$$H' = L - F,$$

und hierdurch ergiebt sich

$$\eta' = \frac{FF'}{L - F - F'} \cdot 6.$$

Wenn nun das Bild auf den ersten Spiegel zurückfallen soll, wie §. 554. angenommen wurde, so hat man für die Brennweite des zweiten Hohlspiegels die Gleichung

$$F' = \frac{(L - F) . L}{2L - F},$$

und für diesen Fall wird der Werth von

$$\eta' = \frac{LF}{L - F} \cdot 6.$$

§. 556.

Die verschiedenen Arten von Telescopen unterscheiden sich von einander bloſs durch die Gestalt des kleinen zweiten Spiegels; je nachdem dieser eben, hohl oder erhaben ist, erhält man das Newtonsche, Gregorianische und Cassegrainsche Telescop. Es würde also in den vorigen Formeln für das Newtonsche Telescop $F' = \infty$, für das Gregorianische F' positiv,

für das Cassegrainsche F' negativ genommen werden müssen, und man sieht übrigens, daſs vorige Formeln für den Normalfall des Gregorianischen Telescopes entwickelt sind. Bei dem Newtonschen Telescop ist übrigens zu bemerken, daſs die Ebene des kleinen Planspiegels nicht senkrecht auf der Axe des Hohlspiegels steht, sondern unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt sind, wodurch die Strahlen unter einem Winkel von 90° gegen die Axe zurückgeworfen werden, und man das Bild durch ein seitwärts in die Röhre des Telescops gestecktes Ocularrohr betrachtet. Es ist freilich nöthig, daſs dieser Planspiegel die Strahlen eher auffängt, als sich die reflectirten Strahlen zu einem Bilde vereinigt haben. Das bekannte groſse Herschelsche Telescop, dessen Spiegel vier Fuſs Oeffnung und vierzig Fuſs Brennweite hat, ist nach dieser Art eingerichtet. Oefters lieſs jedoch Herschel den Planspiegel weg, und betrachtete das Bild, welches vom Hohlspiegel hervorgebracht wurde, gradezu mit einem Ocularglas, indem er die Axe des Spiegels nicht in die Richtung des zu beobachtenden Objects, sondern etwas darunter brachte, so daſs das Bild an dem untern Theile des Rohrs entstand; auf diese Art war der durch den Kopf des Beobachters hervorgebrachte Lichtverlust nur unbedeutend. Hierdurch wurde bedeutend an Licht gewonnen, da bekanntlich die Metallspiegel bei der Zurückwerfung fast die Hälfte des Lichts verschlucken.

§. 557.

Bei dem Gregorianischen und Cassegrainschen Telescop sind die Spiegel in einem solchen Verhältniſs zu einander gestellt, daſs, während ihre Axen zusammenfallen, das Bild, welches durch die doppelte Zurückwerfung entsteht, auf die Oberfläche des ersten Spiegels, der die Strahlen von den Objecten direct erhält, fallen, und natürlicherweise wird dies Bild in der

Mitte dieses Hauptspiegels liegen müssen. Um also dasselbe sehen zu können, wird der Spiegel in der Mitte durchbohrt, und daselbst eine Ocularröhre angebracht. Es gehen freilich bei diesen Telescopen sehr viel Strahlen verloren, indem theils der kleinere Fangspiegel eine Menge derselben aufhält, theils die Durchbohrung des Spiegels grade die Strahlen, die in der Mitte des Spiegels auffallen, und welche am meisten zu einem guten Bilde beitragen, wegnimmt. Da übrigens das entstandene Bild farblos ist, indem bei der Reflexion des Lichts keine Zerlegung in Farben vor sich geht, so kann man dasselbe als von einem achromatischen Objectiv entstanden ansehen, und die Rechnung für die Oculare grade so wie bei den Fernröhren führen, indem die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei der geringen Dimension der Spiegel vernachlässigt werden kann. Man wird die Brennweite des Objectivglases, welches man an die Stelle der beiden Spiegel gesetzt denken kann, durch $\frac{LF}{L-F}$ darstellen können, indem dieses ein unter dem Gesichtswinkel 6 gesehenes Object in eben dem Maaſse vergröſsert, als es die beiden Spiegel thun, wie aus §. 555. leicht zu sehen ist.

Von den Microscopen.

§. 558.

So wie Fernröhre und Telescope dazu dienen, um sehr entfernte Objecte deutlich und gröſser als mit bloſsen Augen zu sehen, so werden die Microscope angewandt, um Gegenstände, die sehr nahe und wegen ihrer Kleinheit dem bloſsen Auge unsichtbar sind, vergröſsert zu erhalten. Schon ein einfaches erhabenes

Glas ist in vielen Fällen hinreichend, eine ziemliche Vergröſserung zu erhalten, und man bezeichnet dieses Glas dann durch den Namen einer Loupe. Gesetzt z. B., man wolle einen Gegenstand betrachten, dessen Durchmesser $\frac{1}{1000}$ Zoll wäre, so würde der Gesichtswinkel, unter welchem derselbe erscheint, von der Entfernung desselben vom Auge abhängen. Nehmen wir nun die gröſste Deutlichkeit des Sehens für ein gesundes Auge zu acht Zoll an, so wird bei dieser Entfernung der Gesichtswinkel in Secunden durch

$$\frac{206265}{8000};$$

ausgedrückt werden. Dies giebt 25″78; allein bei einem so kleinen Gesichtswinkel bleiben irdische Gegenstände, die im Ganzen wenig Helligkeit besitzen, dem Auge unsichtbar, und wir müssen bei denselben den kleinsten Gesichtswinkel, unter welchen sie anfangen sichtbar zu werden, zu zwei Minuten ansetzen.

§. 559.

Bezeichnen wir daher die Entfernung, welche der Gegenstand vom Auge haben muſs, um unter einem Gesichtswinkel von zwei Minuten = 120 Secunden zu erscheinen, durch x, so haben wir zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{206265}{x.1000} = 120,$$

und hieraus folgt

$$x = 20{,}6 \text{ Linien.}$$

Bringt man aber einen Gegenstand in diese Nähe vom Auge, so wird man wegen der äuſsersten Undeutlichkeit den Gegenstand gar nicht unterscheiden können, indem die Strahlen, welche aus einer solchen Nähe auf die Pupille fallen, nicht auf der Netzhaut vereinigt werden können. Setzt man in der Formel (§. 379.)

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1)-r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1)-r)}$$

$\varrho = r$, $c = 2r$, so kommt

$$k = \frac{h.(2 - n) + 2r}{2h.(n - 1) - r.(2 - n)} \cdot r,$$

und dieser Ausdruck giebt die Sammlungsweite k der Strahlen von der hintern Seite einer Kugel an, deren Halbmesser $= r$ ist, wenn die Entfernung des Objects von der vordern Seite $= h$ ist. Sieht man nun das Auge als eine Kugel an, für welche $r = 6$ Linien, $n = \frac{4}{3}$, und substituiren wir hierin

$$h = 20{,}6 \text{ Linien},$$

so erhalten wir $k = 15{,}9$ Linien, also geschieht die Vereinigung erst weit hinter dem hintern Theil des Auges.

§. 560.

Die geringste Gröfse, welche ein Gegenstand haben kann, um auf die Entfernung von acht Zoll so eben sichtbar zu seyn, findet sich durch die Gleichung

$$\frac{206265 . y}{8} = 120,$$

wo y diese Gröfse bedeutet. Man erhält hieraus $\frac{1}{215}$ Zoll; alle Gegenstände, die kleiner sind, würden daher nicht deutlich erkannt werden können, wenn die convexen Linsen uns nicht ein Mittel hierzu an die Hand gäben. Man nehme eine Glaslinse von der Brennweite $= f$, und stelle das Auge dicht hinter dieselbe, bringe das Object in die Entfernung h von der Linse, so entsteht ein Bild desselben in der Entfernung k, die durch die schon oft gebrauchte Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f}$$

bestimmt wird. Da das Bild vor das Glas fallen mufs, so mufs k negativ werden, also h kleiner als f seyn. Ferner mufs das Bild an eine solche Stelle fallen, dafs die durch das Glas gebrochenen Strahlen eine schickliche Divergenz haben, um einen deutlichen Eindruck auf der Netzhaut hervorzubringen; dies geschieht, wenn die besagte Entfernung k der Gesichtsweite, auf welche

man deutlich sieht, gleich wird, und wir bezeichnen diese durch ω; dann giebt vorige Gleichung diese:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{h} - \frac{1}{f}$$

$$h = \frac{\omega f}{\omega + f}.$$

Da nun die durch die Mitte des Glases von den Rändern des Objects gehenden Strahlen ungebrochen bleiben, so folgt, dafs der Gesichtswinkel einerlei bleibt, man mag das Object in der Entfernung h vom Auge mit blofsem Auge, oder vermittelst der Glaslinse betrachten. Ist nun die lineare Gröfse des Objects $= \lambda$, so wird der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{h}$, oder, wenn man statt h seinen Werth setzt,

$$= \frac{\lambda.(\omega + f)}{\omega f},$$

und man sieht aus dieser Gleichung, dafs der Gesichtswinkel desto gröfser wird, je kleiner f ist. Da ferner ω gegen f immer bedeutend ausfällt, so kann man ohne Fehler ω statt $\omega + f$ setzen, und es bleibt dann der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{f}$.

§. 561.

Die Vergröfserungszahl selbst wird gefunden, indem man den Gesichtswinkel sucht, unter welchem das Auge in der Entfernung des deutlichen Sehens $= \omega$ den Gegenstand erblicken würde. Dieser beträgt $\frac{\lambda}{\omega}$, und dividiren wir hiermit in den durch die Glaslinse entstehenden Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{f}$, so wird man die Vergröfserungszahl $= \frac{\omega}{f}$ finden. Hieraus sieht man, dafs die Vergröfserung durch eine einfache Linse gefunden wird, indem man die Entfernung des deutlichen Sehens

durch die Brennweite der Glaslinse theilt. Es ist dies freilich ein precaires Mittel die Vergröſserung zu bestimmen, da die Gröſse ω für verschiedene Augen auch äuſserst verschieden ist, allein wir haben doch so viel dadurch gewonnen, daſs wir die Vergröſserungen durch verschiedene Loupen mit einander vergleichen können. Denn sind m, m' die Vergröſserungen zweier Loupen von den Brennweiten f, f', so hat man die Proportion

$$m : m' = f' : f,$$

d. h. die Vergröſserungen verhalten sich umgekehrt wie die Brennweiten.

§. 562.

In §. 475. haben wir den Ausdruck für die Abweichung wegen der Kugelgestalt folgendermaſsen gefunden:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2 . f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n . \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{hk} + \frac{1}{hh} \right) \\ - \frac{2n+1}{p} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) \\ + \frac{n+2}{pp} \end{array} \right\}$$

und hieraus läſst sich die Seitenabweichung oder der Halbmesser wegen der Undeutlichkeit leicht finden, wenn man obigen Ausdruck noch mit dem Winkel multiplicirt, welchen die in der Entfernung t von der Axe auf das Glas fallenden Strahlen mit der Axe bilden; dieser Winkel wird durch $\frac{t}{k}$ ausgedrückt. Man kann nun fragen, wie das Glas beschaffen seyn müsse, damit bei gleich bleibender Brennweite der Halbmesser der Undeutlichkeit ein Minimum werde, und man sieht leicht, daſs hierzu nur die Längenabweichung zu einem Minimum gemacht werden muſs, da k, als von der Brennweite und der Entfernung des Objects abhängend, welche constante Gröſsen sind, auch constant bleibt.

§. 563.

Differentiirt man vorigen Ausdruck der Längenabweichung wegen der Kugelgestalt, indem q und p als veränderlich betrachtet werden, so ergiebt sich

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2 . f} \cdot \left[\frac{2n+1}{pp} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) - \frac{2n+4}{p^3} \right],$$

und setzt man diesen Ausdruck Null, so ist

$$\frac{(2n+1)}{pp} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) = \frac{2n+4}{p^3}$$

$$p = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{kh}{h-k}.$$

Nun ist aber auch

$$k = \frac{hf}{h-f},$$

und durch Substitution dieses Werthes wird

$$p = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{hf}{h-2f}.$$

Nach §. 474. ist ferner der Werth von

$$p = \frac{hnr}{h.(n-1) - r},$$

folglich hat man zur Bestimmung von r die Gleichung

$$\frac{nr}{h.(n-1) - r} = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{f}{h-2f}.$$

§. 564.

Hieraus ergiebt sich der Werth von

$$r = \frac{(2n+4).fh.(n-1)}{n.(2n+1).(h-2f) + (2n+4).f},$$

und da nach §. 560. $h = \frac{\omega f}{\omega + f}$, oder wegen der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{f}{\omega}$, kürzer $h = f$, so wird durch Substitution dieses Werthes

$$r = \frac{(2n+4).(n-1).f}{4 + n - 2nn}.$$

Setzt man hierin z. B. $n = \frac{3}{2}$, so kommt $r = \frac{7}{2}.f$, und vermöge der Formel

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)},$$

erhält man den Halbmesser der hintern Fläche der Glaslinse $\varrho = \frac{7}{12}.f$. Substituirt man den Werth von p, der q zu einem Minimum macht,

$$p = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{hk}{h-k}$$

in die Gleichung der Längenabweichung

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2.f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{2n+1}{p} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right) \\ + \frac{n+2}{pp} \end{array} \right\},$$

so erhält man

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2.f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+1)^2}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right)^2 \end{array} \right\},$$

also den Halbmesser der Undeutlichkeit, indem mit $\frac{t}{k}$ multiplicirt wird,

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{nkt^3}{(n-1)^2.f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+1)^2}{n+2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right)^2 \end{array} \right\}.$$

§. 565.

Für Mikroscope fanden wir bei einfachen Linsen (§. 560.)

$$h = \frac{\omega f}{\omega + f}; \quad k = -\omega,$$

und wenn wir diese Werthe in vorige Gleichung substituiren, welche die Seitenabweichung wegen der Ku-

gelgestalt ausdrückt, und dieselbe durch s bezeichnen, so kommt

$$s = -\frac{n\omega t^3}{2.(n-1)^2.f}\cdot\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{3}{\omega\omega}+\frac{3}{\omega f}+\frac{1}{ff}\right) \\ -\frac{1}{4}.\frac{(2n+1)^2}{n+2}.\left(\frac{2}{\omega}+\frac{1}{f}\right)^2 \end{array}\right\}.$$

Multiplicirt man mit dem außerhalb der Parenthese stehenden Factor ω die Glieder innerhalb der Parenthese, so kommt

$$n.\left(\frac{3}{\omega}+\frac{3}{f}+\frac{\omega}{ff}\right)$$
$$-\frac{1}{4}.\frac{(2n+1)^2}{n+2}.\left(\frac{4}{\omega}+\frac{4}{f}+\frac{\omega}{ff}\right).$$

Bemerkt man nun, daſs f gegen ω immer sehr klein genommen wird, da man eine Vergröſserung wünscht, die so stark als möglich ist, so kann man alle Glieder, ausgenommen $\frac{\omega}{ff}$, weglassen, und dann bleibt

$$\left(n-\frac{1}{4}.\frac{(2n+1)^2}{n+2}\right).\frac{\omega}{ff}$$
$$=\frac{4n-1}{4.(n+2)}.\frac{\omega}{ff}.$$

Auf diese Weise wird der Werth von s, mit Weglassung des negativen Vorzeichens, welches durch die Lage des Bildes vor dem Glase eingeführt wurde,

$$s=\frac{n.(4n-1).\omega}{8.(n-1)^2.(n+2)}.\frac{t^3}{f^3}.$$

§. 566.

Um nun die Undeutlichkeit der durch die Loupe gesehenen Gegenstände wegen der Seitenabweichung nicht zu sehr zu erhöhen, darf das Verhältniſs $\frac{t}{f}$ eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Wir nehmen dieselbe mit Euler $=\frac{1}{20}$ an, und dann wird, wenn für Glas $n=\frac{3}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{s}{\omega} = \frac{15}{14} \cdot \frac{1}{8000}.$$

Nehmen wir dann $\omega = 8$ Zoll, so wird

$$s = \tfrac{1}{933} \text{ Zoll.}$$

Hieraus zeigt sich übrigens, welche geringe Helligkeit bei starken Vergröſserungen entsteht. Denn da $t = \frac{1}{20} f$, so wird der Strahlenkegel, der durch das Glas geht und die Pupille trifft, eine Lichtmenge mit sich führen, die der Gröſse

$$\pi \cdot \frac{ff}{400}$$

proportional ist. Bezeichnet man ferner den Halbmesser der Pupille durch β, so ist die Lichtmenge, welche das bloſse Auge erhalten würde, der Gröſse $\pi\beta\beta$ proportional; folglich ist die Helligkeit mit der Loupe gesehen $= \left(\frac{f}{20\beta}\right)^2$, die mit bloſsem Auge als Einheit angenommen. Setzen wir im Mittel $\beta = 1$ Linie, so würde bei einer Brennweite von 20 Linien, welche ungefähr einer vierfachen Vergröſserung entspricht, die Helligkeit durch das Glas der mit bloſsem Auge gleich werden. Da die Vergröſserungszahl sich umgekehrt wie die Brennweite verhält, und die Helligkeit dem Quadrate der Brennweite proportional ist, so folgt, daſs die Helligkeit im umgekehrten quadratischen Verhältniſs der Vergröſserungszahl steht.

§. 567.

Gesetzt z. B., man wolle eine hundertfache Vergröſserung haben, so würde sich die vortheilhafteste Einrichtung der Loupe folgendermaſsen bestimmen lassen. Setzen wir $\omega = 8$ Zoll $= 96$ Linien, so wird

$$f = 0{,}96 \text{ Linien.}$$

Ferner erhält man die halbe Oeffnung des Glases

$$t = 0{,}048 \text{ Linien,}$$

die Helligkeit, die des bloſsen Auges als Einheit genommen,

$$= 0{,}002304.$$

Die beiden Halbmesser der Krümmung der vordern und der hintern Seite des Glases erhält man nach §. 564. aus den Formeln $r = \frac{7}{2}f$, $\varrho = \frac{7}{12}f$, wo das Brechungsverhältnifs $n = \frac{3}{2}$ gesetzt wurde, also für unsern Fall

$$r = 3{,}36 \text{ Linien}, \quad \varrho = 0{,}56 \text{ Linien}.$$

Man kann auch statt eines Linsenglases von sehr kurzer Brennweite, zwei oder mehrere Gläser von gröfserer Brennweite auf einander legen, wo dann die Rechnung auf gleiche Art wie für ein einziges Glas geführt wird. Nach §. 403. würde dann, wenn man m Gläser von gleicher Brennweite f nähme, die Brennweite dieser Zusammensetzung $= \frac{f}{m}$ werden.

§. 568.

Nimmt man zwei Glaslinsen von verschiedenen Glasarten, um die Farbenzerstreuung aufzuheben, so wird die Rechnung folgendermafsen geführt. In der allgemeinen Formel zwischen h und k (§. 379.) lasse man die in die Dicke des Glases multiplicirten Glieder weg, so kommt

$$k = \frac{hr\varrho}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho},$$

oder, wenn man statt $\frac{r\varrho}{r+\varrho}$, R setzt,

$$k = \frac{hR}{h.(n-1) - R}.$$

Bei dem Durchgange der Strahlen durch das zweite Glas mufs man $-k$ für h setzen, und bezeichnet man das Brechungsverhältnifs für die mittlern Strahlen durch n', die Gröfse $\frac{r'\varrho'}{r'+\varrho'}$ durch R', wo r', ϱ' die Halbmesser der Krümmung der vordern und hintern Fläche des Glases bedeuten, so ist

$$k' = + \frac{kR'}{k.(n'-1) + R'}.$$

§. 569.

Substituirt man den Werth von k in die letzte Gleichung, so erhält man, wenn statt k' das Reciproke $\frac{1}{k'}$ genommen wird,

$$\frac{1}{k'} = \frac{n' - 1}{R'} + \frac{n - 1}{R} - \frac{1}{h},$$

und da k' die Entfernung des Bildes nach der Brechung durch das zweite Glas ist, so mufs man $\frac{1}{k'} = -\frac{1}{\omega}$ setzen, weil das Bild in die Entfernung ω vor das Glas fallen mufs. Wir haben also

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{h} - \frac{n' - 1}{R'} - \frac{n - 1}{R}.$$

Soll nun das Bild der violetten Strahlen an dieselbe Stelle fallen, an welche das der mittlern Farbenstrahlen zu liegen kommt, so darf sich ω nicht ändern, wenn man $n' + \delta n'$, $n + \delta n$ statt n', n substituirt, d. h. es wird

$$\frac{\delta n'}{R'} + \frac{\delta n}{R} = \omega,$$

oder, wenn man statt $\delta n'$, δn die Zerstreuungsverhältnisse $\delta \nu$, $\delta \nu'$ einführt, wo $\delta n = \delta \nu . (n - 1)$, $\delta n' = \delta \nu' . (n' - 1)$,

$$\frac{\delta \nu . (n - 1)}{R} + \frac{\delta \nu' . (n - 1)}{R'} = o.$$

§. 570.

Wir haben also zur Bestimmung von R, R' die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega} = \frac{n - 1}{R} + \frac{n' - 1}{R'}$$

$$\frac{\delta \nu . (n - 1)}{R} + \frac{\delta \nu' . (n' - 1)}{R'} = o.$$

Bezeichnet man die Brennweiten der beiden Gläser durch f, f', so hat man

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = \frac{R}{n-1}$$
$$f' = \frac{r'\varrho'}{(n'-1).(r'+\varrho')} = \frac{R'}{n'-1},$$

also lassen sich die beiden vorigen Gleichungen auch so schreiben:

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$
$$\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f'} = o,$$

und man erhält aus denselben

$$\frac{1}{f} = \frac{\delta\nu'}{\delta\nu' - \delta\nu}\cdot\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega}\right)$$
$$\frac{1}{f'} = -\frac{\delta\nu}{\delta\nu' - \delta\nu}\cdot\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega}\right).$$

Der Gesichtswinkel, unter welchem der Gegenstand vom Durchmesser λ durch das Glas erscheint, ist $= \frac{\lambda}{h}$, und mit bloſsen Augen gesehen würde der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{\omega}$ seyn, folglich ist die Vergröſserung $m = \frac{\omega}{h}$, $\frac{1}{h} = \frac{m}{\omega}$, und die Werthe der Brennweiten lassen sich auch so schreiben:

$$f = + \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}\cdot\frac{\omega}{m-1}$$
$$f' = - \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}\cdot\frac{\omega}{m-1},$$

und eine Loupe, die aus zwei solchen Gläsern zusammengesetzt ist, wird den Gegenstand ohne Farben erscheinen lassen.

§. 571.

Wenn man das Object in einer solchen Entfernung vom Objectiv eines Microscops aufstellt, daſs hinter demselben die Strahlen convergiren, so kann man auf zweierlei Art die Einrichtung des Oculars treffen, indem

man entweder ein concaves Glas aufstellt ehe die Strahlen sich vereinigen, oder indem man ein convexes Glas nimmt, und dasselbe so stellt, daſs sein Brennpunkt mit der Stelle des Bildes zusammenfällt. Den ersten Fall wollen wir bei Seite setzen, da in demselben, so wie in Galilaeischen Fernrohr, die Gröſse des Gesichtsfeldes zu unbedeutend wird. Es seyen f, f' die Brennweiten der beiden Gläser, so hat man

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$k + h' = l$$

wo l die Entfernung der beiden Gläser von einander bedeutet. Sollen die Strahlen aus dem zweiten Glase parallel ausfahren, so ist $k' = \infty$, also $h' = f'$, und es bleibt bloſs

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$k + f' = l.$$

§. 572.

Die Gröſse des Durchmessers des Gegenstandes sey λ, so wird die Gröſse des Bildes $= \frac{\lambda k}{h}$, und der Gesichtswinkel, unter welchem dasselbe durch das Ocular gesehen erscheint, $= \frac{\lambda k}{f'h}$. Für das bloſse Auge ist der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{\omega}$, also die Vergröſserung

$$m = \frac{\omega k}{hf'}.$$

Aus den beiden Gleichungen des vorigen §. erhält man

$$h = \frac{(l - f').f}{l - f - f'}$$
$$k = l - f',$$

folglich wird hierdurch die Vergröſserung

$$m = \frac{(l - f - f').\omega}{ff'}.$$

Nimmt man an, daſs die Entfernung h die Brennweite f nicht sehr übertreffe, so hat man, wenn $h = \mu f$ gesetzt wird,

$$\mu.(l - f' - f) = (l - f').$$

Dann erhält man

$$f' = \frac{\omega}{m.(\mu - 1)}$$

$$f = \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \frac{lm.(\mu - 1) - \omega}{m.(\mu - 1)}.$$

§. 573.

Man kann nun die Einrichtungen der Microscope noch auf sehr verschiedene Arten ausführen. So läſst sich z. B. bei der zuletzt beschriebenen Art mit zwei Gläsern noch ein drittes Collectivglas einschieben, ehe die durch das Objectiv gebrochenen Strahlen das Bild wirklich dargestellt haben. Ferner lassen sich, wie bei Fernröhren, doppelte Oculare anwenden, und da wir gezeigt haben, wie eine achromatische Loupe (§. 570.) zu construiren ist, so kann man dieselbe als Objectiv eines zusammengesetzten Microscops gebrauchen, und hierdurch erhielte man ein Microscop, welches bis auf die durch die Oculare hervorgebrachte geringere Farbenzerstreuung die Gegenstände farblos zeigt. Wir wollen indessen alle diese Fälle nicht einzeln untersuchen, da der Leser, wenn er einzelne Fälle für sich selbst berechnen will, dies sehr leicht aus dem bisher über die Microscope Gesagten, und den Formeln, die von §. 403. bis §. 424. entwickelt sind, ausführen, und die Bestimmung der Vergröſserung, der relativen Helligkeit, des Gesichtsfeldes u. s. w. machen kann. Wir wenden uns daher zu einem neuen Abschnitt, nämlich zur Brechung des Lichts in der Atmosphäre.

Von der Brechung des Lichts in der Atmosphäre.

§. 574.

Bei allen bisherigen Untersuchungen über den Weg des Lichts in brechenden Mitteln, haben wir bloſs solche Körper betrachtet, die im Inneren eine gleichförmige Brechungskraft gegen das Licht besaſsen, wo folglich die Bahn des Lichtstrahls selbst eine grade Linie war. Anders verhält es sich bei solchen durchsichtigen Körpern, deren Dichtigkeit sich im Innern ändert, und zwar continuirlich nach einem bestimmten Gesetze, wie dies z. B. bei der atmosphärischen Luft Statt findet; hier wird das Licht sich nicht in grader, sondern in krummer Linie bewegen. Jedenfalls werden aber auch hier dieselben Gesetze der Brechung gelten, als bei Körpern von gleicher Dichtigkeit, weil man sich immer die brechenden Mittel auf irgend eine Art in unendlich schmale Schichten zerlegt denken kann, in deren jeder eine constante Dichtigkeit herrscht.

§. 575.

Wir wollen zuerst als einfachsten Fall den Weg des Strahls betrachten, wenn die Flüssigkeit von ungleicher Dichtigkeit so beschaffen ist, daſs dieselbe in parallele ebene Schichten von unendlich kleiner Dicke getheilt werden kann, in denen eine gleichförmige Dichtigkeit herrscht. Wo nun auch der Strahl auf seinem Wege eine dieser Schichten treffen mag, so werden doch alle an diesen Punkten errichteten Einfallslothe unter einander parallel seyn, und daher, wie man leicht

begreift, der ganze Weg des Lichtstrahls in einer und derselben Ebene liegen.

Diese besagte Ebene, in welcher der Lichtstrahl seinen Weg nimmt, durchschneide zwei auf einander folgende unendlich dünne Schichten, in deren jeder die Dichtigkeit als gleichförmig angenommen werden kann, in $ABDC$, $CDEF$ (Fig. 61.). Das absolute Brechungsverhältniſs der Schicht $ABCD$ bezeichnen wir durch n, das der Schicht $CDEF$ durch $n + dn$, so ist, nach §. 351., das relative Brechungsverhältniſs aus der ersten Schicht in die zweite

$$= \frac{n + dn}{n} = 1 + \frac{dn}{n}.$$

§. 576.

Es stelle GHK den Weg des Lichttheilchens in diesen beiden auf einander folgenden Schichten vor, LP das Einfallsloth am Punkt H; OQ sey eine Linie parallel mit den Trennungsflächen der Schichten, $OP = x$, $HP = y$. Man hat dann zwischen dem Einfallswinkel und Brechungswinkel die Gleichung

$$\sin GHL = \left(1 + \frac{dn}{n}\right) . \sin MHK.$$

Man hat aber

$$\sin GHL = \frac{GL}{GH};$$

$$\sin MHK = \frac{MK}{HK};$$

Nach unsern Bezeichnungen wird nun aber auch

$$GL = - dx, \quad LH = MH = dy$$

$$MK = dx + ddx$$

$$GH = - \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$HK = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dxddx + ddx^2}$$

$$\sin GHL = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\sin MHK = \frac{dx + ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dxddx + ddx^2}}.$$

§. 577.

Entwickelt man den Nenner des Bruchs, welcher sin MHK ausdrückt, in eine Reihe, und setzt der Kürze wegen

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

so erhält man

$$\sin MHK = \frac{dx + ddx}{ds} \cdot \left(1 - \frac{dxddx}{ds^2}\right),$$

indem die höhern Glieder der Differentiale vernachlässigt werden. Führt man die Multiplication wirklich aus, so ergiebt sich

$$\sin MHK = \frac{dx}{ds} + \frac{ddx}{ds} - \frac{dx^2ddx}{ds^3}.$$

Die beiden letzten Glieder geben

$$+\frac{ddx}{ds} - \frac{dx^2ddx}{ds^3} = \frac{ddx}{ds^3} \cdot (ds^2 - dx^2),$$

und wenn man bedenkt, daſs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$ds^2 - dx^2 = dy^2,$$

so erhält man

$$\sin MHK = \frac{dx}{ds} + \frac{dy^2}{ds^2} \cdot \frac{ddx}{ds}.$$

§. 578.

Die früher entwickelte Gleichung zwischen dem Einfallswinkel und Brechungswinkel

$$\sin GHL = \left(1 + \frac{dn}{n}\right). \sin MHK$$

läſst sich auch so schreiben:

$$\sin GHL - \sin MHK = \frac{dn}{n} \cdot \sin MHK,$$

und wenn man die gefundenen Werthe von sin GHL, sin MKH hierin substituirt, und zugleich bemerkt, daſs hinter dem Gleichheitszeichen wegen des Differentialfactors $\frac{dn}{n}$ statt sin MHK bloſs das erste Glied seiner Entwickelung $\frac{dx}{ds}$ geschrieben zu werden braucht, so kommt

$$-\frac{dy^2}{ds^2}\cdot\frac{ddx}{ds}=\frac{dn}{n}\cdot\frac{dx}{ds},$$

als die Differentialgleichung der Bahn des Lichts, welche selbiges in dem durch parallele Schichten getrenntes Mittel beschreibt.

§. 579.

In diesem Ausdruck ist y als die unabhängige veränderliehe Gröſse zu betrachten, und um denselben zu vereinfachen, nehme man

$$dx = qdx$$
$$ddx = dqdy$$
$$ds = dy.\sqrt{1+qq},$$

und durch Substitution dieser Werthe wird die Gleichung

$$-\frac{dy^2}{ds^2}\cdot\frac{ddx}{ds}=\frac{dn}{n}\cdot\frac{dx}{ds}$$

in diese übergehen

$$-\frac{dq}{q.(1+qq)}=\frac{dn}{n},$$

welche Gleichung man auch so schreiben kann:

$$\frac{dq}{q}-\frac{qdq}{1+qq}=-\frac{dn}{n}.$$

Hiervon ist das Integral

$$\log q - \tfrac{1}{2}.\log(1+qq) = -\log n + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante sey für $q=q'$, $n=n'$, so ist auch

$$\log q' - \tfrac{1}{2}.\log(1+q'q') = -\log n' + \text{Const.}$$

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so kommt

$$\frac{q.\sqrt{1+q'q'}}{q'.\sqrt{1+qq}}=\frac{n'}{n}$$

$$\frac{q}{\sqrt{1+qq}}=\frac{n'}{n}\cdot\frac{q'}{\sqrt{1+q'q'}}.$$

Da die Gröſsen $\frac{q}{\sqrt{1+qq}}$, $\frac{q'}{\sqrt{1+q'q'}}$, die Sinus der Einfallswinkel oder Brechungswinkel in irgend zwei

Schichten bedeuten, so sieht man hieraus, daſs diese Sinus sich immer umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse in diesen beiden Schichten verhalten.

§. 580.

Restituirt man den Werth von $q = \frac{dx}{dy}$, so giebt vorige Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{q'}{\sqrt{1 + q'q'}},$$

welcher Ausdruck sich aber nicht weiter integriren läſst, wenn man die Relation zwischen n, x, y nicht kennt. Löst man diese Gleichung nach dx auf, nnd setzt der Kürze wegen

$$\frac{q'}{\sqrt{1 + q'q'}} = \sin \mu,$$

so ergiebt sich

$$dx = \pm \frac{dy \cdot \frac{n'}{n} \cdot \sin \mu}{\sqrt{1 - \frac{n'n'}{nn} \cdot \sin \mu^2}}$$

Nun ist in §. 331. gezeigt worden, daſs, wenn $\frac{4N}{cc}$ die absolute Brechungskraft eines Körpers bedeutet, die bei einerlei Materie sich nicht mit der Dichtigkeit ändert, so hat man die Gleichung, wenn wir der Kürze wegen $\frac{4N}{cc} = \alpha$ setzen,

$$\alpha = \frac{nn - 1}{\varrho},$$

wo ϱ die dem Brechungsverhältniſs n entsprechende Dichtigkeit bedeutet. Hieraus folgt

$$nn = 1 + \alpha\varrho,$$
$$n'n' = 1 + \alpha\varrho'.$$

Es wird also auch

$$dx = \pm \frac{dy \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha\varrho'}{1 + \alpha\varrho}} \cdot \sin \mu}{\sqrt{1 - \frac{1 + \alpha\varrho'}{1 + \alpha\varrho} \cdot \sin \mu^2}}.$$

§. 581.

Um den Werth von α für die atmosphärische Luft zu bestimmen, nehmen wir diejenige Dichtigkeit als Einheit an, welche dann Statt findet, wenn die Barometerhöhe 0,76 Meter und die Temperatur Null beträgt. Dann hat man durch Versuche das Brechungsverhältniſs

$$n' = 1{,}000294$$

gefunden, und vermöge der Gleichung $n'n' = 1 + \alpha$, weil $\varrho' = 1$ genommen wird, erhält man

$$\alpha = 0{,}000588.$$

Allgemein hat man, wenn p den Barometerstand und t die Temperatur nach Graden der Centesimalscale bedeutet,

$$p = k\varrho \, . \, (1 + 0{,}00375 \, . \, t),$$

wo k einen constanten Coefficienten bedeutet, der sich vermittelst der Gleichung $0{,}76 = k$ eliminiren läſst; indem man in voriger Gleichung $p = 0{,}76$, $\varrho = 1$, $t = o$ setzt. Es wird hierdurch

$$\varrho = \frac{p}{0{,}76 \, . \, (1 + 0{,}00375 \, . \, t)},$$

wo natürlicherweise, um richtige Resultate zu erlangen, p in Metern ausgedrückt werden muſs.

§. 582.

Nimmt man an, daſs x und y entweder zugleich zunehmen oder zugleich abnehmen, so muſs man in der Gleichung für dx bei Ausziehung der Quadratwurzel das positive Vorzeichen nehmen, und die Gleichung zwischen dx und dy läſst sich so schreiben:

$$dx = \frac{dy \, . \sqrt{1 + \alpha\varrho' . \sin \mu}}{\sqrt{\cos \mu^2 + \alpha\varrho - \alpha\varrho' . \sin \mu^2}}.$$

In vorliegendem Falle, wo die Schichten von gleicher Dichtigkeit alle senkrecht auf der Axe der y stehen, wird ϱ bloſs als Function von y zu betrachten seyn. Nehmen wir z. B. an, die Relation zwischen ϱ und y sey so beschaffen, daſs

$$\varrho = \varrho' \cdot e^{-y},$$

so ergiebt sich

$$dx = \frac{dy \, . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \, . \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 + \alpha\varrho' . e^{-y} - \alpha\varrho' . \sin\mu^2}},$$

wobei vorausgesetzt wird, ϱ' sey die Dichtigkeit der Atmosphäre an der Erdoberfläche, für welche $y = o$. Man setze

$$\cos\mu^2 + \alpha\varrho' . e^{-y} - \alpha\varrho' . \sin\mu^2 = uu$$

$$\frac{\cos\mu^2 - uu}{\alpha\varrho'} - \sin\mu^2 = - e^{-y}$$

$$\frac{2udu}{\cos\mu^2 - uu - \alpha\varrho' . \sin\mu^2} = - dy,$$

so giebt vorige Gleichung

$$dx = \frac{2du \, . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \, . \sin\mu}{uu - \cos\mu^2 + \alpha\varrho' . \sin\mu^2}.$$

Hiervon ist das Integral

$$x = - \frac{\sqrt{1 + \alpha\varrho'} \, . \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2}} \cdot \log \frac{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2} + u}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2} - u} + C.$$

Soll nun für $x = o$ auch $y = o$ seyn, so erhält man die Constante

$$C = \frac{\sqrt{1 + \alpha\varrho'} \, . \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2}} \, . \log \frac{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2} + \cos\mu . \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' . \sin\mu^2} - \cos\mu . \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}.$$

§. 583.

Wenn die Entfernungen der Gegenstände nicht gar zu grofs sind, und diese auch nicht in zu hohen Gegenden der Atmosphäre liegen, so kann man den Theil der Atmosphäre, in welchem das Auge und der gesehene Gegenstand sich befinden, als aus Schichten bestehend ansehen, wie wir sie im Vorigen betrachtet haben. Auch wird die Dichtigkeit dieser Schichten sich innerhalb der besagten Gränzen nur wenig ändern. Nehmen wir daher an, ϱ' sey die Dichtigkeit der Luft an der Stelle des Gegenstandes, und μ der Winkel, den der aus dem Gegenstande ausfahrende Strahl mit dem an

dieser Schicht errichteten Einfallsloth macht, so kann man

$$\varrho = \varrho' + \nu$$

setzen, wo ν eine Function von y bedeutet, die immer sehr klein bleibt. Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in das Auge, und nehmen für den Normalfall an, daſs sich das Auge dem Erdboden näher befinde, als der Gegenstand. Man hat nun die Gleichung

$$dx = \frac{dy \,.\, \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \,.\, \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 + \alpha\varrho - \alpha\varrho' \,.\, \sin\mu^2}},$$

also, wenn man hierin den angenommenen Werth von ϱ substituirt,

$$dx = \frac{dy \,.\, \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \,.\, \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho') + \alpha\nu}},$$

oder, wenn man den Nenner des Bruchs in eine Reihe entwickelt, und sich, der Kleinheit von ν wegen, auf die erste Potenz dieser Gröſse beschränkt,

$$dx = dy \,.\, \operatorname{tang}\mu - \frac{\alpha\nu \,.\, \sin\mu}{2 \,.\, \cos\mu^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho')} \,.\, dy.$$

§. 584.

Unter der Gröſse der Strahlenbrechung in der Atmosphäre versteht man die Ablenkung, welche ein Lichtstrahl erleidet, während er vom Punkt seines Ausganges bis zu einem gewissen Punkt seiner Bahn gelangt, und diese Ablenkung ist nichts anders, als der Winkel, den die beiden an die besagten Punkte gelegten Berührungslinien mit einander bilden. Bezeichnet man die Gröſse der Ablenkung oder die der Strahlenbrechung durch θ, den Winkel, den die Berührungslinie am Punkte des Ausströmens des Lichts mit der Axe der x macht oder mit der Horizontalebene, da die Schichten parallel angenommen werden, durch φ', den Winkel der Berührungslinie an einem beliebigen Punkte der Bahn mit der Axe der x durch φ, so hat man die Gleichung:

$$\theta = \varphi - \varphi',$$

wenn wir die Bahn des Lichtstrahls als gegen die Hori-

zontalebene concav betrachten. Hieraus folgt

$$\tang \theta = \tang (\varphi - \varphi')$$
$$= \frac{\tang \varphi - \tang \varphi'}{1 + \tang \varphi . \tang \varphi'}.$$

Nun hat man aber $\varphi' = 90 - \mu$, $\tang \varphi = \frac{dy}{dx}$, also auch

$$\tang \theta = \frac{\frac{dy}{dx} - \cot \mu}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \cot \mu},$$

oder da

$$dx = dy . \tang \mu - \frac{\alpha v . \sin \mu}{2 . \cos \mu^2 . (1 + \alpha \varrho')} \cdot dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot \mu + \frac{\alpha v}{2 . \sin \mu . (1 + \alpha \varrho')},$$

so wird auch

$$\tang \theta = \frac{\alpha v . \sin \mu}{2 . \sqrt{1 + \alpha \varrho'}},$$

wodurch die gesuchte Gröſse der Strahlenbrechung bestimmt ist, sobald man die Function v durch y ausgedrückt kennt. In zwei Fällen wird $\theta = o$, wenn nämlich $v = o$ oder $\mu = o$, d. h. entweder wenn die Dichtigkeit der Schichten zwischen dem Auge und dem Gegenstand constant ist; oder wenn der ausgehende Lichtstrahl die Schichten von gleicher Dichtigkeit senkrecht durchschneidet.

§. 585.

In der Lehre vom Gleichgewicht der elastischen Flüssigkeiten wird gezeigt, daſs, wenn p den Druck der Luft, ϱ ihre Dichtigkeit bedeutet, und g die Kraft der Schwere an der Erdoberfläche anzeigt, für geringe Höhen die Gleichung

$$dp = - \varrho g dy$$

gilt. Bezeichnet auſserdem t die Temperatur, so hat man die zweite Gleichung

$$p = k \varrho . (1 + 0{,}00375 . t),$$

und hieraus folgt

$$\frac{k}{g} \cdot \frac{dp}{p} = - \frac{dy}{1 + 0{,}00375 \, . \, t}.$$

Nimmt man nun an, daſs die Temperatur in arithmetischem Verhältniſs abnimmt, während die Höhe zunimmt, und bezeichnet die Temperatur an der Erdoberfläche durch t', so wird man

$$t = t' - \frac{y}{b}$$

setzen können, wo b die Höhe andeutet, um welche man sich erheben muſs, damit das Thermometer um einen Grad falle. Man erhält dann

$$\frac{k}{g} \cdot \frac{dp}{p} = - \frac{dy}{1 + \lambda t' - \lambda \cdot \frac{y}{b}},$$

indem man der Kürze wegen $0{,}00375 = \lambda$ setzt. Hiervon ist das Integral

$$\frac{k}{g} \cdot \log p = \frac{b}{\lambda} \cdot \log \left(1 + \lambda t' - \lambda \cdot \frac{y}{b}\right) + \text{Const.}$$

An der Oberfläche der Erde, wo $y = o$, sey $p = p^0$, so ist

$$\frac{k}{g} \cdot \log p^0 = \frac{b}{\lambda} \cdot \log (1 + \lambda t') + \text{Const},$$

also, wenn man die Constante eliminirt

$$\frac{k}{g} \cdot \log \frac{p^0}{p} = \frac{b}{\lambda} \cdot \log \frac{b \, . \, (1 + \lambda t')}{b \, . \, (1 + \lambda t') - \lambda y}.$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{bg}{k\lambda} = m$, so ergiebt sich, indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{b \, . \, (1 + \lambda t')}{b \, . \, (1 + \lambda t') - \lambda y}\right)^m.$$

Bezeichnet man die dem Druck p^0 zugehörige Dichtigkeit ϱ durch ϱ^0, so hat man die Gleichungen

$$p^0 = k\varrho^0 \, . \, (1 + \lambda t')$$

$$p = k\varrho \, . \, (1 + \lambda t)$$

$$\frac{p^0}{p} = \frac{\varrho^0}{\varrho} \cdot \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t}$$

$$= \frac{\varrho^0}{\varrho} \cdot \frac{b \, . \, (1 + \lambda t')}{b \, . \, (1 + \lambda t') - \lambda y},$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{p^0}{p}$ in vorige Gleichung substituirt, so bleibt

$$\frac{\varrho^0}{\varrho} = \left(\frac{b.(1+\lambda t')}{b.(1+\lambda t') - \lambda y}\right)^{m-1}.$$

Da nun für geringe Höhen λy gegen $b.(1+\lambda t')$ immer klein bleibt, so kann man vorigen Ausdruck in eine Reihe entwickeln, wobei man sich blofs auf die erste Potenz des Verhältnisses

$$\frac{\lambda y}{b.(1+\lambda t')}$$

zu beschränken braucht; man erhält alsdann

$$\frac{\varrho^0}{\varrho} = 1 + \frac{(m-1).\lambda y}{b.(1+\lambda t')}.$$

Hat der Gegenstand die Höhe $y = y'$ über der Oberfläche der Erde, und ist, wie früher, ϱ' die daselbst Statt findende Dichtigkeit, so wird ebenfalls

$$\frac{\varrho^0}{\varrho'} = 1 + \frac{(m-1).\lambda y'}{b.(1+\lambda t')}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1 + \frac{(m-1).\lambda y'}{b.(1+\lambda t')}}{1 + \frac{(m-1).\lambda y}{b.(1+\lambda t')}}$$

$$= 1 + \frac{(m-1).\lambda}{b.(1+\lambda t')}\cdot(y'-y)$$

$$\varrho = \varrho' + \frac{(m-1).\lambda\varrho'}{b.(1+\lambda t')}\cdot(y'-y).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem früher angenommenen

$$\varrho = \varrho' + v,$$

so sieht man, dafs unter den besagten Zuständen der Atmosphäre die unbekannte Function

$$v = \frac{(m-1).\lambda\varrho'}{b.(1+\lambda t')}\cdot(y'-y)$$

wird.

Der Werth von $m - 1$ kann sehr nahe $= 5$ angenommen werden. Substituirt man den so eben gefundenen Werth von v in den Ausdruck

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha v \,.\, \sin\mu}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')},$$

so erhält man

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha\,.\,(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1+\lambda t')} \cdot \frac{\sin\mu}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot (y'-y),$$

und wenn man die ganze Gröſse der Strahlenbrechung bis an die Oberfläche der Erde haben will, so muſs $y = o$ gesetzt werden; dann bleibt

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{\alpha\,.\,(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1-\lambda t')} \cdot \frac{\sin\mu}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot y'.$$

Da die Winkel θ und θ' sehr klein sind, so kann man ohne Weiteres statt der Tangenten die Winkel setzen, und es ergiebt sich

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{y'}{y'-y}.$$

§. 586.

Substituirt man den Werth der Function v ebenfalls in die Gleichung der Bahn, welche das Licht beschreibt,

$$dx = dy\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\alpha v\,.\,\sin\mu}{2\,.\,\cos\mu^2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot dy,$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1+\lambda t')} \cdot \frac{\alpha}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} = k$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$dx = dy\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot k dy\,.\,(y'-y),$$

oder wenn man integrirt

$$x = y\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot ky\,.\,(y' - \tfrac{1}{2}\,.\,y) + C.$$

Da wir nun angenommen haben, daſs für $y = y'$, $x = x'$ seyn soll, so ist

$$x' = y'.\,\text{tang}\,\mu - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot ky'y' + C,$$

und wenn man diese Gleichung von der obern abzieht

$$(x - x') = (y - y').\mathrm{tang}\,\mu + \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2}\cdot\frac{k}{2}\cdot(y - y')^2.$$

Der Coefficient k ist immer sehr klein, die Curve wird daher sehr wenig von der graden Linie abweichen.

§. 587.

Die in den vorigen Paragraphen betrachtete Dichtigkeit der Luft findet sich jedoch nur höchst selten, indem die Annahme der in arithmetische Proportion mit zunehmender Höhe abnehmende Temperatur, wohl erst in einiger Entfernung von der Erdoberfläche sich regelmäſsig zeigt, während von der Erdoberfläche an bis zu dieser Höhe die mannigfachsten Gesetze der Dichtigkeit Statt finden können, und sehr häufig die gröſste Dichtigkeit sich nicht an der Erdoberfläche, sondern erst in gröſserer Höhe zeigt, auch sogar periodische Abnahmen und Zunahmen der Dichtigkeit vorhanden seyn können, vorzüglich wenn bei heiterm Himmel die Sonne die Temperatur der dem Erdboden zunächst liegenden Schichten stark erhöht, wodurch die unteren Schichten der Atmosphäre in beständiger Bewegung erhalten werden.

§. 588.

Wir wollen daher als anderes Beispiel den Fall betrachten, wo

$$\varrho = \varrho' + \gamma\varrho'.(y' - y).y$$

angenommen wird, und γ einen kleinen Coefficienten bedeutet. Differentiirt man diesen Ausdruck, so kommt

$$\frac{d\varrho}{dy} = \gamma\varrho'.(y' - 2y),$$

und dies wird Null, wenn $y = \frac{1}{2}y'$, also findet für $y = \frac{1}{2}y'$ ein Maximum der Dichtigkeit Statt. Bezeichnen wir dieses Maximum durch $\varrho' + \delta\varrho'$, so hat man aus der ursprünglichen Gleichung

$$\varrho = \varrho' + \gamma\varrho'.(y' - y).y$$
$$\delta\varrho' = \tfrac{1}{4}\gamma\varrho'y'y',$$

und wenn man $\gamma\varrho'$ eliminirt, und $\frac{y}{y'} = u$ setzt, so wird

$$\varrho = \varrho' + 4u.(1 - u).\delta\varrho'.$$

§. 589.

Substituirt man diesen Werth in die allgemeine Gleichung

$$dx = \frac{dy.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{\sqrt{\cos\mu^2 + \alpha\varrho - \alpha\varrho'.\sin\mu^2}},$$

so erhält man, da $dy = y'du$,

$$dx = \frac{y'du.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{\sqrt{\cos\mu^2.(1 + \alpha\varrho') + 4\alpha\delta\varrho'.(1 - u).u}}.$$

Der Nenner dieses Bruchs läſst sich auch so schreiben:

$$\sqrt{(\cos\mu^2.(1 + \alpha\varrho') + \alpha\delta\varrho' - 4\alpha\delta\varrho'.(u - \tfrac{1}{2})^2)}.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\cos\mu^2.(1 + \alpha\varrho') + \alpha\delta\varrho' = kk$$
$$u - \tfrac{1}{2} = v, \quad du = dv,$$

so wird

$$dx = \frac{y'dv.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{\sqrt{kk - 4\alpha\delta\varrho'.vv}}.$$

Hiervon ist das Integral

$$x = \frac{y'.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}.\text{Arc.sin}\left(\frac{2v.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right) + \text{C}.$$

§. 590.

Für $x = x'$ ist $y = y'$, $u = 1$, $v = \frac{1}{2}$, folglich bestimmt sich die Constante durch die Gleichung

$$x' = \frac{y'.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}.\text{Arc.sin}\left(\frac{\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right) + \text{C},$$

und es wird dann

$$x - x' = \frac{y'.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}.\text{Arc.sin}\left(\frac{2v.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right)$$
$$- \frac{y'.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}.\text{Arc.sin}\left(\frac{\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right).$$

Zieht man die beiden hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bogen in einen einzigen zusammen, und restituirt den Werth von k, so erhält man

$$\frac{2 . \sqrt{\alpha \delta \varrho'}}{y' . \sqrt{1 + \alpha \varrho'}} \cdot (x - x') =$$

$$\sin \mu . \text{Arc} . \sin = \left(\frac{2\nu . \cos \mu . \sqrt{1 + \alpha \varrho'} - \sqrt{\cos \mu^2 . (1 + \alpha \varrho') + \alpha \delta \varrho' . (1 - 4\nu\nu)}}{\cos \mu^2 . (1 + \alpha \varrho') + \alpha \delta \varrho'} \cdot \sqrt{\alpha \delta \varrho'} \right).$$

§. 591.

Geht aus dem leuchtenden Punkt ein zweiter Strahl aus, der unter dem Winkel μ' gegen das Einfallsloth geneigt ist, so gilt für dieses die Gleichung

$$\frac{2 . \sqrt{\alpha \delta \varrho'}}{y' . \sqrt{1 + \alpha \varrho'}} \cdot (x - x') =$$

$$\sin \mu' . \text{Arc} . \sin = \left(\frac{2\nu . \cos \mu' . \sqrt{1 + \alpha \varrho'} - \sqrt{\cos \mu'^2 . (1 + \alpha \varrho') + \alpha \delta \varrho' . (1 - 4\nu\nu)}}{\cos \mu'^2 . (1 + \alpha \varrho') + \alpha \delta \varrho'} \cdot \sqrt{\alpha \delta \varrho'} \right).$$

Sollen nun beide Bahnen sich in einen Punkt schneiden, so ist für beide Bahnen in dem Durchschnittspunkt x, y dasselbe, man mufs also die hinter dem Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke in beiden Gleichungen einander gleich setzen, und den Werth von ν aus der so gebildeten Gleichung ableiten. Nun ist aber zu bemerken, dafs die Winkel μ, μ' bei der terrestrischen Strahlenbrechung, wo die Gegenstände doch immer nur geringe Höhen über der Erdoberfläche besitzen, sehr nahe 90 Grad betragen. Man kann daher die Factoren $\sin \mu$, $\sin \mu'$ ohne Weiteres der Einheit gleich setzen. Nimmt man ferner

$$\mu = 90^0 - \lambda, \quad \mu' = 90^0 - \lambda',$$

so wird ohne merklichen Fehler

$$\cos \mu = \lambda; \quad \cos \mu' = \lambda',$$

und aufserdem darf man noch den Factor $1 + \alpha \varrho'$, wegen der Kleinheit von α, der Einheit gleich nehmen. Dann bleibt

$$\frac{2\nu\lambda - \sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}}{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'}$$

$$= \frac{2\nu\lambda' - \sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}}{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'},$$

oder, wenn man mit dem Nenner multiplicirt,

$$2\nu\lambda.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') - 2\nu\lambda'.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho')$$
$$= (\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho').\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}$$
$$- (\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho').\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.$$

§. 592.

Quadrirt man diese Gleichung, so läſst sich jedes Glied durch

$$(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho').(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho')$$

dividiren, und man erhält

$$4\nu\nu.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') + 4\nu\nu.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho')$$
$$- 8\nu\nu\lambda\lambda' - (\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') - (\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho')$$
$$= -2.\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)},$$

oder auch

$$2\nu\nu.[(\lambda - \lambda')^2 + 2\alpha\delta\varrho']$$
$$- \tfrac{1}{2}.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho') - \tfrac{1}{2}.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho')$$
$$= -\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.$$

Quadrirt man von neuem, so ergiebt sich nach den gehörigen Reductionen

$$4\nu^4.[(\lambda - \lambda')^4 + 4\alpha\delta\varrho'.(\lambda - \lambda')^2]$$
$$- 2\nu\nu.(\lambda - \lambda')^2.(\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho')$$
$$= -\tfrac{1}{4}.(\lambda - \lambda')^2.(\lambda + \lambda')^2,$$

oder

$$\nu^4 - \tfrac{1}{2}\nu\nu.\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho'}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}$$
$$= -\tfrac{1}{16}.\frac{(\lambda + \lambda')^2}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man

$$4\nu\nu = \frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho' \mp (2\lambda\lambda' - 2\alpha\delta\varrho')}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'},$$

also entweder

$$4\nu\nu = 1,$$

oder

$$2\nu = \pm \frac{\lambda + \lambda'}{\sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}}.$$

Der erste Werth $4\nu\nu = 1$ bezieht sich auf den Punkt, von welchem das Licht ausgeht, und den wir nicht weiter zu betrachten haben.

§. 593.

Was nun die Lage der Berührungslinie an dem besagten Durchschnittspunkt betrifft, so hatten wir die Gleichung

$$dx = \frac{y'd\nu.\sqrt{1 + \alpha\varrho'}.\sin\mu}{\sqrt{(kk - 4\alpha\delta\varrho'\nu\nu)}},$$

oder, da $y'd\nu = dy$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{kk - 4\alpha\delta\varrho'\nu\nu}}{\sin\mu.\sqrt{1 + \alpha\varrho'}},$$

wo der Werth von

$$kk = \cos\mu^2.(1 + \alpha\varrho') + \alpha\delta\varrho'$$
$$= \lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.$$

Setzen wir nun in voriger Gleichung

$$\sin\mu = 1, \quad \sqrt{1 + \alpha\varrho'} = 1,$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)},$$

und da

$$1 - 4\nu\nu = \frac{4\alpha\delta\varrho'}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'},$$

so wird die Lage der Tangente an dem Durchschnittspunkt der einen Bahn, wo das Licht unter dem Winkel $90^0 - \lambda$ ausfließt, durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda\lambda.(\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda.(\lambda + \lambda').\alpha\delta\varrho' + 4\alpha^2\delta\varrho'^2}}{\sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}}$$

ausgedrückt. Bei der andern Bahn wird dieser Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda'\lambda'.(\lambda-\lambda')^2 + 4\lambda'.(\lambda+\lambda').\alpha\delta\varrho' + 4\alpha^2\delta\varrho'^2}}{\sqrt{(\lambda-\lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}}.$$

§. 594.

Man sieht hieraus, daſs bei der angenommenen Beschaffenheit der Dichtigkeit der Atmosphäre sehr wohl der Fall eintreten kann, daſs zwei nach verschiedenen Richtungen, jedoch in einerlei verticaler Ebene aus einem Punkt A (Fig. 62.) ausflieſsende Strahlen, eine solche Bahn nehmen, daſs sie sich in einem Punkt O durchschneiden.

Befindet sich nun das Auge in diesem Durchschnittspunkt O, so erhält es Eindrücke von dem Punkt A nach verschiedenen Richtungen; es glaubt also den Punkt A sowohl in der Richtung OP als in der Richtung OQ zu sehen, wo OP und OQ die in dem Durchschnittspunkt an die verschiedenen Bahnen gezogenen Berührungslinien vorstellen.

Auf diesem Umstand beruhen nun die sogenannten Luftspiegelungen, wo ein und derselbe Gegenstand öfters zugleich aufrecht und verkehrt gesehen wird, und man kann die Berechnung derselben auf die verschiedensten Arten führen, je nachdem man ϱ auf andere Art durch y ausdrückt, wobei wir uns aber nicht weiter aufhalten wollen, da voriges Beispiel hinreichend zeigt, welches Verfahren man bei dieser Art von Rechnungen zu beobachten habe.

§. 595.

Wenn das von den Gegenständen herkommende Licht einen sehr groſsen Raum in der Atmosphäre zu durchlaufen hat, oder wohl gar die ganze Atmosphäre durchstreichen muſs, ehe es in das Auge gelangt, wie dies letztere z. B. bei dem von den Himmelskörpern herkommenden Lichte der Fall ist, so darf man die Schichten von gleicher Dichtigkeit in der Atmosphäre

nicht mehr als eben betrachten, sondern als Kugelschalen, welche mit der Oberfläche der Erde concentrisch sind, indem dann die Ausdehnung des in der Atmosphäre durchlaufenen Raumes zu groſs ist, als daſs man die Kugelgestalt der Erde mit der Ebene vertauschen könnte. Wir wollen daher noch unter dieser Voraussetzung die Bahn des Lichts darstellen.

§. 596.

Man thut nun hierbei am besten, die Ursache der Ablenkung des Lichts in einer Anziehung der Lufttheilchen gegen das Licht anzunehmen, und hieraus nach den Lehren der Mechanik die Bahn zu suchen. Da die Luftschichten von gleicher Dichtigkeit concentrische Kugelschalen um den Mittelpunkt der Erde bilden, und die Anziehung immer auf der Oberfläche einer solchen Schale senkrecht steht, wie auch das Gesetz der Anziehung beschaffen seyn mag, so werden die Richtungen der Anziehungen insgesammt sich im Mittelpunkt der Erde schneiden, und man kann daher die Sache so ansehen, als ob im Mittelpunkt eine anziehende Kraft vorhanden wäre, die das Lichttheilchen nach einem bestimmten Gesetz anzieht. Legen wir nun durch den Mittelpunkt der Erde zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen, bezeichnen die Coordinaten des Lichttheilchens zu irgend einer Zeit durch x, y, die anziehende Kraft durch V, wo V eine gewisse Function des Abstandes r des Lichttheilchens vom Mittelpunkt der Erde seyn wird, so haben wir, den Lehrsätzen der Dynamik zufolge, die beiden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung,

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{Vx}{r}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{Vy}{r},$$

wo dt das Element der Zeit bedeutet.

§. 597.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $2dx$, die zweite mit $2dy$, so wird

$$\frac{2dx}{dt} \cdot \frac{ddx}{dt} = - \frac{2Vx}{r} \cdot dx$$

$$\frac{2dy}{dt} \cdot \frac{ddy}{dt} = - \frac{2Vy}{r} \cdot dy,$$

und wenn man dieselben addirt

$$\frac{2dx \,.\, ddx + 2dy \,.\, ddy}{dt^2}$$

$$= - \frac{2V.(xdx + ydy)}{r}.$$

Es ist aber

$$2dxddx + 2dyddy$$

$$= d.(dx^2 + dy^2) = d.ds^2,$$

wo ds das Element der Bahn bedeutet. Eben so ist

$$xx + yy = rr;$$

$$xdx + ydy = rdr;$$

folglich läfst sich vorige Gleichung so schreiben:

$$d \cdot \frac{ds^2}{dt^2} = - 2Vdr,$$

und beide Glieder sind integrabel, da wir vorausgesetzt haben, dafs V blofs eine Function von r sey. Folglich wird

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \text{Const} - 2\int Vdr.$$

Nun ist bekanntlich der Differentialcoefficient $\frac{ds}{dt}$ nichts anders, als die Geschwindigkeit. Bezeichnen wir dieselbe für eine bestimmte Stelle durch v, und dem daselbst Statt findenden Werth des Integrals $\int Vdr$ durch P, so hat man, um die vorige Constante zu bestimmen, die Gleichung

$$vv = \text{Const} - 2P,$$

und hierdurch ergiebt sich

$$\frac{ds^2}{dt^2} = vv + 2P - 2\int Vdr.$$

§. 598.

Um ein zweites Integral aus den beiden Fundamentalgleichungen zu erhalten, multiplicire man die erste mit y, die zweite mit x, und ziehe sie von einander ab, so fällt V ganz heraus, und es bleibt

$$\frac{yddx - xddy}{dt^2} = 0.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{ydx}{dt} - \frac{xdy}{dt} = \text{Const.}$$

Um die hierin vorkommende Constante zu bestimmen, nehme man an, die Axe der x sey so gelegt, daſs sie durch den Punkt der Oberfläche der Erde gehe, wo der Lichtstrahl dieselbe zuletzt trifft, und die Werthe von v und P mögen für eben denselben Punkt gelten. Ist ferner der Winkel, unter welchen zuletzt die Richtung des Strahls die Axe der x schneidet, $= \theta$, so wird für diesen Punkt

$$\frac{dx}{dt} = v \,.\, \cos \theta\,; \quad \frac{dy}{dt} = v \,.\, \sin \theta.$$

Setzt man nun den Halbmesser der Erde $= a$, so hat man zugleich $x = a$, $y = o$, also wird

$$- av \,.\, \sin \theta = \text{Const},$$

und die letzte Gleichung ist

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = - av \,.\, \sin \theta.$$

§. 599.

Wir wollen nun statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y die Polarcoordinaten r, φ einführen, wo φ den Winkel bedeutet, welchen der Radius r mit der Axe der x bildet, dann hat man

$$x = r \,.\, \cos \varphi, \quad y = r \,.\, \sin \varphi$$

$$ds^2 = rrd\varphi^2 + dr^2$$

$$ydx - xdy = - rrd\varphi,$$

also lassen sich die beiden Gleichungen auch so schreiben

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{dt^2} = vv + 2P - 2\int V dr$$

$$\frac{rrd\varphi}{dt} = av \,.\, \sin 6,$$

folglich, wenn man dt eliminirt,

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{vv + 2P - 2\int V dr}{aavv \,.\, \sin 6^2}.$$

§. 600.

Es kommt jetzt bloſs darauf an, die Gröſse V aufzufinden. Wenn die Lufttheilchen das Licht anziehen, so wird diese Anziehung nur auf unmerkliche Entfernungen merklich seyn. Man beschreibe um das Lichttheilchen, welches sich in der Entfernung r vom Mittelpunkt der Erde befindet, eine Kugel, deren Halbmesser der Wirkungssphäre der Lufttheilchen gleich kommt, und der Kreis $AFKBGD$ (Fig. 63.) stelle den Durchschnitt dieser Kugel vor. Der Durchmesser AB dieses Kreises sey nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet; er giebt also die mittlere Richtung der Anziehung aller innerhalb dieses Kreises enthaltenen Lufttheilchen an. Die Luftschichten von gleicher Dichtigkeit stehen ferner insgesammt auf diesem Durchmesser senkrecht, und man darf dieselben innerhalb der äuſserst geringen Ausdehnung der Kugel, welche die Wirkungssphäre der Anziehung umfaſst, als eben betrachten. Nun sey $CE = u$, so wird die Stärke der Anziehung der Schicht DF eine Function von u, multiplicirt in die daselbst herrschende Dichtigkeit, seyn. Wir bezeichnen diese Function durch U. Ist nun die Dichtigkeit im Punkt $C = \varrho$, so ist sie in der Schicht DF, welche den Abstand $r + u$ vom Mittelpunkt der Erde hat,

$$= \varrho + \frac{d\varrho}{dr} \cdot u + \frac{dd\varrho}{dr^2} \cdot \frac{u^2}{2} + \ldots\ldots,$$

folglich wird die Anziehung der Schicht DF

$$= Udu \,.\left(\varrho + \frac{d\varrho}{dr} \cdot u + \frac{dd\varrho}{dr^2} \cdot \frac{u^2}{2} + \ldots\ldots\right).$$

Ist nun die Schicht GK so weit unterhalb von C entfernt, als DF oberhalb, so wird die Anziehung dieser Schicht, welche die Entfernung $r = u$ vom Mittelpunkt der Erde hat, durch

$$Udu.\left(\varrho - \frac{d\varrho}{dr}\cdot u + \frac{dd\varrho}{dr^2}\cdot\frac{u^2}{2} - \ldots\right)$$

ausgedrückt.

§. 601.

Zieht man den obern Ausdruck von dem untern ab, so bleibt der Ueberschuſs der Anziehung beider Schichten, gegen den Mittelpunkt der Erde zu, indem wir die höhern Potenzen von u vernachlässigen,

$$= - 2\cdot\frac{d\varrho}{dr}\cdot U.udu,$$

und integrirt man dies von $u = o$ bis $u =$ dem Werthe, welcher dem Halbmesser der Kugel gleich kommt, so ergiebt sich der früher durch V bezeichnete Werth der Anziehung

$$V = - \frac{d\varrho}{dr}\cdot\int U.udu.$$

Nun ist aber das Integral eine bestimmte von der Dichtigkeit der Luft unabhängige Gröſse, die wir durch E bezeichnen wollen, folglich kommt

$$V = - 2\cdot\frac{d\varrho}{dr}\cdot E$$

$$\int Vdr = - 2\cdot E\varrho + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, brauchen wir nur zu bemerken, daſs die Gröſse $\int Vdr$ an der Oberfläche der Erde, wo $\varrho = \varrho'$ durch P bezeichnet wurde, man hat also

$$P = - 2E\varrho' + \text{Const}$$

$$\int Vdr - P = 2E.(\varrho' - \varrho).$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{vv + 2P - 2\int Vdr}{aavv.\sin\theta^2},$$

so kommt

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aavv.\sin\theta^2}.$$

§. 602.

Man setze $r = a + y$, $ad\varphi = dx$, so läſst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{(a+y)^2 . dx^2 + aady^2}{(a+y)^4 . dx^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aavv . \sin 6^2},$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner mit a^2 dividirt und multiplicirt,

$$\frac{\left(1+\frac{y}{a}\right)^2 . dx^2 + dy^2}{\left(1+\frac{y}{a}\right)^4 . dx^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{vv . \sin 6^2}.$$

Nimmt man nun a unendlich groſs, d. h. betrachtet man die Erdoberfläche als eine Ebene, so ergiebt sich

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\sin 6^2}{1 - \frac{4E}{vv} \cdot (\varrho' - \varrho)}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum durch c, so hat man vermittelst der Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = vv + 2P - 2\int Vdr$$

folgenden Ausdruck, da im leeren Raum $\int Vdr = o$ ist,

$$cc - 2P = vv,$$

und da auſserdem $2P = -4E\varrho'$, so kommt

$$cc + 4E\varrho' = vv.$$

Die Gleichung

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\sin 6^2}{1 - \frac{4E}{vv} \cdot (\varrho' - \varrho)}$$

giebt dann, wenn man diesen Werth von vv substituirt,

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{(cc + 4E\varrho') . \sin 6^2}{cc + 4E\varrho}.$$

Vergleicht man diese mit der früher entwickelten, wo die Luftschichten sogleich als eben betrachtet wurden, und welche Gleichung die Form hatte

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{n'n'}{nn} \cdot \sin \mu^2,$$

wo μ dieselbe Bedeutung besitzt, als hier β, so wird

$$\frac{cc + 4E\varrho'}{cc + 4E\varrho} = \frac{n'n'}{nn},$$

und da wir außerdem fanden, daſs

$$\frac{n'n'}{nn} = \frac{1 + \alpha\varrho'}{1 + \alpha\varrho},$$

und so sieht man sogleich, daſs

$$\frac{4E}{cc} = \alpha$$

werden wird. Man hat daher

$$vv = cc.(1 + \alpha\varrho')$$

$$\frac{4E}{vv} = \frac{\alpha}{1 + \alpha\varrho'}.$$

§. 603.

Wir kehren nun wieder zur Differentialgleichung der Bahn des Lichts zwischen r und φ zurück. Diese war

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aavv.\sin\beta^2},$$

und wenn man hierin den Werth von $4E$ substituirt

$$4E = \frac{\alpha vv}{1 + \alpha\varrho'},$$

so kommt

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{1 + \alpha\varrho}{aa.\sin\beta^2.(1 + \alpha\varrho')}.$$

Löst man diese Gleichung nach $d\varphi$ auf, so ergiebt sich

$$d\varphi = \frac{a.\sin\beta.\sqrt{(1 + \alpha\varrho')}.dr}{r.\sqrt{rr.(1 + \alpha\varrho) - aa.\sin\beta^2.(1 + \alpha\varrho')}},$$

und um diesen Ausdruck zu integriren, muſs man die Dichtigkeit ϱ als Function des Abstandes r vom Mittelpunkt der Erde kennen.

Bei der Berechnung der astronomischen Strahlenbrechung achtet man jedoch nicht weiter auf die Natur der Bahn, welche das Licht beschreibt, sondern man sucht bloſs die Ablenkung, welche der Strahl von einer gewissen Stelle an erleidet. Es sey daher C der Mittel-

punkt der Erde (Fig. 64.), CAD der verlängerte Halbmesser, der an den Punkt A gezogen ist, wo die Bahn des Lichts die Oberfläche der Erde trifft. BMA sey die Bahn des Lichts und M ein willkürlich angenommener Punkt. MP und AQ zwei Berührungslinien, die sich in R durchschneiden; so wird PRA die Strahlenbrechung oder Ablenkung des Lichts von A bis M seyn. Man setze $CMP = \psi$, und da $QAD = 6$, $MCP = \varphi$, so wird, wenn wir den Winkel PRA durch θ bezeichnen,

$$\theta = \varphi + \psi - 6.$$

§. 604.

Differentiirt man den letzten Ausdruck, so erhält man

$$d\theta = d\varphi + d\psi.$$

Es ist aber auch $\tang \psi = \frac{rd\varphi}{dr}$, also

$$d\psi = \frac{dr^2 . d . \frac{rd\varphi}{dr}}{rrd\varphi^2 + dr^2},$$

und da vermöge der Gleichung des vorigen Paragraphs

$$rrd\varphi^2 + dr^2 = \frac{r^4 d\varphi^2 . (1 + \alpha\varrho)}{aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho')},$$

so kommt auch

$$d\psi = \frac{dr^2 . d . \frac{rd\varphi}{dr} . aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho')}{r^4 d\varphi^2 . (1 + \alpha\varrho)}.$$

Man hat aber

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{a . \sin 6 . \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}{\sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho')}}$$

$$d \cdot \frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{a . \sin 6 . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} . [r . (1 + \alpha\varrho) . dr + \frac{1}{2} . \alpha rrd\varrho]}{\sqrt{(rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho'))^3}},$$

folglich ergiebt sich

$$d\psi = -\frac{a . \sin 6 . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} . dr}{r . \sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho')}}$$

$$- \frac{a . \sin 6 . \sqrt{(1 + \alpha\varrho')} . \alpha d\varrho}{2 . (1 + \alpha\varrho) . \sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin 6^2 . (1 + \alpha\varrho')}}.$$

Addirt man hierzu den Werth von $d\varphi$, welcher, wie man leicht sieht, dem ersten Gliede dieses Ausdrucks gleich ist, so kommt

$$d\theta = -\frac{\alpha . \sin \theta . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} . \alpha d\varrho}{2.(1 + \alpha\varrho) . \sqrt{rr.(1 + \alpha\varrho) - aa . \sin \theta^2 . (1 + \alpha\varrho')}},$$

welches der verlangte Ausdruck für die Strahlenbrechung bei den als kugelförmig angenommenen Luftschichten ist.

§. 605.

Den Divisor $1 + \alpha\varrho$, welcher immer zwischen den sehr nahen Gränzen $1 + \alpha$ und 1 enthalten ist, pflegt man gewöhnlich als von der Einheit sehr wenig verschieden, zu vernachlässigen, und dasselbe kann auch mit den Factor $\sqrt{1 + \alpha\varrho'}$ im Zähler geschehen. Setzt man aufserdem

$$r = a . (1 + u)$$

so erhält man den abgekürzten Ausdruck

$$d\theta = -\frac{\sin \theta . \alpha d\varrho}{2 . \sqrt{(1 + u)^2 . (1 + \alpha\varrho) - \sin \theta^2 . (1 + \alpha\varrho')}}.$$

Da nun die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe äufserst schnell abnimmt, so wird für die gröfste Höhe, in welcher die Luft noch eine merkliche brechende Kraft besitzt, u doch immer eine sehr kleine Zahl bleiben, so dafs man die Quadrate von u und die Producte aus u in α vernachlässigen kann. Hierdurch wird der Nenner des vorigen Bruchs

$$\sqrt{\cos \theta^2 + \alpha\varrho + 2u - \alpha . \sin \theta^2 \varrho'},$$

also erhält man

$$d\theta = -\frac{\alpha . \sin \theta d\varrho}{2 . \sqrt{\cos \theta^2 + \alpha\varrho + 2u - \alpha . \sin \theta^2 \varrho'}}.$$

Ist der Winkel θ, welcher in der Astronomie die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns genannt wird, klein genug, dafs die höhern Potenzen des Bruchs

$$\frac{\alpha\varrho + 2u - \alpha\varrho' . \sin \theta^2}{\cos \theta^2}$$

vernachlässigt werden können, so kann man vorigen

Nenner in eine Reihe entwickeln, und wirklich integriren. Es kommt nämlich

$$d\theta = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.d\varrho$$
$$+\tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\varrho d\varrho}{\cos\beta^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{u d\varrho}{\cos\beta^2}$$
$$-\tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta^3.\varrho' d\varrho,$$

also wenn man integrirt

$$\theta + \text{Const} = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\varrho$$
$$+\tfrac{1}{8}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\varrho\varrho}{\cos\beta^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{u\varrho}{\cos\beta^2}$$
$$-\tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta^3.\varrho'\varrho$$
$$-\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\int\frac{\varrho du}{\cos\beta^2}.$$

Um die Constante zu bestimmen, bemerken wir, daſs an der Oberfläche der Erde $\theta = o$, $\varrho = \varrho'$, $u = o$ ist, und das unbekannte Integral $\int \varrho du$ lassen wir an derselben Stelle seinen Anfang nehmen. Dann erhält man

$$\text{Const} = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\varrho'$$
$$+\tfrac{1}{8}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\varrho'\varrho'}{\cos\beta^2}.(1 - 2.\sin\beta^2).$$

Es wird also

$$\theta = \tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.(\varrho' - \varrho)$$
$$+\tfrac{1}{8}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\varrho\varrho - \varrho'\varrho'}{\cos\beta^2}$$
$$+\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{u\varrho}{\cos\beta^2}.$$
$$-\tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\varrho'\varrho}{\cos\beta^2} + \tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\operatorname{tang}\beta^3.\varrho'\varrho'$$
$$-\tfrac{1}{2}.\alpha.\operatorname{tang}\beta.\int\frac{\varrho du}{\cos\beta^2}.$$

Dehnen wir dies Integral bis an die Gränze der Atmosphäre aus, wo $\varrho = o$ ist, und bezeichnen den daselbst

Statt findenden Werth von θ durch θ', und den Werth des Integrals $\int \varrho du$ durch U, so kommt

$$\theta' = \tfrac{1}{2}.\alpha\varrho'.\text{tang}\,\beta$$
$$- \tfrac{1}{8}.\alpha\alpha\varrho'\varrho'.\frac{\text{tang}\,\beta}{\cos\beta^2} + \tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\text{tang}\,\beta^3.\varrho'\varrho'$$
$$- \tfrac{1}{2}.\alpha.\frac{\text{tang}\,\beta}{\cos\beta^2}.U.$$

§. 606.

Es bleibt jetzt bloſs noch übrig, den Werth des Integrals $\int \varrho du$ anzugeben. Bezeichnet man durch p die Elasticität der Luft in der Höhe z über der Erdoberfläche, die Dichtigkeit durch ϱ, die daselbst Statt findende anziehende Kraft der Erde durch m, so hat man, den Lehren des Gleichgewichts der elastischen Flüssigkeiten zufolge, die Gleichung

$$dp = - m\varrho dz.$$

Ist nun g die Schwere an der Oberfläche der Erde, so wird, da die Kraft der Anziehung sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde verhält,

$$m = \frac{aag}{(a+z)^2},$$

also auch

$$dp = - \frac{aag\varrho dz}{(a+z)^2}.$$

Man hat aber

$$z = r - a$$
$$= a.(1+u) - a = au,$$

und durch Substitution dieses Werthes von z in vorige Formel erhält man

$$dp = - ag.\frac{\varrho du}{(1+u)^2}.$$

Da aber u eine kleine Gröſse ist, so kann man hier statt $1+u$ ohne merklichen Fehler die Einheit selbst setzen, und dann erhält man

$$p = - ag.\int \varrho du + C.$$

An der Oberfläche der Erde sey $p = p'$, und da wir aufserdem angenommen haben, dafs daselbst $\int \varrho du$ Null seyn soll, so wird $C = p'$, folglich

$$\frac{p' - p}{ag} = \int \varrho du.$$

An der Gränze der Atmosphäre hat man $p = o$, $\int \varrho du = U$, also wird

$$U = \frac{p'}{ag}.$$

Vermöge des Mariottischen Gesetzes ist aber auch $p' = k\varrho'$, folglich

$$U = \frac{k}{ag} \cdot \varrho',$$

wo der Werth der Constante $\frac{k}{ag} = 0{,}001262$ beträgt. Man erhält also

$$\theta' = \tfrac{1}{2} \cdot a\varrho' . \operatorname{tang} 6 . \left(1 - \frac{0{,}001262}{\cos 6^2} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{a\varrho'}{\cos 6^2} + \tfrac{1}{2} \cdot a\varrho' . \operatorname{tang} 6^2\right).$$

Nimmt man nun

$$a\varrho' = 0{,}000588,$$

so kommt, wenn man θ' gleich in Secunden erhalten will,

$$\theta' = 60'',64 . \operatorname{tang} 6 . \left(1 - \frac{0{,}001409}{\cos 6^2} + 0{,}000294 . \operatorname{tang} 6^2\right).$$

Die hieraus berechnete Refraction gilt aber blofs für den Fall, wo der Barometerstand 0,76 Meter, und die Temperatur Null Grad beträgt. Für einen andern Barometerstand p und Temperatur t mufs dieser Ausdruck, wie schon früher gezeigt ist, mit

$$\frac{p}{0{,}76 . (1 + 0{,}00375 . t)}$$

multiplicirt werden, wo die Temperatur nach dem Centerimalthermometer angegeben seyn mufs. Uebrigens läfst sich vorige Formel höchstens bis zu $6 = 70^0$ gebrauchen. Für gröfsere Werthe von 6, und vorzüglich für die Bestimmung der sogenannten Horizontalrefraction, wo $6 = 90^0$ ist, müssen die Entwickelungen viel genauer vorgenommen werden, wozu mancherlei analyti-

sche Kunstgriffe erforderlich sind, und doch die Rechnungen äufserst weitläufig werden. Wir verweisen daher den Leser, der diesen Gegenstand genauer betrachten will, auf unsere Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

§. 607.

Wir haben aus §. 603. die Gleichung

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{1 + \alpha\varrho}{aa \,.\, \sin 6^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho')},$$

und da die Gröfse $rrd\varphi^2 + dr^2$ nichts anders als das Quadrat des Elements der Bahn des Lichts in der Atmosphäre ist, so kommt, wenn wir dieses Element durch ds bezeichnen,

$$ds^2 = \frac{(1 + \alpha\varrho) \,.\, r^4 d\varphi^2}{aa \,.\, \sin 6^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho')}.$$

In demselben Paragraph hat man aber die Gleichung

$$d\varphi = \frac{a \,.\, \sin 6 \,.\, \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \,.\, dr}{r \,.\, \sqrt{rr \,.\, (1 + \alpha\varrho) - aa \,.\, \sin 6^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho')}},$$

folglich, wenn man diesen Werth substituirt, so kommt das Element der Bahn

$$ds = \frac{rdr \,.\, \sqrt{1 + \alpha\varrho}}{\sqrt{[rr \,.\, (1 + \alpha\varrho) - aa \,.\, \sin 6' \,.\, (1 + \alpha\varrho')]}}.$$

§. 608.

Setzt man hierin nach §. 605. $r = a \,.\, (1 + u)$, und vernachlässigt die Producte αu, so wie die Potenzen von u, so kommt, wenn man bemerkt, dafs man ohne merklichen Fehler den Factor $\sqrt{1 + \alpha\varrho}$ im Zähler der Einheit gleich setzen und die höhern Potenzen von u vernachlässigen kann,

$$ds = \frac{adu}{\sqrt{[\cos 6^2 + 2u + \alpha\varrho - \alpha\varrho' \,.\, \sin 6^2]}}.$$

Wenn nun an irgend einer Stelle der Atmosphäre die Dichtigkeit des Lichts $= M$ ist, so ist der Verlust, den es erleidet, indem es den Raum ds der Luft von

der Dichtigkeit ϱ durchläuft, der Gröfse $M\varrho ds$ proportional. Wir haben daher die Gleichung

$$dM = -\mu M\varrho ds,$$

wo μ ein constanter Coefficient ist, der von der lichtverschluckenden Kraft der atmosphärischen Luft abhängt. Man erhält durch Integration

$$\frac{1}{\mu}\cdot\log M = \text{Const} - \int\varrho ds.$$

An der Oberfläche der Erde sey $M = M'$, $\int\varrho ds = o$, so wird

$$\frac{1}{\mu}\cdot\log\frac{M}{M'} = -\int\varrho ds,$$

und wir haben uns also, um den Werth von M zu erhalten, mit der Integration der Formel $\int\varrho ds$ zu beschäftigen.

§. 609.

Substituirt man hierin den Werth von ds aus vorigen Paragraph, so kommt

$$\varrho ds = \frac{a\varrho du}{\sqrt{[\cos 6^2 + 2u + \alpha\varrho - \alpha\varrho'.\sin 6^2]}}.$$

Entwickelt man den Nenner in eine Reihe, indem man voraussetzt, dafs das Glied $\cos 6^2$ gegen die übrigen als bedeutend zu betrachten ist, so kommt

$$\int\varrho ds = \frac{a}{\cos 6}\cdot\int\varrho du - \frac{a}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho u du$$
$$- \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\alpha}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho\varrho du + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\alpha\varrho'.\sin 6^2}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho du.$$

Den Werth des Integrals $\int\varrho du$, welchen wir §. 605. durch U bezeichneten, haben wir schon §. 606. entwickelt, und selbigen gleich $\frac{k}{ag}\cdot\varrho'$ gefunden, wofür wir $\nu\varrho'$ setzen. Es ist also

$$\int\varrho ds = \frac{a}{\cos 6}\cdot\nu\varrho'.(1 + \tfrac{1}{2}.\alpha\varrho'.\text{tang } 6^2)$$
$$- \frac{a}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho u du - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a\alpha}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho\varrho du.$$

§. 610.

Um nun die übrigen Integrale zu finden, bezeichne man den gröfsten Werth von u durch u', so kann man

$$u'^5\varrho = \varrho'.(u'-u)^5$$

setzen. Hieraus folgt

$$u = u' - u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$du = -\tfrac{1}{5}.\frac{d\varrho}{\varrho'}.u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$\int\varrho u du = \tfrac{1}{5}.u'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{2}{5}}.d\varrho - \tfrac{1}{5}.u'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{1}{5}}.d\varrho$$

$$= \tfrac{1}{7}.u'^2\varrho'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{7}{5}} - \tfrac{1}{6}.u'^2\varrho'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{6}{5}} + \text{Const.}$$

Das Integral soll an der Oberfläche der Erde Null werden, wo $\varrho = \varrho'$ ist, also hat man zur Bestimmung der Constante

$$o = \tfrac{1}{7}.u'^2\varrho' - \tfrac{1}{6}.u'^2\varrho' + \text{Const},$$

und wird das Integral bis an die Gränze der Atmosphäre ausgedehnt, wo $\varrho = o$ ist, so bleibt

$$\int\varrho u du = \tfrac{1}{42}.u'u'\varrho'.$$

Was ferner das Integral $\int\varrho\varrho du$ anbelangt, so hat man

$$\int\varrho\varrho du = -\tfrac{1}{5}.\varrho'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{6}{5}}.d\varrho$$

$$= -\tfrac{1}{11}.\varrho'\varrho'u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{11}{5}} + \text{Const},$$

und wird dies Integral von der Oberfläche der Erde bis an die Gränzen der Atmosphäre ausgedehnt, so kommt

$$\int\varrho\varrho du = \tfrac{1}{11}.\varrho'\varrho'u'.$$

Man hat daher

$$\int\varrho ds = \frac{\alpha v\varrho'}{\cos\theta}.(1 + \tfrac{1}{2}.\alpha\varrho'.\text{tang}\,\theta^2)$$

$$- \frac{\alpha\varrho'}{\cos\theta^3}.\frac{u'u'}{42} - \frac{1}{22}.\frac{\alpha\varrho'}{\cos\theta^3}.\varrho'u'\alpha,$$

folglich auch

$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'}.\log\frac{M}{M'} = \frac{v}{\cos\theta}.(1 + \tfrac{1}{2}.\alpha\varrho'.\text{tang}\,\theta^2)$$

$$- \frac{u'u'}{42}.\frac{1}{\cos\theta^3} - \frac{u'}{22}.\frac{\alpha\varrho'}{\cos\theta^3}.$$

Was die Zahlwerthe der hierin vorkommenden constanten Gröfsen betrifft, so ist

$$\nu = 0{,}001262$$
$$\alpha\varrho' = 0{,}000588$$
$$u' = 0{,}0077126,$$

und M bedeutet die an der Gränze der Atmosphäre eintretende Lichtmenge.

§. 611.

Substituirt man die hier angegebenen Zahlenwerthe in vorige Gleichung, so kommt

$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'} \cdot \log \frac{M}{M'} = 0{,}00126162 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$
$$- 0{,}00000125 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Nach **Lambert** (Photometria) soll das Licht im Verhältnifs von 5 : 3 vermindert werden, wenn es senkrecht durch die Atmosphäre einfällt; wir haben also zur Bestimmung von $\mu\alpha\varrho'$ die Gleichung, da für senkrecht einfallendes Licht $\theta = o$ ist,

$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'} \cdot \log \frac{5}{3} = 0{,}00126037$$
$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'} = 0{,}002467334.$$

Hieraus ergiebt sich also endlich

$$\log \frac{M}{M'} = 0{,}51136 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$
$$- 0{,}000507 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Die in dieser Formel vorkommenden Logarithmen sind natürliche, sollen sie briggische bedeuten, so mufs durch 2.3025851 dividirt werden, und wir erhalten

$$\log M' = 0.22218 \cdot \frac{1}{\cos \theta} - 0.000220 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Man kann aber diese Formel nicht wohl weiter als bis ungefähr $\theta = 70^0$ brauchen.

Von den Höfen und Nebensonnen.

§. 612.

Bei der Erklärung dieser merkwürdigen optischen Erscheinungen werden wir die Theorie befolgen, welche Fraunhofer von denselben in dem dritten Hefte der von Schumacher herausgegebenen astronomischen Abhandlungen dargelegt hat. Was zuerst die Höfe um Sonne oder Mond betrifft, bei deren Erscheinung der Himmel mit einem schwachen Ueberzug von dünnen Wolken bedeckt ist, so muſs man zwei Hauptarten derselben unterscheiden. Erstens kann der Fall eintreten, daſs der Himmelskörper von drei oder mehrern concentrischen Farbenringen umgeben ist, die sowohl unter sich als mit dem leuchtenden Körper selbst verbunden sind, und bei denen die rothe Farbe nach Auſsen gekehrt ist. Diese werden wir mit Fraunhofer Höfe kleiner Art nennen. Die andere Art besteht in einem weiſsen oder farbigen Ringe, der den Himmelskörper umgiebt, und ungefähr $22\frac{1}{2}$ Grad von demselben entfernt ist. Bei diesem liegt die rothe Farbe nach Innen. Oefters bemerkt man auch noch um diesen ersten Ring einen zweiten, welcher einen doppelt so groſsen Durchmesser als der erste besitzt. Diese nennt Fraunhofer Höfe groſser Art. Wir werden zuerst die Erklärung der letztern Art vornehmen, da die der erstern auf einer Eigenschaft des Lichts beruht, von der wir bisher noch nicht gesprochen haben.

§. 613.

Wenn das Licht durch ein Prisma geht, dessen brechender Winkel $= p$, und bei welchem das Bre-

chungsverhältnifs durch n ausgedrückt wird, so findet sich der Winkel γ, unter welchem der einfallende und der ausfahrende Strahl sich schneiden, für den Fall, wo γ ein Minimum ist, nach §. 359.,

$$\sin\gamma = 2n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \,.\, \sqrt{1 - nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}$$
$$- \sin p \,.\, (1 - 2nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2),$$

und man weifs aus der Theorie des Maximum und Minimum, dafs sich in diesem Fall der Einfallswinkel merklich ändern kann, ohne dafs hierdurch der Winkel γ eine merkliche Aenderung erleidet. Nimmt man nun an, die Luft sey mit kleinen Eiskrystallen angefüllt, die aus dreiseitigen Prismen bestehen, und das Licht der Sonne oder des Mondes werde durch dieselben gebrochen, so wird grade bei diesem Winkel γ das gebrochene Licht sich am hellsten zeigen, und ein heller Kreis vom Halbmesser γ um den Himmelskörper erscheinen. Nimmt man nun für rothe Strahlen $n = 1{,}32$, und für den brechenden Winkel des Prisma $p = 60^0$, so findet sich $\gamma = 22^0 36'$, welches sehr genau mit den Beobachtungen übereintrifft.

§. 614.

Setzt man in voriger Gleichung $n + \delta n$ statt n, und $\gamma + \delta\gamma$ statt γ, so erhält man die Gleichung

$$\delta\gamma \,.\, \cos\gamma = 2\delta n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \,.\, \sqrt{1 - nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}$$
$$+ 4n\delta n \,.\, \sin p \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2$$
$$- 2nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \cdot \frac{\delta n \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}{\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}}$$
$$= 4n\delta n \,.\, \sin p \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2$$
$$+ 2 \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \cdot \frac{1 - 2nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}{\sqrt{1 - nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2}} \cdot \delta n.$$

Da nun im vorliegenden Fall $2nn \,.\, \sin\tfrac{1}{2}p^2$ kleiner als die Einheit ist, so werden die mehr brechbaren Strahlen einen gröfsern Werth für γ geben, als die weniger brechbaren, und hieraus folgt, dafs die rothe Farbe des Kreises nach Innen, die violette Farbe nach Aufsen

liegt, grade so wie er die Beobachtung bei den Höfen grofser Art zeigt.

§. 615.

Statt der dreiseitigen Prismen, welche die Eiskrystalle bilden, kann man auch sechsseitige annehmen, ohne dafs dadurch die Rechnung geändert wird. Denn es sey *ABCDEF* ein solches sechsseitiges reguläres Prisma, *LM* ein Strahl, dessen Einfallswinkel dem Minimum von γ entspricht, so mufs nach §. 358. der Brechungswinkel im Innern des Prisma dem halben brechenden Winkel des Prisma gleich werden. Wollte man also *BAF* als das Prisma annehmen, so wäre der brechende Winkel desselben $BAF = 120^0$, folglich der Brechungswinkel im Innern $= 60$ Grad. Ein solcher Brechungswinkel kann aber nicht Statt finden, da der gröfste Werth des Sinus desselben $\frac{1}{n} = \frac{1}{1,32} = 0,7575$ ist, und der entspechende Winkel nur $49^0\ 15'$ beträgt. Die gebrochenen Strahlen werden also durch die zweite Seite *EF* gehen, was uns auf das dreiseitige Prisma zurückführt, da die Seiten *AB*, *EF* einen Winkel von 60 Grad mit einander bilden. Auf die Strahlen, welche durch *ED* gehen, haben wir keine Rücksicht zu nehmen, da dieselben mit den einfallenden Strahlen parallel werden, sich also mit dem directen Licht der Himmelskörper mischen.

§. 616.

Nehmen wir an, dafs die sechsseitigen prismatischen Crystalle an ihren Grundflächen durch sechsseitige Pyramiden geschlossen werden, so haben wir hier vermittelst der einander gegenüberliegenden Seiten der Pyramiden, neue Prismen, durch welche das Licht gebrochen werden kann, und es fragt sich, welchen Werth wir dem Neigungswinkel dieser Flächen gegen einander beilegen müssen, um daraus den zweiten Hof

von 45° Halbmesser zu erklären. Man findet durch einige Versuche aus der Formel

$$\sin\gamma = 2n.\sin\tfrac{1}{2}p.\cos p.\sqrt{1 - nn.\sin\tfrac{1}{2}p^2}$$
$$- \sin p.(1 - 2nn.\sin\tfrac{1}{2}p^2),$$

indem in derselben $\gamma = 45^0$, $n = 1{,}32$ gesetzt wird, daſs $p = 88$ Grad genommen werden muſs, um der Gleichung Genüge zu leisten. Der Neigungswinkel zweier einander gegenüberliegender Flächen der Schluſspyramide beträgt daher 88 Grad, was mit der bekannten Krystallisationsform des Eises sehr gut übereinstimmt. Berechnet man sich mit dem Werthe $p = 88^0$ nach der §. 614. angegebenen Formel $d\gamma$, so findet man dasselbe positiv, voraus hervorgeht, daſs die stärker gebrochenen Strahlen einen gröſseren scheinbaren Abstand von der Sonne haben, so daſs das Roth dieses zweiten Ringes der Sonne zugekehrt ist, was ebenfalls mit der Erfahrung übereinstimmt. Da nun die Flächen dieser Pyramiden viel kleiner sind, als die Seitenflächen der Prismen, so wird schon aus diesem Grunde der zweite äuſsere Ring viel schwächer erscheinen, als der innere. Auſserdem ist im zweiten Fall der Brechungswinkel gröſser, und auch dies trägt zur Schwächung bei, indem je schiefer das Licht auffällt, desto mehr wird von demselben reflectirt.

§. 617.

Ein einziges Mal ist auch noch ein dritter Kreis von 90° Halbmesser beobachtet worden, nämlich von Hevel in Danzig am 20. Februar 1661; er erschien freilich äuſserst schwach. Dieser läſst sich aus der Zurückwerfung des Lichts im Innern des Prisma folgendermaſsen erklären. Es sey LM der einfallende Strahl, MN der gebrochene (Fig. 65.), der Einfallswinkel $= \varepsilon$, der Brechungswinkel $= \beta$, so ist

$$\sin\varepsilon = n.\sin\beta.$$

Ist der Neigungswinkel der beiden Flächen AB, EF gegen einander $= p$, so hat man

$$p + AMN + FNM = 180^0.$$

Zieht man das Einfallsloth NG und setzt $MNG = q$, so ist

$$AMN = 90^0 - \beta;$$
$$FNM = 90^0 - q;$$

folglich, wenn man diese Werthe in obige Gleichung substituirt,

$$p - \beta - q = o, \quad q = p - \beta.$$

In N werde der Strahl nach NO reflectirt, so findet sich, da die Seiten FE, CD den Winkel p mit einander bilden, der Winkel NOD aus der Gleichung

$$p + ONE + NOD = 180^0.$$

Errichtet man das Einfallsloth OH, so ist auch, da $ONE = 90^0 - q$,

$$p - q - HON = o,$$

und vergleicht man dies mit der Gleichung $p - \beta - q = o$, so folgt, dafs $HON = \beta$ wird. Ist also OP der ausfahrende Strahl, OK das Einfallsloth, so wird $POK = \varepsilon$ seyn müssen. Man verlängere den einfallenden und ausfahrenden Strahl bis sie sich in Q schneiden, und bezeichne den Winkel MQO durch γ, so erhält man in dem Viereck $QMNO$, da der Winkel $QMN = QON = \varepsilon - \beta$, und der überstumpfe Winkel $MNO = 360^0 - 2q$,

$$360^0 = 360^0 - 2q + 2\varepsilon - 2\beta + \gamma$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = - \varepsilon + \beta + q.$$

§. 618.

Wir haben also folgende Gleichungen erhalten

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \beta\,;$$
$$q = p - \beta\,;$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = \beta - \varepsilon + q.$$

Die zweite Gleichung giebt

$$\sin \beta = \sin (p - q),$$

und aus der dritten erhält man

$$\sin \beta = \sin (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon - q),$$

folglich, wenn man hierin den Werth von $\sin \beta$ aus der ersten Gleichung substituirt,

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin (p - q)$$
$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon - q).$$

Der gebrochene Strahl MN wird im Innern vollständig reflectirt, sobald $\sin q > \frac{1}{n}$, nehmen wir also den Grenzwerth $\sin q = \frac{1}{n}$, so lassen sich die vorigen beiden Gleichungen auch so schreiben, indem man $\frac{\sqrt{nn-1}}{n}$ statt $\cos q$ setzt,

$$\sin \varepsilon = \sin p . \sqrt{nn - 1} - \cos p$$
$$\sin \varepsilon = \sin (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon) . \sqrt{nn - 1} - \cos (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon).$$

§. 619.

Die zweite Gleichung giebt, wenn sie entwickelt wird,

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon = {} & \sin \tfrac{1}{2}\gamma . \cos \varepsilon . \sqrt{nn - 1} \\ & + \cos \tfrac{1}{2}\gamma . \sin \varepsilon . \sqrt{nn - 1} \\ & - \cos \tfrac{1}{2}\gamma . \cos \varepsilon + \sin \tfrac{1}{2}\gamma . \sin \varepsilon .\end{aligned}$$

Nimmt man die Glieder zusammen, welche in $\sin \frac{1}{2}\gamma$, und diejenigen, welche in $\cos \frac{1}{2}\gamma$ multiplicirt sind, so läſst sich die Gleichung so ausdrücken

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon - {} & \sin \tfrac{1}{2}\gamma . [\cos \varepsilon . \sqrt{n^2 - 1} + \sin \varepsilon] \\ & = \cos \tfrac{1}{2}\gamma . [\sin \varepsilon . \sqrt{n^2 - 1} - \cos \varepsilon],\end{aligned}$$

und wenn man quadrirt, und $1 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2$ statt $\cos \frac{1}{2}\gamma^2$ setzt,

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon^2 & - 2 . \sin \varepsilon . \sin \tfrac{1}{2}\gamma . [\cos \varepsilon . \sqrt{nn - 1} + \sin \varepsilon] \\ & + \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 . [\cos \varepsilon . \sqrt{nn - 1} + \sin \varepsilon]^2 \\ & = [\sin \varepsilon . \sqrt{nn - 1} - \cos \varepsilon]^2 \\ & - \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 . [\sin \varepsilon . \sqrt{nn - 1} - \cos \varepsilon]^2 .\end{aligned}$$

Nach den gehörigen Reductionen kommt

$$\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 - 2 . \sin \tfrac{1}{2}\gamma . \frac{\sin \varepsilon}{nn} . [\cos \varepsilon . \sqrt{nn - 1} + \sin \varepsilon] \\ = \frac{[\sin \varepsilon . \sqrt{nn - 1} - \cos \varepsilon]^2 - \sin \varepsilon^2}{nn},\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\cos\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]$$

$$\pm\frac{1}{nn}\cdot\sqrt{\begin{bmatrix} nn\,.[\sin\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon]^2 - nn\,.\sin\varepsilon^2 \\ + \sin\varepsilon^2\,.[\cos\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]^2 \end{bmatrix}}.$$

Die Gröſse unter dem Wurzelzeichen läſst sich auch so schreiben:

$$\begin{aligned} &+ (nn - \sin\varepsilon^2)\,.\sin\varepsilon^2\,.(nn-1) \\ &- 2\,.(nn - \sin\varepsilon^2)\,.\sin\varepsilon\,.\cos\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} \\ &+ (nn - \sin\varepsilon^2)\,.\cos\varepsilon^2 \\ &= (nn - \sin\varepsilon^2)\,.[\sin\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon]^2. \end{aligned}$$

Es wird daher

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\cos\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]$$

$$\pm\frac{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}{nn}\cdot[\sin\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon].$$

§. 620.

Jetzt haben wir nur noch den Werth von ε durch p ausgedrückt in dieser Gleichung zu substituiren. Wir haben gefunden, daſs

$$\sin\varepsilon = \sin p\,.\sqrt{nn-1} - \cos p$$

$$\begin{aligned} nn - \sin\varepsilon^2 &= nn - \sin p^2\,.(nn-1) - \cos p^2 \\ &\quad + 2\,.\sin p\,.\cos p\,.\sqrt{nn-1} \\ &= nn - \sin p^2\,.(nn-1) - 1 + \sin p^2 \\ &\quad + 2\,.\sin p\,.\cos p\,.\sqrt{nn-1} \\ &= (nn-1)\,.\cos p^2 + \sin p^2 \\ &\quad + 2\,.\sin p\,.\cos p\,.\sqrt{nn-1} \\ &= [\cos p\,.\sqrt{nn-1} + \sin p]^2. \end{aligned}$$

Nimmt man in der obern Gleichung für $\sin\tfrac{1}{2}\gamma$ das negative Vorzeichen bei der Wurzel, so erhält man auch

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\varepsilon}{nn}\cdot[\sin\varepsilon\,.\sqrt{nn-1} + \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}]$$

$$+\frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\sin\varepsilon - \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}\,.\sqrt{nn-1}].$$

Es ergiebt sich nun

$$\sin \varepsilon . \sqrt{nn - 1} + \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} = nn . \sin p$$

$$\sin \varepsilon - \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} . \sqrt{nn - 1} = - nn . \cos p,$$

folglich wird endlich

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sin p . \sqrt{[1 - (\sin p . \sqrt{nn - 1} - \cos p)^2]}$$
$$- \cos p . (\sin p . \sqrt{nn - 1} - \cos p).$$

Setzt man nun hierin $p = 60^0$, für rothes Licht $n = 1{,}32$, für violettes $n = 1{,}33$, so kommt für die rothen Strahlen $\gamma = 91^0 30'$, für die violetten $\gamma = 89^0 56$, welches eine ziemlich genaue Uebereinstimmung mit der Hevelschen Beobachtung giebt.

§. 621.

Um die Höfe kleiner Art, welche den leuchtenden Körper berühren, zu erklären, müssen wir auf eine Eigenschaft des Lichts aufmerksam machen, welche Beugung oder Inflexion des Lichts genannt wird. Bringt man nämlich in einem dunkeln Zimmer, in welches blofs durch eine sehr kleine Oeffnung ein Sonnenstrahl einfallen kann, in diesen Sonnenstrahl irgend einen sehr schmalen Körper, und fängt den Schatten desselben mit einer weifsen Fläche auf, so wird man bemerken, dafs die Breite des Schattens in gar keinem Verhältnisse zu dem Durchmesser des Körpers steht, welches doch der Fall seyn müfste, wenn das Licht an den Rändern des dunkeln Körpers gradlinig fortgegangen wäre. So fand z. B. Newton den Durchmesser des Schattens eines Haars, das $\frac{1}{280}$ Zoll Durchmesser hat, und in 12 Fufs Entfernung vom leuchtenden Punkt aufgestellt war, wenn der Schatten in 4 Zoll Entfernung aufgefangen wurde, $= \frac{1}{60}$ Zoll, in zwei Fufs Abstand $= \frac{1}{28}$ Zoll, in zehn Fufs Abstand $= \frac{1}{8}$ Zoll, wo man gleich sieht, dafs die Durchmesser der Schatten nicht das Gesetz befolgen, welches bei der gradlinigen Fortpflanzung des Lichts Statt finden müfste. Wir sind daher gezwungen anzunehmen, dafs das Licht an den

Rändern des Haars, oder jedes andern schmalen Körpers vom gradlinigen Wege abgelenkt, oder gebeugt wird.

§. 622.

Diese Beugung des Lichts wird nun aber aufserdem eben so wie die Brechung des Lichts von Farbenerscheinungen begleitet, indem wenn man den Schatten auf einer weifsen Fläche auffängt, zwischen dem Schatten und dem weifsen Licht sich farbige Streifen oder Frangen zeigen. Im weifsen Licht sieht man drei solcher Streifen, deren Farben vom Schatten ausgerechnet folgende Reihen bilden:

1) violett, dunkelblau, hellblau, grün, gelb, roth;

2) blau, grün, gelb, roth;

3) blafsblau, blafsgelb, blafsroth;

diese Farbenreihen wiederholen sich nun immer matter werdend. Fraunhofer hat über die Beugung des Lichts und die damit verbundenen Farbenerscheinungen die genannten Versuche angestellt, und folgende allgemeine Gesetze gefunden:

1) Bei verschiedenen Breiten der beugenden Körper verhalten sich die Ablenkungswinkel der gebeugten Strahlen, die ähnliche Punkte in den Systemen von Frangen bilden, umgekehrt wie die Breite der Körper.

2) Die Entfernungen der ähnlichen Strahlen (z. B. des äufsersten Roth) von der Mitte der verschiedenen Farbenbilder bilden in jedem Fall eine arithmetische Progression.

§. 623.

Statt des dunkeln Körpers, welcher in das durch die Oeffnung fallende Sonnenlicht gestellt werden sollte, hat Fraunhofer gleich die kleine Oeffnung selbst gewählt, weil an den Rändern derselben gleichfalls die Erscheinungen der Beugung des Lichts Statt finden müssen. Wird daher das Licht an den Rändern eines Körpers gebeugt, so braucht man in den vorigen drei Gesetzen nur statt der Breite der Oeffnung den Durch-

messer des Körpers zu setzen, und die Resultate werden dieselben bleiben.

Auf die Beugung des Lichts beruhet nun die Erscheinung der Höfe kleinerer Art, und wir wollen nun einige Beobachtungen über dieselben anführen. Im Junius 1692 beobachtete Newton, als er das Sonnenbild in einem mit Wasser gefüllten Gefäſs betrachtete, drei farbige Höfe um die Sonne. Die Farben des ersten zunächst der Sonne waren nach Innen blau, nach Auſsen roth, und zwischen diesen beiden Farben weiſs. Der zweite war nach Innen violet und blau, nach Auſsen blaſsroth, in der Mitte grün. Die Farben des dritten Ringes waren nach Innen blaſsblau, nach Auſsen blaſsroth. Diese Ringe schlossen sich dicht aneinander. Der Durchmesser des zweiten Ringes betrug $9\frac{1}{3}°$. Die beiden andern Ringe hatte er keine Zeit zu messen, er schätzte aber den ersten auf 5 bis 6 Grad, den dritten auf 12 Grad.

Jordan fand am 3ten October 1792 bei einem Hofe kleiner Art um den Mond den Durchmesser des ersten rothen Ringes $= 2° 1'$, des zweiten $= 3° 20'$. Eine andere Beobachtung vom 25sten October 1797 gab ihm für den Durchmesser des ersten Ringes $5° 36'$, für den des zweiten $9° 52'$. Die Farbenfolge fand er eben so, wie sie Newton beschreibt.

§. 624.

Man sieht aus diesen Beschreibungen, daſs die Farbenfolge in den Höfen kleiner Art grade dieselbe ist, als diejenige, welche bei der Beugung des Lichts, wenn es entweder durch kleine Oeffnungen geht, oder an den Rändern von Körpern vorüberstreift, Statt findet, so daſs nicht zu bezweifeln ist, die Höfe kleiner Art entstehen durch Beugung des Lichts vermittelst gewisser in der Atmosphäre befindlicher Körperchen. Diese Körperchen können nun nichts anders seyn, als die in der Luft schwimmenden Dunstkügelchen, und wir wollen

sehen, wie sich die Beobachtungen mit dieser Hypothese vereinigen lassen. Nach den Versuchen über die Beugung des Lichts, welche Fraunhofer im achten Band der Denkschriften der königlichen baierischen Akademie beschrieben hat, finden folgende Gleichungen Statt, wenn γ der Durchmesser des beugenden Körpers, hier des Dunstkügelchens, in pariser Zollen ausgedrückt, und L', L'', L''' u. s. w. die in Bogen ausgedrückten Winkelabweichungen des letzten rothen Strahls in den verschiedenen Farbenfolgen augiebt,

$$L' = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$L'' = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

$$L''' = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + 2 \cdot \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

u. s. w. Wir dürfen nun aber hierbei nicht die beobachteten Halbmesser der farbigen Kreise nehmen, sondern müssen dieselben um den Halbmesser des Himmelskörpers vermindern, weil um diese Gröfse der Durchmesser bei einem leuchtenden Kreise gröfser erscheint, als bei einem leuchtenden Punkte. Dann hat man aus der ersten Jordanschen Beobachtung, wenn man die Winkel in Bogen ausdrückt,

$$0{,}013090 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}024580 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}.$$

Dies giebt

$$\gamma = 0{,}00196\ ;\ \gamma = 0{,}00192.$$

Aus der zweiten Jordanschen Beobachtung erhalten wir

$$0{,}044360 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}081594 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma},$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$\gamma = 0{,}000579\ ;\ \gamma = 0{,}000577.$$

Man sieht hieraus, wie genau die Durchmesser der Dunstkügelchen, die aus jeder Beobachtung abgeleitet sind, mit einander übereinstimmen. Der Durchmesser des Mondes ist hierbei zu 31 Minuten angenommen.

Was nun Newton's Beobachtung anbetrifft, so erhalten wir folgende Gleichungen, indem wir den Halbmesser der Sonne zu 16 Minuten annehmen,

$$0{,}043924 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}076794 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

$$0{,}100065 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + 2 \cdot \frac{0{,}0000214}{\gamma}.$$

Hieraus erhalten wir folgende Werthe für γ:

$$\gamma = 0{,}000585;$$
$$\gamma = 0{,}000613;$$
$$\gamma = 0{,}000684.$$

Diese Werthe des Durchmessers der Dunstkügelchen weichen nun freilich sehr von einander ab, allein man kann sich auch bloſs auf den mittlern Ring verlassen, da die beiden andern ganz oberflächlich geschätzt sind. Rechnet man mit dem Werthe von γ, der sich aus dem zweiten Ringe ergiebt, zurück, so findet man, daſs der Halbmesser des ersten Kreises 5° 20′, der des dritten 13° 20′ hätte betragen müssen.

§. 625.

Die Nebensonnen zerfallen ebenfalls in zwei verschiedene Arten, in verticale und horizontale. Rothmann in Cassel beobachtete am 2ten Januar 1586 eine Erscheinung der ersten Art. Ehe die Sonne bei reinem Horizont aufging, erschien vertical eine Säule von der Breite des scheinbaren Sonnendurchmessers; kurz darauf ging in dieser Säule ein Sonnenbild auf. Von diesem Bilde befand sich kaum noch ein Zoll unter dem Horizont, so ging in derselben Säule die wahre Sonne auf, der noch ein anderes gleiches Bild folgte; die

Säule blieb mit ihren drei an einander hängenden Sonnen immer vertical. Die ganze Erscheinung dauerte eine Stunde, wo dann eine vom Scheitel herkommende dunkele Wolke das Ganze verdeckte.

Auch Cassini beobachtete am 31sten Januar 1693 eine gleiche Erscheinung von zwei Nebensonnen, die sich aber nicht ganz berührten; die vorher erwähnten verticalen Lichtströme waren auch hier zu sehen. Uebrigens sind die Erscheinungen der verticalen Nebensonnen sehr selten.

§. 626.

Man kann dieses Phänomen der verticalen Nebensonnen durch einen Versuch hervorbringen, indem man die aufgehende Sonne durch ein Gitter beobachtet, welches aus parallelen horizontalen Fäden besteht, in welchen die Entfernung der Mitte je zweier Fäden im ganzen Gitter gleich grofs ist, und ungefähr 0,0022 Pariser Zoll beträgt. Vermittelst dieses Gitters sieht man zu beiden Seiten der Sonne in verticaler Richtung eine Nebensonne, welche gegen die wahre Sonne zu bläulich, nach aufsen roth, in der Mitte weifs ist. Haben die Fäden nicht gleichen Abstand, so erkennt man die Farben der Nebensonnen weniger. Von den Nebensonnen geht ein dem Durchmesser der Sonne an Breite gleicher Lichtstreifen aus, der bei gleicher Entfernung der Fäden etwas farbig erscheint; bei ungleicher Entfernung verschwinden aber die Farben mehr. Bei einem Gitter, wo die Entfernung der Fäden von einander $\varepsilon = 0,0020$ Pariser Zoll beträgt, treten die Nebensonnen ungefähr einen Zoll in die wahre Sonne hinein, wie dies bei Rothmann's Beobachtung der Fall war. Ist ε kleiner, so treten die Sonnen weiter aus einander. Bei diesem Versuche kann man sich auch einer Glasplatte bedienen, die mit Blattgold belegt ist, in welches feine Linien in gleichen Abständen radirt sind. Zieht man auf dieser Platte ein anderes System von Linien,

welches das erste senkrecht durchschneidet, deren Entfernung aber bedeutend gröfser ist, z. B. = 0,02 Par. Zoll, so wird hierdurch das Phänomen nicht geändert, weil die dadurch entsprechenden horizontalen Nebensonnen mit der wahren fast ganz zusammenfallen.

§. 627.

Nachdem diese Versuche dargestellt sind, durch welche sich die verticalen Nebensonnen zeigen, kommt man leicht auf die Idee, dafs diese Erscheinung in der Natur durch die Beugung des Lichts an den in der Atmosphäre befindlichen Dunstkügelchen hervorgebracht werde. Es sey ABC die Oberfläche der Erde (Fig. 66.), DF ein Schicht Dunstkügelchen, die von einander die gleiche Entfernung η besitzen; BFH die nach der aufgehenden Sonne gezogene Linie, welche die Dunstschicht in F schneidet. Die scheinbare verticale Entfernung der Dunstkügelchen von einander ist dann $\eta . \sin BFG$, während die horizontale Entfernung derselben von einander immer $= \eta$ bleibt; da nun der Winkel BFG bei geringer Höhe der Sonne sehr klein ist, so kann die horizontale Entfernung der Dunstkügelchen von einander sehr bedeutend seyn, und doch die verticale sehr klein werden. Nimmt man Rothmann's Beobachtung, und setzt den Halbmesser der Sonne 16′ 20″, so war der Durchmesser der gleichen Nebensonne = 32′ 40″; also, wenn die Sonnen sich berührt hätten, wäre die Entfernung vom Mittelpunkt der wahren Sonne bis zum Ende der äufsersten Nebensonne 49′ gewesen; sie griffen aber einen Zoll in einander ein, folglich mufs man den zwölften Theil des Durchmessers abziehen; dann bleibt 46′ 15″. Da ferner die Sonne in der Rechnung als Punkt angesehen werden mufs, so mufs man hiervon den Halbmesser der Sonne abziehen; also ist die eigentliche Entfernung bis zum äufsersten Roth = 29′ 55″ = 0,0087023. Substituirt man dies in die Gleichung

$$L' = \frac{0,0000257}{\gamma},$$

so erhält man $\gamma = 0,00295$. Dies ist nun im vorliegenden Falle nichts anders, als die verticale Distanz der Dunsttheilchen. Es ist also

$$\eta \,.\, \sin BFG = 0,00295.$$

Ferner sey die Höhe der Dunstschicht über der Erdoberfläche $= h$, der Halbmesser der Erde $= r$, so wird

$$\frac{r}{r+h} = \cos BFG,$$

oder abgekürzt

$$\sin \tfrac{1}{2} . BFG = \sqrt{\frac{h}{2r}},$$

da h gegen r immer sehr klein ist. Dies giebt, wenn man $h = \frac{1}{4}$ Meile nimmt,

$$BFG = 1^0\, 12'\, 54''$$
$$\sin BFG = 0,02116.$$

Man findet dann den horizontalen oder eigentlichen Abstand der Dunstkügelchen

$$\eta = 0,139 \text{ Par. Zoll.}$$

Wenn die Dunstkügelchen keine so regelmäſsige Entfernungen von einander haben, so werden keine verticalen Nebensonnen erscheinen, sondern sich bloſs senkrechte Lichtsäulen zu beiden Seiten der Sonne zeigen. Uebrigens sieht man leicht, daſs die Erscheinung der Nebensonne nur in sehr geringen Höhen sichtbar seyn kann, weil, sobald $\eta \,.\, \sin BFG = 0,02$ wird, das Bild mit der Sonne selbst zusammenfällt. Nimmt man nun den hier für η gegebenen Werth an, so hat man, um die Gränze von BFG zu bestimmen, die Gleichung

$$\sin BFG = \frac{0,02}{0,139} = 0,1439$$
$$= 8^0\, 17'.$$

Behält man die Bezeichnungen h, r bei, und setzt die Höhe der Sonne, welche diesem Werthe des Winkels BFG entspricht, $= H$, so findet man leicht folgende Proportion

$$\cos H : h + r = \cos BFG : r,$$

und da das Verhältnifs $\frac{r}{h+r}$ der Einheit so nahe kommt, so darf man ohne merklichen Fehler $H = BFG = 8^0\,17'$ setzen. In dieser Höhe der Sonne würde also das Phänomen von selbst aufgehört haben.

§. 628.

Auch der horizontale Kreisbogen, der öfters in gleicher Breite mit dem Himmelskörper durch selbigen geht, läfst sich aus der Beugung des Lichts erklären, und indem derselbe den Hof grofser Art durchschneidet, mufs sich im Durchschnittspunkt eine bedeutend hellere Stelle zeigen, welche als horizontale Nebensonne erscheint. Man kann durch einen Versuch diesen horizontalen Lichtstreifen leicht darstellen; bestreicht man nämlich die Hand mit etwas Fett, und fährt dann einigemal in paralleler Richtung über eine Glasplatte weg, so wird diese ebenfalls mit Fett bestrichen, und man sieht durch ein Microscop, dafs sich in dieser Fettlage Linien befinden, die zwar ungleiche Entfernung von einander haben, aber doch merklich parallel sind, und in denen sich das Glas frei von Fett zeigt. Bringt man nun diese Glastafel so vor das Auge, dafs diese Streifen eine verticale Lage haben, und betrachtet einen leuchtenden Körper, so sieht man einen Lichtstreifen, der in horizontaler Lage bis an die Enden der Glastafel geht. Der ungleichen Entfernung der Streifen wegen, werden die verschiedenen Farbenspectra, welche in jeder Linie entstehen, sich decken, und daher der Lichtstreifen weifse Farbe besitzen.

§. 629.

Da es bei der Beugung des Lichts ganz gleichgültig ist, was für Körper diese Wirkung hervorbringen, so können wir uns in der Atmosphäre eine Schicht von Eiskrystallen oder Dunstkügelchen vorstellen. Es sey nun η der Abstand der Mittelpunkte zweier Dunst-

kügelchen von einander, der Winkel *BFG* (Fig. 66.) $= \varphi$, so ist der verticale Abstand der Mittelpunkte derselben $= \eta . \sin \varphi$, und bezeichnet man den Durchmesser der Dunstkügelchen durch δ, so ist der scheinbare leere Zwischenraum

$$= \eta . \sin \varphi - \delta.$$

Es kann nun sehr leicht der Fall eintreten, daſs diese Gröſse $\eta . \sin \varphi - \delta$ Null oder gar negativ wird, so daſs also in verticaler Richtung gar kein Licht durch die Zwischenräume hindurch gehen kann, und bloſs in horizontaler Richtung sind Zwischenräume vorhanden, von der Breite $\eta - \delta$. Wir haben also hier ganz den Fall des im vorigen Paragraphen beschriebenen Versuchs, indem die verticalen Dunstkugelreihen die mit Fett beschmutzten Stellen des Glases vorstellen, und die in verticaler Lage zwischen ihnen befindlichen leeren Stellen, die auf der Glasplatte von Fett entblöſsten Stellen angeben. Es wird sich also bei dieser Anordnung der Dunstkügelchenschicht ein Lichtstreifen zeigen, der in horizontaler Richtung durch den Himmelskörper geht, wie es auch der vorige Versuch angab.

§. 630.

In §. 628. ist schon angegeben worden, daſs die horizontalen Nebensonnen durch den Durchschnitt eines Hofes groſser Art und den durch den Himmelskörper gehenden horizontalen Kreis gebildet werden können; es können dann diese beiden Kreise, einzeln genommen, so lichtschwach seyn, daſs sie dem Auge verschwinden, und doch kann im Durchschnittspunkt die Summe der Lichtmassen stark genug seyn, um als Nebensonnen zu erscheinen. Allein horizontale Nebensonnen können auch durch eine ganz andere Ursache gebildet werden, nämlich wie die Höfe groſser Art durch die Brechung in Eiskrystallen. Haben nämlich die in der Atmosphäre befindlichen Krystalle gegenseitig eine solche Stellung, daſs sie sich für des Beobachters Auge einer parallelen

Lage nähern, so sind in horizontaler Richtung die Zwischenräume am gröfsten, und die Krystalle decken sich in dieser Richtung am wenigsten, folglich kann von dieser Stelle das meiste gebroehene Licht ins Auge gelangen, und die mit der Sonne in einerlei Horizontalebene liegenden Theile des Hofes müssen am hellsten erscheinen, und Nebensonnen zeigen.

Druckfehler.

Seite 36	Zeile 1	v. o.	statt	dessen Bild oben,	lies	dessen Bild unten.
— 56	— 12	v. u.	—	$2a - h$	lies	$2a + h$.
— 58	— 12	v. o.	—	die	—	den.
— 81	— 1	v. u.	—	γ	—	λ.
— 83	— 13	v. o.	—	EO	—	EC.
— 347	— 9	v. u.	—	CM	—	LM.
— 374	— 19	v. o.	—	$\frac{h}{\iota}$	—	$\frac{h}{r}$.
— 503	— 11	v. o.	—	0.0537	—	9.0537.

Aufser diesen Druckfehlern haben sich §. 492 ff. bei der Berechnung einer achromatischen aplanatischen Linse einige Rechnungsfehler eingeschlichen. Die dort für die Krümmungshalbmesser gefundenen Werthe

$$r = + 0.141864$$
$$\varrho = - 0.514505$$
$$r' = + 0.179768$$
$$\varrho' = - 0.116413$$

entsprechen nicht genau der Forderung, dafs sich die mittleren und violetten Strahlen, die parallel der Axe sowohl unendlich nahe bei derselben als auch unter einem Winkel von 18° 30′ auf das Glas fallen, in Einem Punkte der Axe in der Entfernung 1 von der Glaslinse vereinigen sollen. Die Vereinigungsweiten jener vier Systeme von Strahlen sind bei den obigen Krümmungshalbmessern

für mittlere Axenstrahlen 0.990096

für violette Axenstrahlen 0.987284

für mittlere unter einem Winkel von 18° 30′ auffallende Strahlen 0.978137,

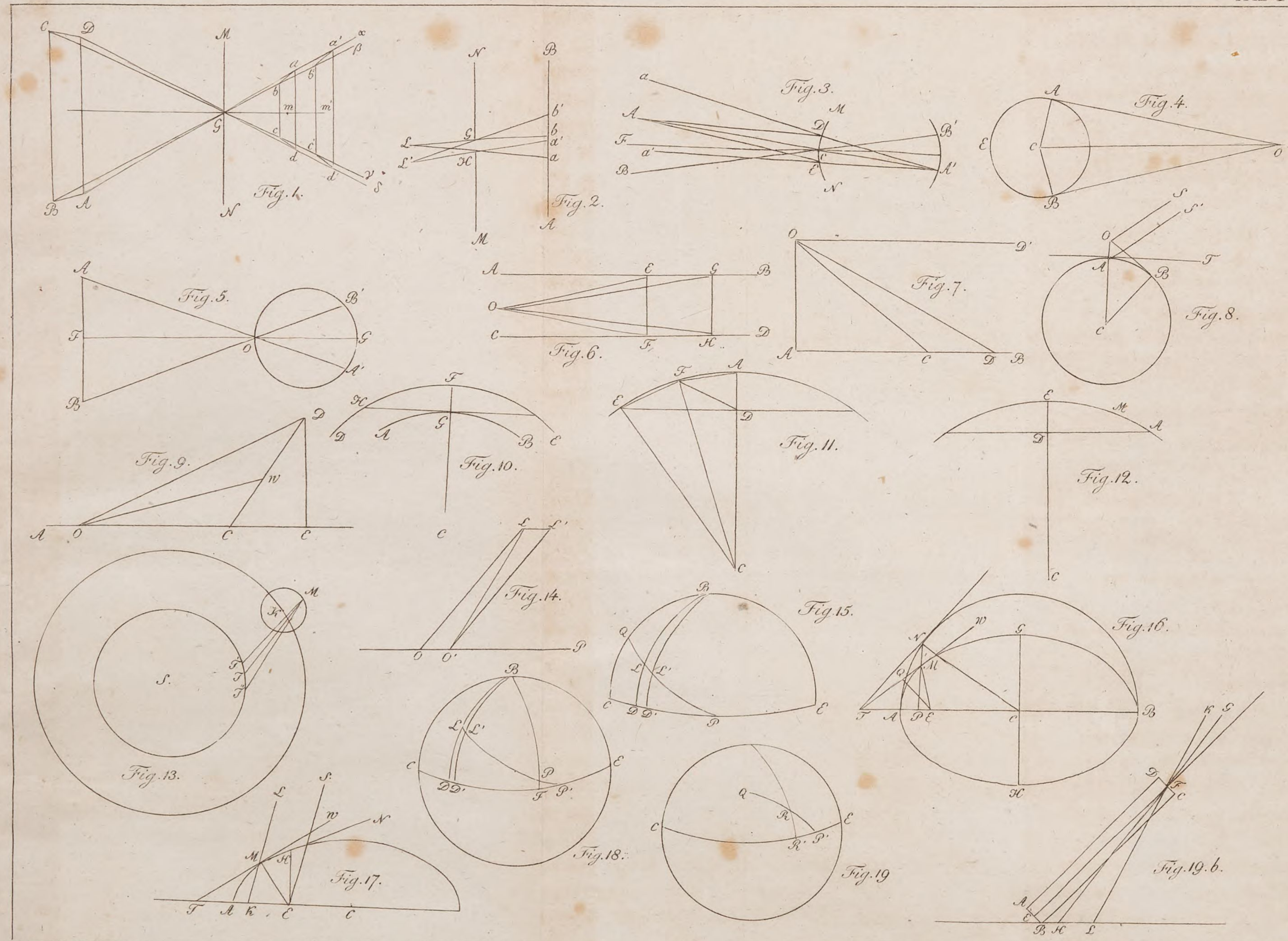
für violette unter einem Winkel von 18° 30′ auffallende Strahlen 0.974699,

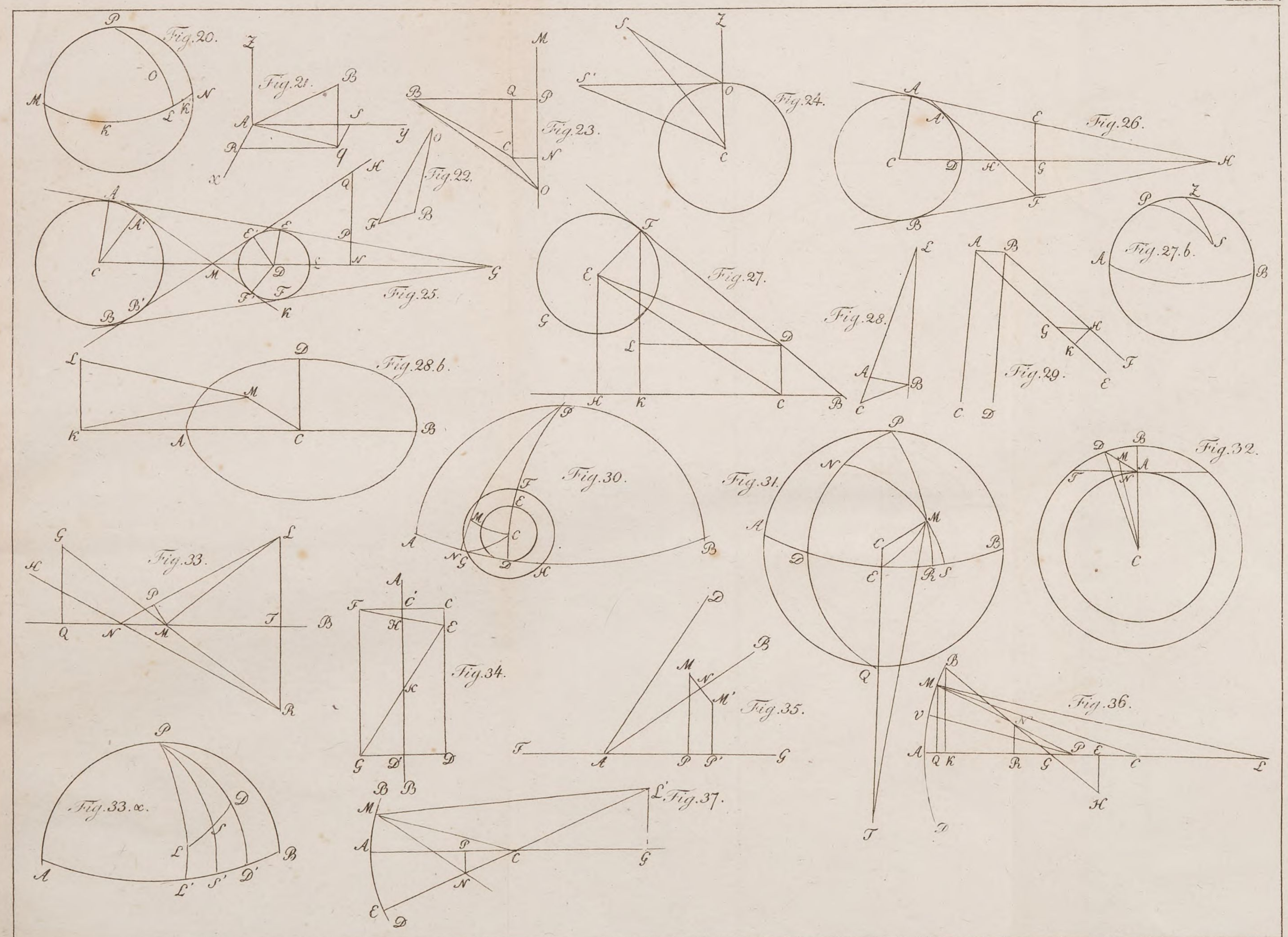
welche Werthe noch bedeutend von einander abweichen. Leider wurden jene Fehler erst nach dem Abdrucke der Rechnungen bemerkt. Da es hier indessen weniger auf das Resultat selbst, als auf die zur Erlangung desselben angewandte Methode ankommt, so werden hoffentlich diese Rechnungsfehler nicht sehr störend seyn, und Entschuldigung finden. Die Werthe der Krümmungshalbmesser, welche gleiche Vereinigungsweiten hervorbringen, sind:

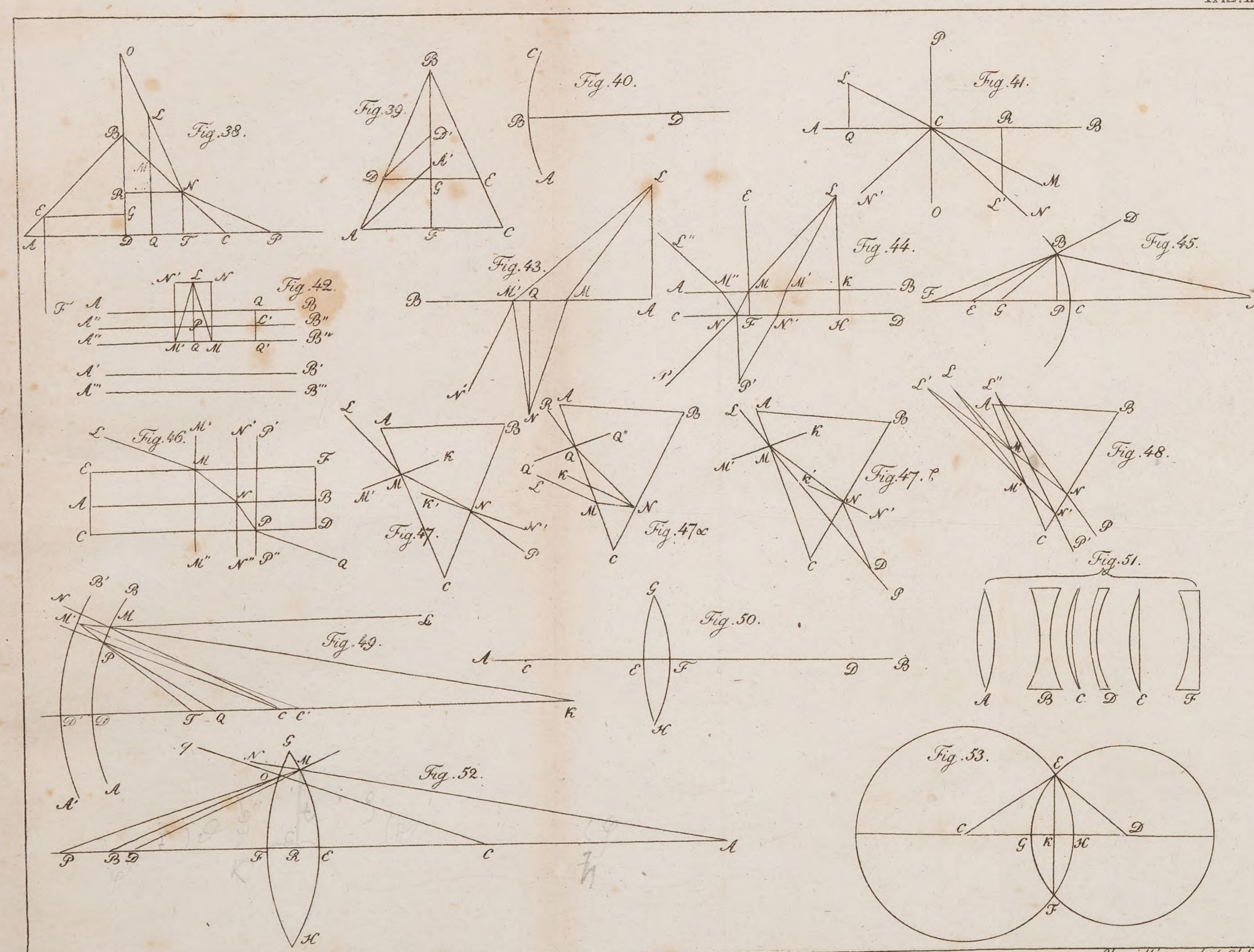
$$r = 0.142615,$$
$$\varrho = - 0.579839,$$
$$r' = 0.179512,$$
$$\varrho' = - 0.118555.$$

Vergl. Gehler's physicalisches Wörterbuch. Neue Aufl. Bd. 6. Pag. 420.

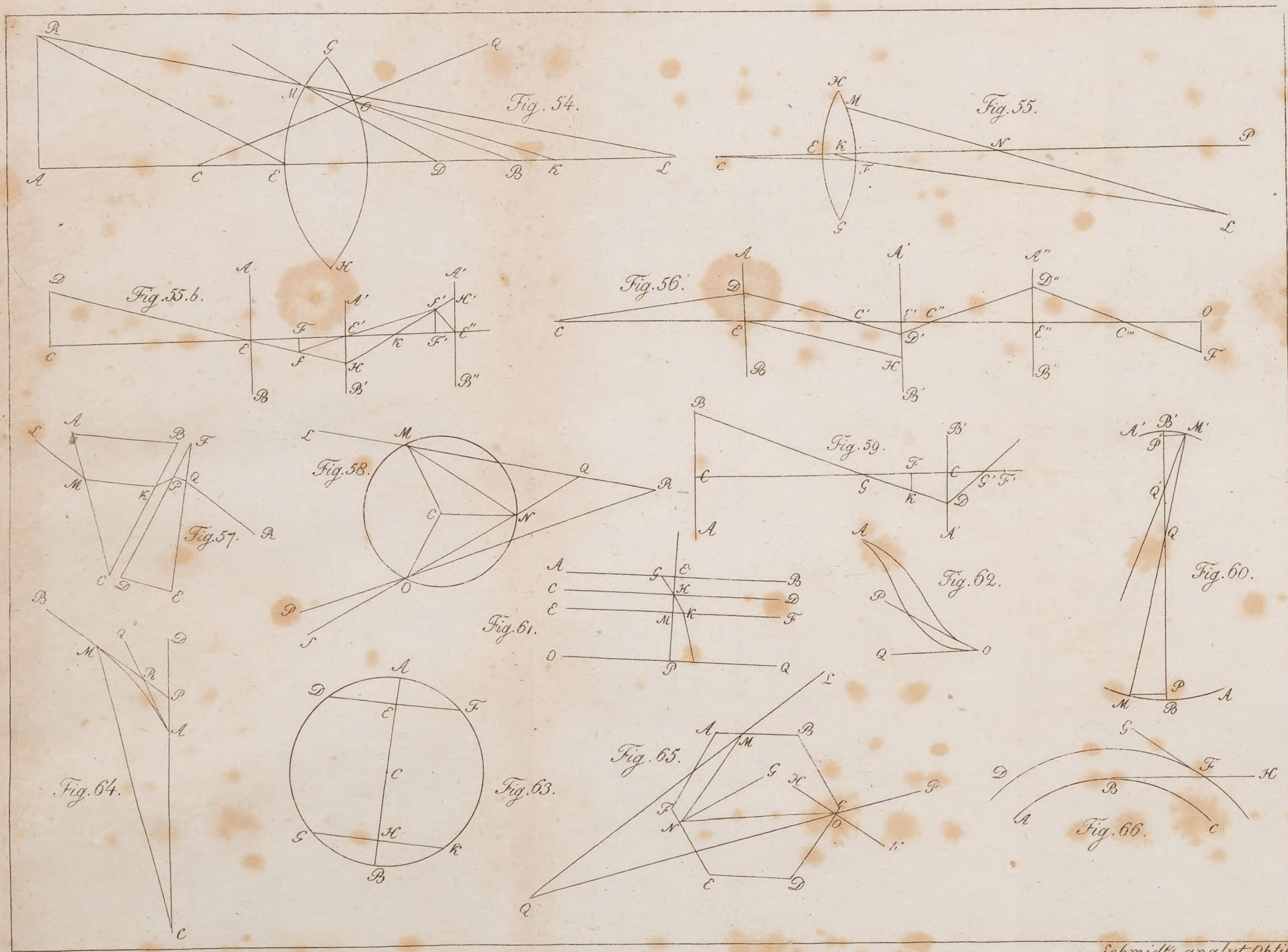
TAB. I.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19
Fig. 19. b.


Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 27. b.
Fig. 28.
Fig. 28. b.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 33. α.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.



Schmidt's analyt. Optik.


Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 55. b.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.

Schmidt, Johann Karl Eduard,

Lehrbuch der analytischen Optik

Göttingen 1834

Bamberg, Staatsbibliothek -- Phys.o.128
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11763793-6